

Programmation Logique et Par Contraintes Avancée

Cours 7 – Réification et Contraintes Souples

Ralf Treinen

Université Paris Cité
UFR Informatique
Institut de Recherche en Informatique Fondamentale



treinen@irif.fr

18 février 2025

À quoi sert la Réification ? 1 : Combinaisons de Contraintes

- ▶ Jusqu'à maintenant on a exprimé la *conjonction* des contraintes : toutes les contraintes doivent être satisfaites.
- ▶ La réification permet d'exprimer des combinaisons entre contraintes au delà de la conjonction : négation, équivalence, implication, disjonction.

Qu'est-ce que c'est la Réification ?

- ▶ Selon Wikipédia :
... reification is the process by which a user program or any aspect of a programming language that was implicit in the translated program and the run-time system, are expressed in the language itself.
- ▶ Les *contraintes réifiées* en Oz (et Prolog) : On a une variable à domaine fini $\{0, 1\}$ liée au fait qu'une contrainte est satisfaite ou pas.

À quoi sert la Réification ? 2 : Contraintes Souples

- ▶ La réification permet d'exprimer des contraintes qui sont « souples » (angl. : soft constraints), en opposition aux contraintes dures vues jusqu'à maintenant qui doivent impérativement être satisfaites.
- ▶ Cela permet par exemple d'exprimer qu'on veut satisfaire un nombre maximal de contraintes souples.
- ▶ Les contraintes souples sont nécessaires pour modéliser des problèmes « sur-contraints » (angl. : over-constrained).

Propagateurs pour contraintes réifiées

- ▶ La *réification* d'une contrainte C correspond à la formule logique suivante :

$$(C \leftrightarrow x = 1) \quad \text{avec} \quad D(x) = \{0, 1\}$$

où $x \notin \text{vars}(C)$.

- ▶ Si la mémoire implique $x = 1$ alors le propagateur devient un propagateur pour C .
- ▶ Si la mémoire implique $x = 0$ alors le propagateur devient un propagateur pour $\neg C$.
- ▶ Si la mémoire implique C alors le propagateur pose $x = 1$, puis disparaît.
- ▶ Si la mémoire n'est pas cohérente avec C alors le propagateur pose $x = 0$, puis disparaît.

Exemples (reif1.oz)

```
declare X Y B
[X Y]:::0#10
B:::0#1
(X+Y=:10)=B
{Browse [X Y B]}

X >: 5

B =: 1
% restricts Y to [0..4]
```

Propagateurs pour des contraintes réifiées

- ▶ Voir le document « System Modules », section 5.10 « Reified Constraints »
- ▶ Quelques exemples :
 - ▶ $(X<:Y)=B$
 - ▶ $(X+Y+Z=:0)=B$
 - ▶ $(X\backslash=:Y)=B$
 - ▶ $(X:::0\#10)=B$
 - ▶ `{FD.reified.distance X Y '=: ' Z B}`

Exemples (reif2.oz)

```
declare X Y B
[X Y]:::0#10
B:::0#1
(X>:Y)=B
{Browse [X Y B]}

X >: 5

B =: 0
% imposes that Y > 5
```

Exemples (reif3.oz)

```
declare X Y B
[X Y]:::0#10
B:::0#1
(X+Y=:10)=B
{Browse [X Y B]}

X = 3

Y = 7
% imposes B=1
```

Abréviations pour les propagateurs réifiés

- ▶ L'*instruction* $X+Y =: Z$ est un raccourci pour l'instruction `{FD.sum [X Y] '=: ' Z}`
- ▶ L'instruction $(X+Y '=: ' Z) = D$ est un raccourci pour l'instruction `{FD.reified.sum [X Y] '=: ' Z D}`
- ▶ L'*expression* $X+Y =: Z$ est un raccourci pour l'expression `{FD.reified.sum [X Y] '=: ' Z}`
Cette expression a comme valeur la variable booléenne qui est la réification de la contrainte.

Exemples (reif4.oz)

```
declare X Y B
[X Y]:::0#10
B:::0#1
(X+Y=:10)=B
{Browse [X Y B]}

X >: 3

Y >: 7
% imposes B=0
```

Variables booléennes et Contraintes pseudo-booléennes

- ▶ On appelle souvent une variable avec domaine $[0,1]$ une *variable 0/1* ou une *variable booléenne*.

$$(C \leftrightarrow x = 1) \quad \text{où } D(x) = \{0,1\}$$

- ▶ Contrainte *pseudo-booléenne* : les variables sont booléennes, mais on les utilise pour former une expression dont les valeurs peuvent être des entières non booléennes. Exemple :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 2$$

exprime qu'au plus deux des variables sont vraies (supposant que toutes ces variables sont booléennes).

- ▶ Souvent utilisées en connexion avec la réification : contrainte sur le *nombre de contraintes réifiées qui sont satisfaites*.

Connecteurs booléens

- ▶ Voir le document « System Modules », section 5.9 « 0/1 Propagators »
- ▶ Exemples :
 - ▶ {FD.conj X Y Z} pour $(X \wedge Y) = Z$
 - ▶ {FD.disj X Y Z} pour $(X \vee Y) = Z$
 - ▶ {FD.impl X Y Z} pour $(X \rightarrow Y) = Z$
 - ▶ {FD.equi X Y Z} pour $(X \leftrightarrow Y) = Z$
 - ▶ {FD.nega X Y} pour $(\neg X) = Y$

Réification : profiter de la syntaxe fonctionnelle

- ▶ Puisque {FD.disj X Y Z} est un appel de procédure ...
- ▶ {FD.disj X Y} est un appel de fonction, qui envoie une variable booléenne.
- ▶ Parfois utile car ça évite d'inventer des noms pour des variables booléennes.
- ▶ Pareil : $(X=:Y)$ est une expression qui donne une variable booléenne qui est liée au fait que X est égal à Y.

Exemples (bool1.oz)

```
declare X Y XB YB
[X Y]:::0#10
[XB YB]:::0#1
{Browse [X Y]}

(X=:5)=XB
(Y=:5)=YB
{FD.disj XB YB 1}

X=1

% poses Y=5
```

Exemples (bool2.oz)

```
declare X Y
[X Y]:::0#10
{Browse [X Y]}

% syntactic sugar for the previous example
{FD.disj (X=:5) (Y=:5) 1}

X=1

% poses Y=5
```

Exemples (exactly-by-rectification.oz)

```
declare
% reimplementation of FD.exactly (see lecture 6)
proc {MyExactly N L I}
  % exactly N elements of L are equal to I}
  {FD.sum {List.map L fun {$ X} X=:I end} '=: ' N}
end

% propagation de Dv vers D
declare L N in
{FD.list 5 1#10 L}
N::0#20
{Browse L}
{Browse N}
{MyExactly N L 8}
N >=: 4
{Nth L 3} =: 7
```

Exemples (photo-hard.oz) I

```
declare
proc {Photo Root}
  Persons = [betty chris donald fred gary mary paul]
  Prefs = [betty#gary betty#mary chris#betty chris#gary
           fred#mary fred#donald paul#fred paul#donald]
  Alignment = {FD.record alignment Persons 1#{Length Persons}}
  proc {Satisfy P#Q}
    {FD.distance Alignment.P Alignment.Q '=: ' 1}
  end
in
  Root = Alignment
  {FD.distinct Alignment} % no two persons at same position
  {List.forAll Prefs Satisfy}
  Alignment.fred <: Alignment.betty % breaking symmetries
  {FD.distribute ff Alignment}
end
{Browse {SearchOne Photo}}
```

Exemple : la photo de groupe

- ▶ Prendre une photo du groupe Betty, Chris, Donald, Fred, Gary, Mary, and Paul (tous placés un à côté de l'autre).
- ▶ Betty veut être à côté de Gary et Mary.
- ▶ Chris veut être à côté de Betty et Gary.
- ▶ Fred veut être à côté de Mary et Donald.
- ▶ Paul veut être à côté de Fred et Donald.

Exemple : la photo de groupe

- ▶ Problème : les préférences sont contradictoires. Ca arrive souvent en pratique!
- ▶ Jusqu'à maintenant les contraintes étaient dures (*hard constraints*) : une contrainte non satisfaite est cause d'échec.
- ▶ Solution : traiter les préférences comme des contraintes souples (*soft constraints*) :
 - ▶ Réifier les contraintes de distances ;
 - ▶ Maximiser le nombre de contraintes souples qui sont satisfaites.

Exemples (photo-soft.oz) I

```
declare
proc {Photo Root}
  Persons = [betty chris donald fred gary mary paul]
  Prefs= [betty#gary betty#mary chris#betty chris#gary
          fred#mary fred#donald paul#fred paul#donald]
  Alignment = {FD.record alignment Persons 1#{Length Persons}}
  NbSatisfied = {FD.int 0#{Length Prefs}}
  fun {Satisfied P#Q}
    {FD.reified.distance Alignment.P Alignment.Q '=' 1}
    % returns S such that S <=> (|P-Q|=1)
  end
in
  Root = r(satisfaction: NbSatisfied
          alignment: Alignment)
  {FD.distinct Alignment} % no two persons at same position
  {FD.sum {Map Prefs Satisfied} '=' NbSatisfied}
  % Creates one 0/1 variable per preference
```

Exemples (photo-soft.oz) II

```
    % Each such variable is constrained to the fact that
    % the corresponding preference is satisfied.
    % NbSatisfied is constrained to the number of satisfied
    % 0/1 variables.
    Alignment.fred <: Alignment.betty % breaking symmetries
    {FD.distribute generic(value:max) [NbSatisfied]}
    {FD.distribute naive Alignment}
end

{Browse {SearchOne Photo}}
{ExploreOne Photo}
```