Grammaires et Analyse Syntaxique - Cours 4 Introduction à l'analyse LL(1)

Ralf Treinen

treinen@irif.fr

13 février 2025

Vue la semaine dernière

- Grammaires
- Dérivations (gauches, droites)
- Arbres de dérivation
- "*dérivation* = *arbre de dérivation* + *stratégie* "
- Une grammaire G est ambiguë quand il existe un mot w qui a deux arbres de dérivation différents
  - équivalent : qui a deux dérivations gauches différentes
  - équivalent : qui a deux dérivations droites différentes

Petit rappel des grammaires

- Exemple d'une grammaire algébrique :

$$(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathrm{A}\}, \mathrm{A}, \mathrm{A} \to \mathtt{a}\mathrm{A}\mathtt{b} \mid \epsilon)$$

- Exemple d'une dérivation dans cette grammaire

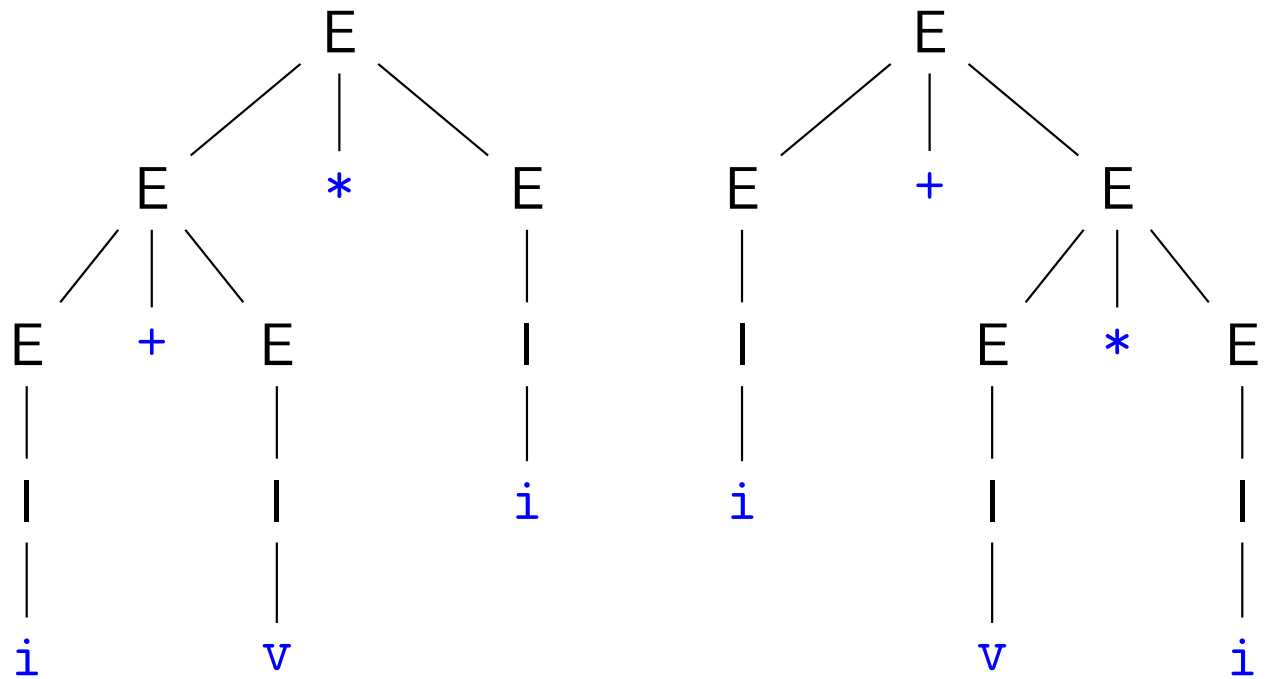
$$\mathrm{A} \to \mathtt{a}\mathrm{A}\mathtt{b} \to \mathtt{aa}\mathrm{A}\mathtt{bb} \to \mathtt{aaa}\mathrm{A}\mathtt{bbb} \to \mathtt{aaa}\mathrm{A}\mathtt{bbb} \to \mathtt{aabbb}$$

- Langage engendré par cette grammaire :

$$\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$$

Deux arbres de dérivation de `i+v*i` dans G_1

$$E \to E\texttt{+}E \mid E\texttt{*}E \mid \texttt{(}E\texttt{)} \mid I \qquad I \to \texttt{i} \mid \texttt{v}$$



Évitez les grammaires ambiguës

- Les grammaires ambiguës sont (en principe) interdites pour l'analyse grammaticale.
- Raison : Nous ne voulons pas seulement savoir si un mot est accepté par la grammaire ou non, mais aussi connaître son arbre de dérivation, qui va être utilisé dans la suite.
- C'est une différence avec le cours AAL3, où on s'est seulement intéressé à l'acceptation d'un mot (par un automate, une regexp)
- "En Principe" : certains outils (voir plus tard) acceptent des grammaires ambiguës, mais seulement avec une spécification supplémentaire qui permet de désambiguïser.

Plusieurs techniques pour l'analyse grammaticale

- *Analyse descendante* : construction de l'arbre de dérivation, à partir de l'axiome jusqu'aux feuilles.
  Ordre de construction : parcours préfixe de l'arbre.
  C'est l'approche que nous étudions cette semaine et la semaine prochaine.
- *Analyse ascendante* : construction d'un arbre de dérivation à partir des feuilles jusqu'à l'axiome. Plus complexe à maîtriser, mais aussi plus puissante.
  C'est l'approche que nous commencerons à étudier dans deux semaines.

Construction d'un arbre de dérivation

- Dans la construction d'un arbre de dérivation (ou, d'une dérivation), il y a à chaque moment deux choix à faire :
  - le non-terminal qu'on va remplacer à l'aide d'une règle de la grammaire,
  - une fois le non-terminal choisi, la règle parmi celles qui ont ce non-terminal sur le côté gauche.
- Nous avons vu la semaine dernière que le premier choix n'est pas essentiel : on peut imposer une stratégie pour choisir le non-terminal à remplacer (par ex., celui qui est le plus à gauche).

Exploration complète de l'espace de recherche ?

- Une façon de réaliser une analyse grammaticale est maintenant d'essayer simplement toutes les possibilités de choisir des règles.
- Cela donne lieu à un algorithme *non-déterministe* :
  - soit par *retour en arrière* (angl. : backtracking)
  - soit par *programmation dynamique*
- Approche complète : on est sûr de trouver un arbre de dérivation si le mot est dans le langage ☺
- Problème : efficacité ☹
- On cherche des solutions efficaces, éventuellement en imposant des restrictions aux grammaires qu'on peut traiter.

Quelle efficacité cherche-t-on ?

- Le temps d'exécution d'un analyseur grammaticale est au moins linéaire dans la longueur du texte à analyser (c-à-d la longueur du flot des tokens). Évidemment on ne peut pas faire mieux.
- Puisqu'on cherche aussi à construire l'arbre de dérivation, on ne peut même pas faire mieux que la taille de l'arbre de dérivation.
- La taille de l'arbre de dérivation est $\geq$ la taille de l'entrée (car chaque symbole de l'entrée est une feuille de l'arbre).
- On veut aussi que l'analyseur fasse un seul passage sur le texte.

Définition

- Soit $G = (\Sigma, N, S, P)$ une grammaire.
- Un non-terminal K est *accessible* s'il existent $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup N)^*$ tel que $S \rightarrow^* \alpha K \beta$.
- Un non-terminal K est *productif* s'il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $K \rightarrow^* w$.
- Les non terminaux non accessibles ou non productifs sont inutiles.
- Une grammaire est *réduite* quand tous ses non-terminaux sont accessibles et productifs.

Trouver les non terminaux accessibles

- Règles :
  - l'axiome de la grammaires est accessible
  - Si N est accessible et $N \to u$ une production, alors tous les non terminaux en u sont accessibles.
- Exemple : $(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E}, \mathsf{F}\}, \mathsf{F}, P)$ avec P :

$$\begin{array}{llll} \mathsf{A} \to \epsilon \mid \mathtt{a} & \mathsf{C} \to \mathsf{A}\ \mathsf{D} \mid \mathtt{c} & \mathsf{E} \to \mathsf{A}\ \mathsf{B} \\ \mathsf{B} \to \epsilon \mid \mathtt{b} & \mathsf{D} \to \mathsf{C}\ \mathtt{a}\ \mathsf{C} & \mathsf{F} \to \mathsf{E}\ \mathtt{d}\ \mathsf{E} \mid \mathsf{A}\ \mathsf{F} \end{array}$$

Accessibles : F, E, A, B. Non-accessibles : C, D.

Trouver les non terminaux productifs

- Règles :
  - Si $N \to u$ est une production avec $u \in \Sigma^*$, alors N est productif.
  - Si $N \to u$ est une production et tous les non terminaux de u sont productifs, alors N est productif.
- Exemple : $(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \{A, B, C, D, E, F\}, F, P)$ avec P :

$$
\begin{array}{llll}
A \to \epsilon \mid \mathtt{a} & C \to A\ D \mid \mathtt{c} & E \to A\ B \mid B\ A \\
B \to E\ \mathtt{b} & D \to C\ \mathtt{a}\ C & F \to E\ \mathtt{d}\ E \mid A\ F \mid \mathtt{c}\ D
\end{array}
$$

Productif A, C, D, F. Non-productif : B, E.

Réduction d'une grammaire

- Pour toute grammaire G avec $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ existe une grammaire G' telle que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$ et G' est réduite.
- Construction :
  - on supprime d'abord tous les non-terminaux non productifs (et les règles dans lesquelles ils paraissent) ;
  - puis on supprime tous les non-terminaux non accessibles (et les règles dans lesquelles ils paraissent).
- Il faut le faire dans cet ordre.
- Quand $\mathcal{L}(G) = \emptyset$ alors l'axiome de la grammaire n'est pas productif, mais on n'a pas le droit de supprimer l'axiome !

Exemple

- Grammaire, où A est l'axiome :

$$A \to BC \mid D; D \to \texttt{d}; B \to \texttt{b}$$

- Non-terminal non productif : C. Le supprimer :
- On obtient

$$A \to D; D \to \texttt{d}; B \to \texttt{b}$$

- Non-terminal non accessible : B. Le supprimer :
- On obtient

$$A \to D; D \to \texttt{d}$$

- Cette grammaire est réduite.

Comment organiser une analyse descendante ?

- On construit l'arbre de dérivation à partir de sa racine, et puis on complète successivement par les enfants des nœuds étiquetés par des non-terminaux.
- Il faut maîtriser le choix de la règle de la grammaire qu'on applique .
- On ne peut pas demander qu'il y ait une seule règle par non-terminal (car dans ce cas la grammaire serait complètement triviale).
- Sur quoi baser le choix de la règle ?
- Sur la suite du mot pour lequel on cherche à construire l'arbre de dérivation !

Exemple

- Grammaire $G = (\Sigma, N, S, P)$ où
- $\Sigma = \{\texttt{i}, \texttt{+}, \texttt{[}, \texttt{]}\}$
- $N = \{\mathsf{S}\}$
- $S = \mathsf{S}$
- P consiste en les règles suivantes :

$$\mathsf{S} \rightarrow \texttt{i} \quad (1)$$
$$\mathsf{S} \rightarrow \texttt{[}\mathsf{S}\texttt{+}\mathsf{S}\texttt{]} \quad (2)$$

- $\mathcal{L}(G)$: expressions complètement parenthésées, construites avec la constante `i` et l'opérateur binaire `+`.

Construction d'un arbre de dérivation (1)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

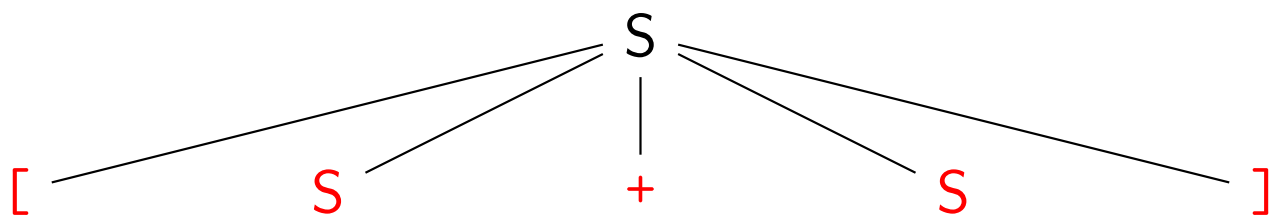
S

[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Choisir règle (2) : c'est la seule qui peut produire à partir de S un mot qui commence par [.

Construction d'un arbre de dérivation (2)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

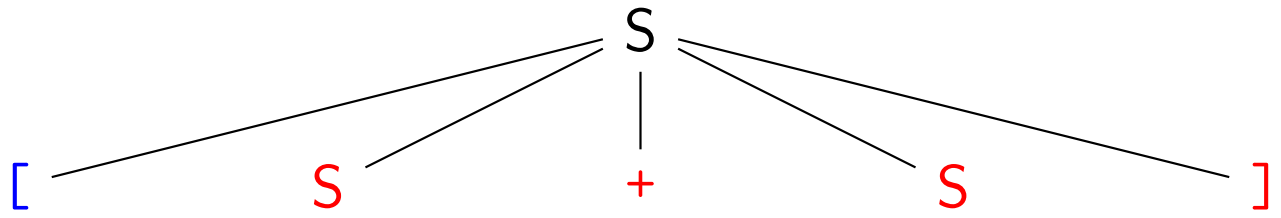


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Le premier non-terminal du mot des feuilles est [.

Construction d'un arbre de dérivation (3)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

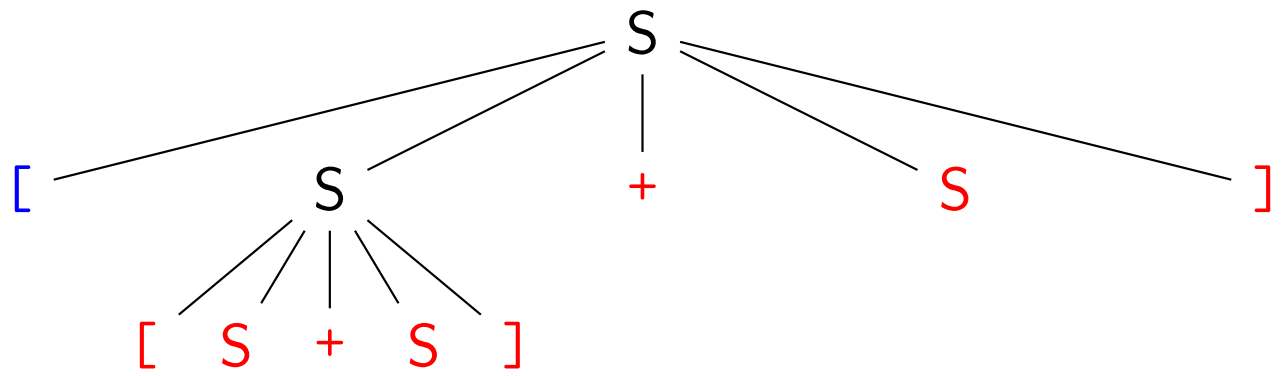


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Choisir règle (2) : c'est la seule qui peut produire à partir de S un mot qui commence par [.

Construction d'un arbre de dérivation (4)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

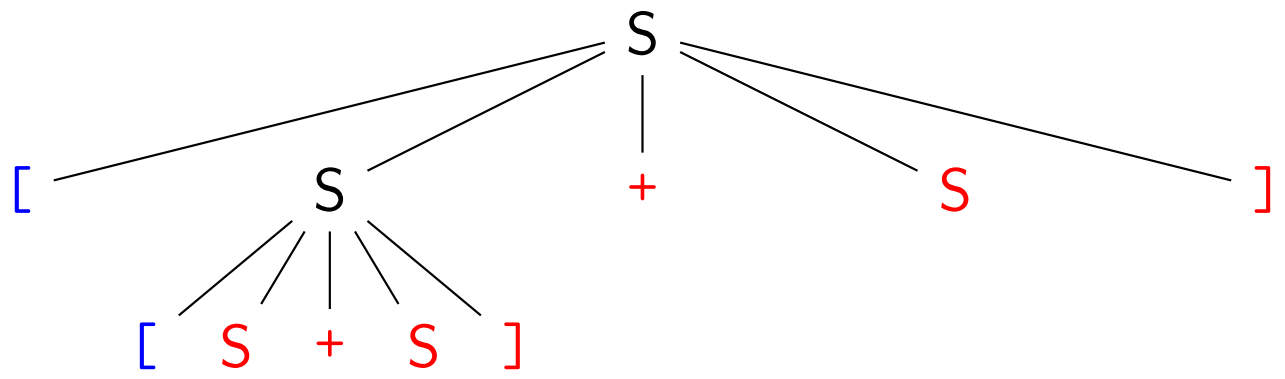


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Le suivant non-terminal du mot des feuilles est [.

Construction d'un arbre de dérivation (5)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

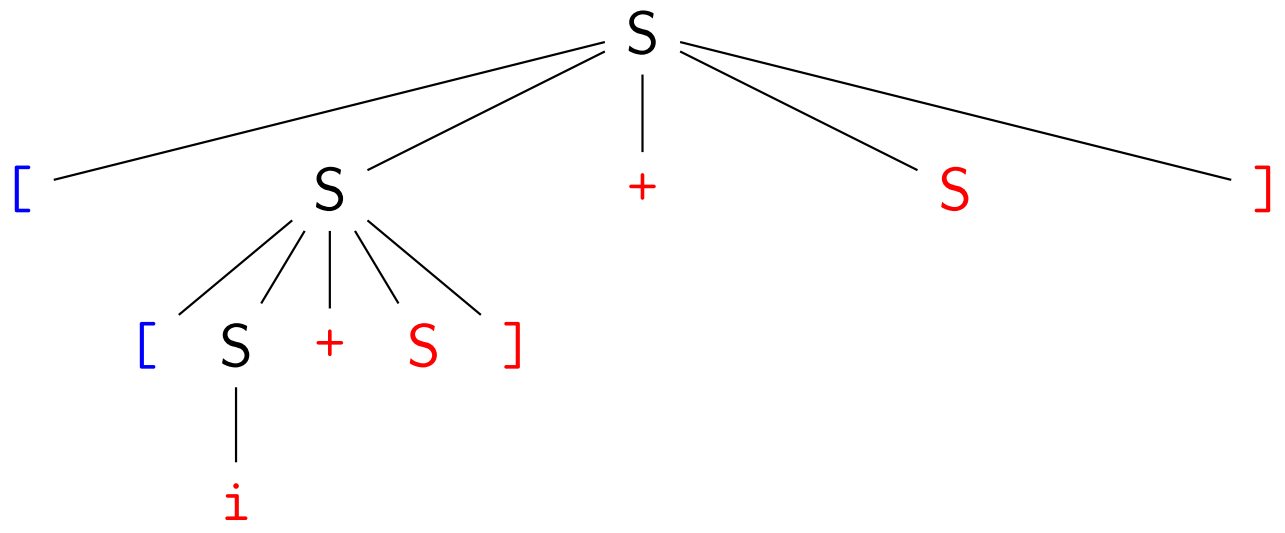


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Choisir règle (1) : c'est la seule qui peut produire à partir de S un mot qui commence par i.

Construction d'un arbre de dérivation (6)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

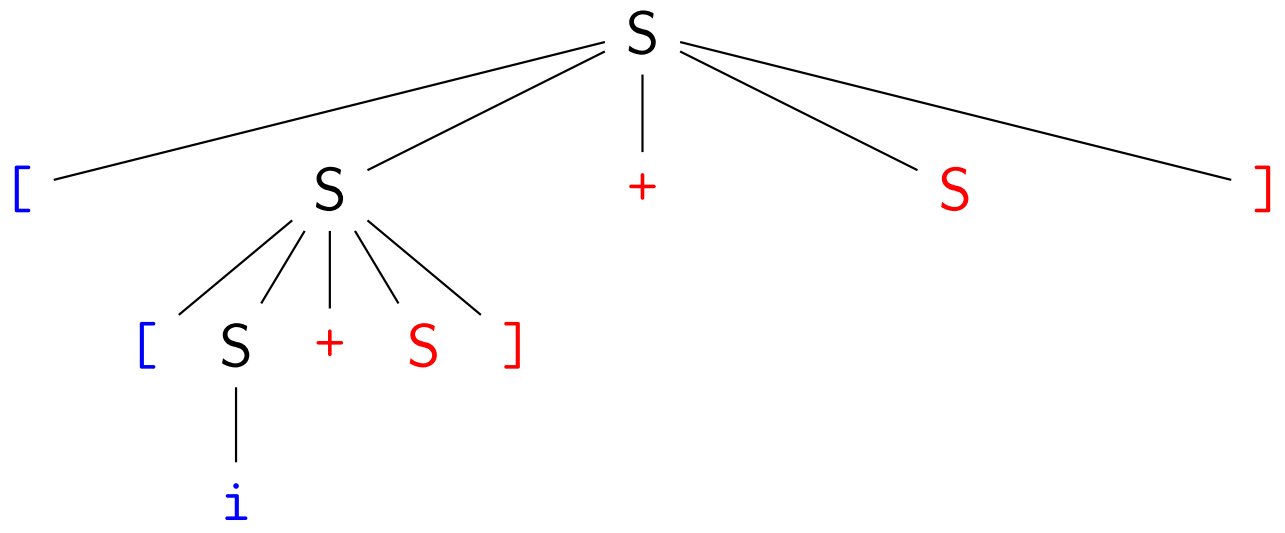


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Le suivant non-terminal du mot des feuilles est i.

Construction d'un arbre de dérivation (7)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

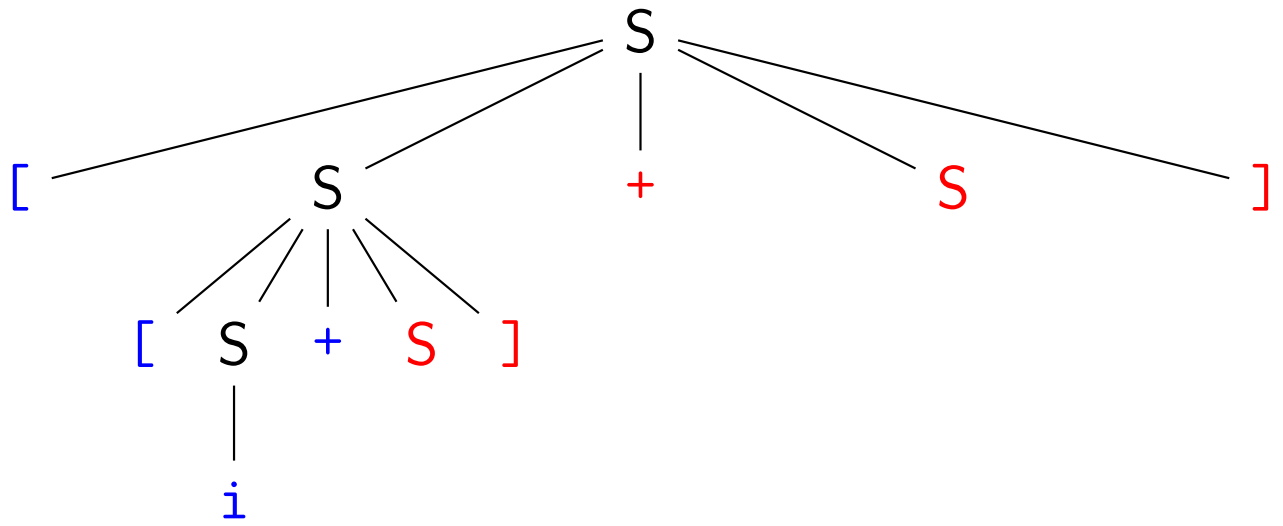


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Le suivant non-terminal du mot des feuilles est +.

Construction d'un arbre de dérivation (8)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

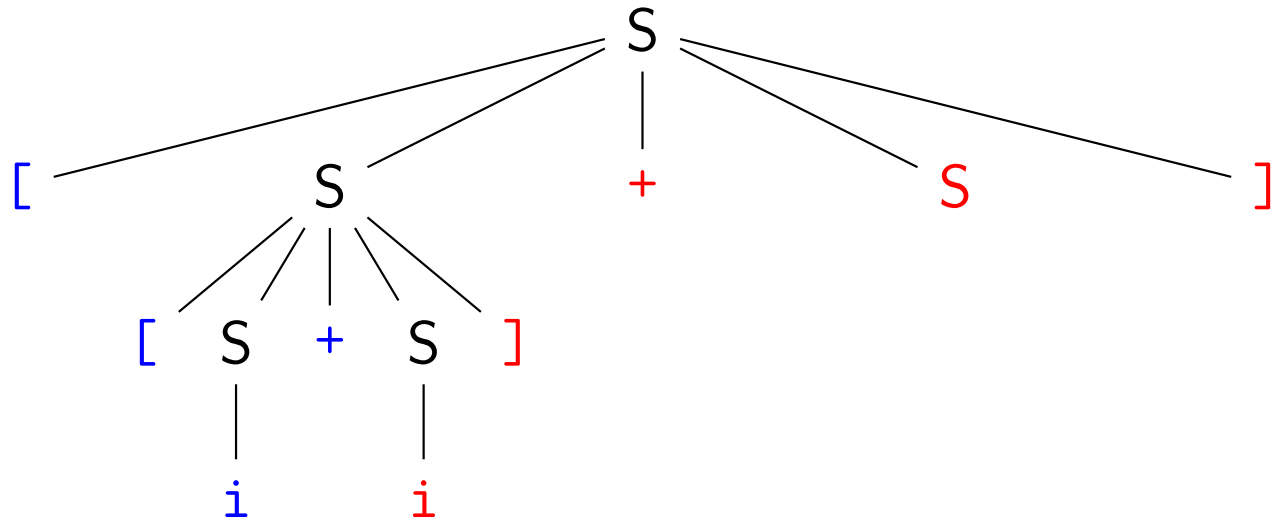


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Choisir règle (1) : c'est la seule qui peut produire à partir de S un mot qui commence par i.

Construction d'un arbre de dérivation (9)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

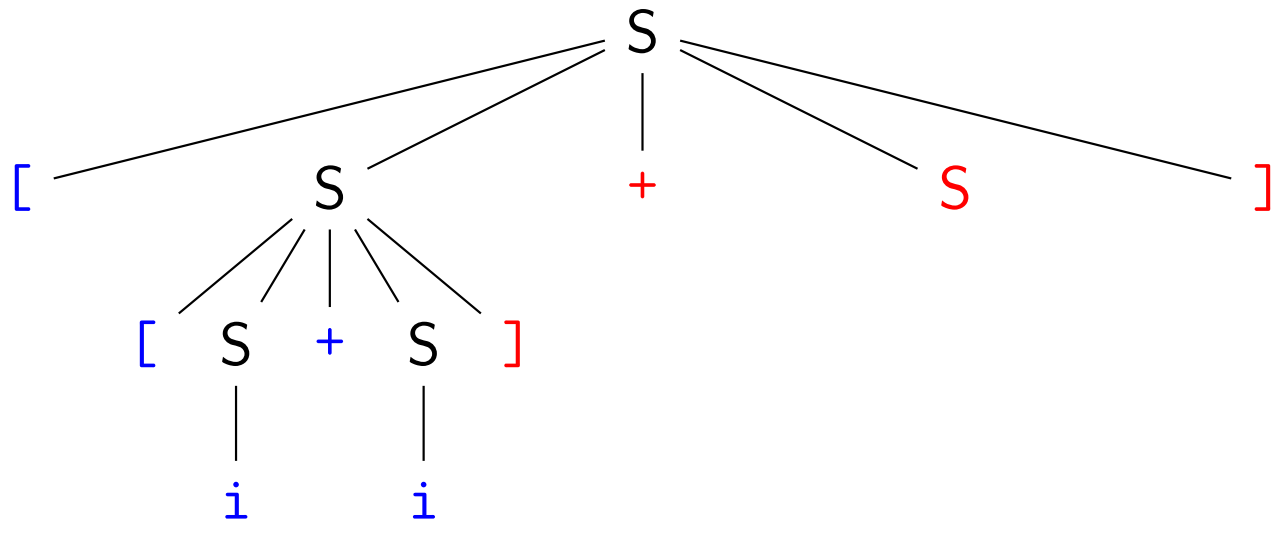


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Le suivant non-terminal du mot des feuilles est i.

Construction d'un arbre de dérivation (10)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

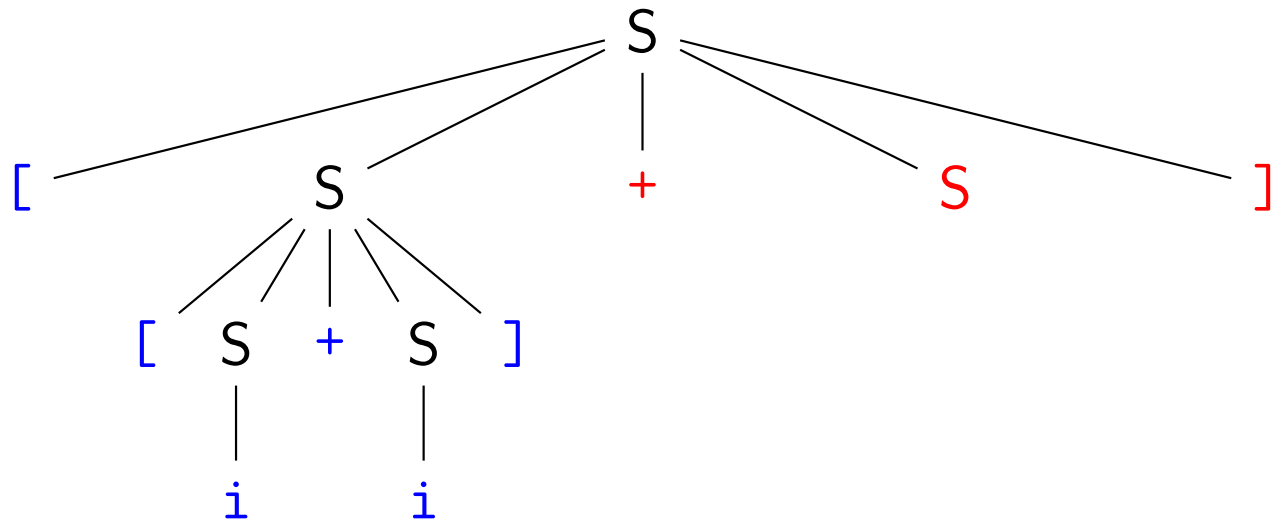


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Le suivant non-terminal du mot des feuilles est].

Construction d'un arbre de dérivation (11)

Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]

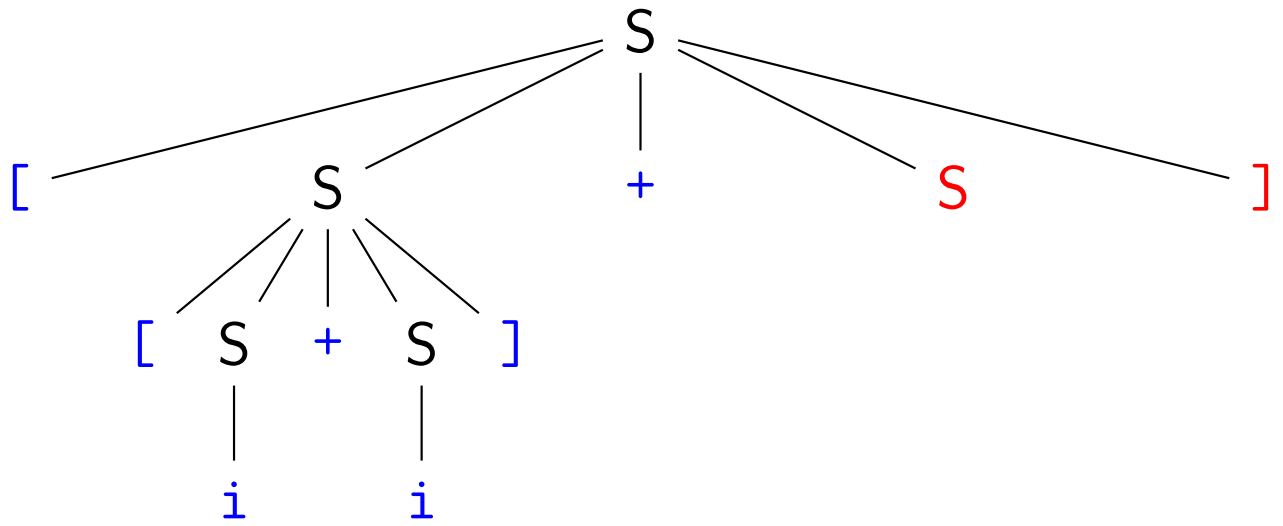


[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Seule la règle (2) peut produire à partir de S un mot qui commence par +.

Construction d'un arbre de dérivation (12)

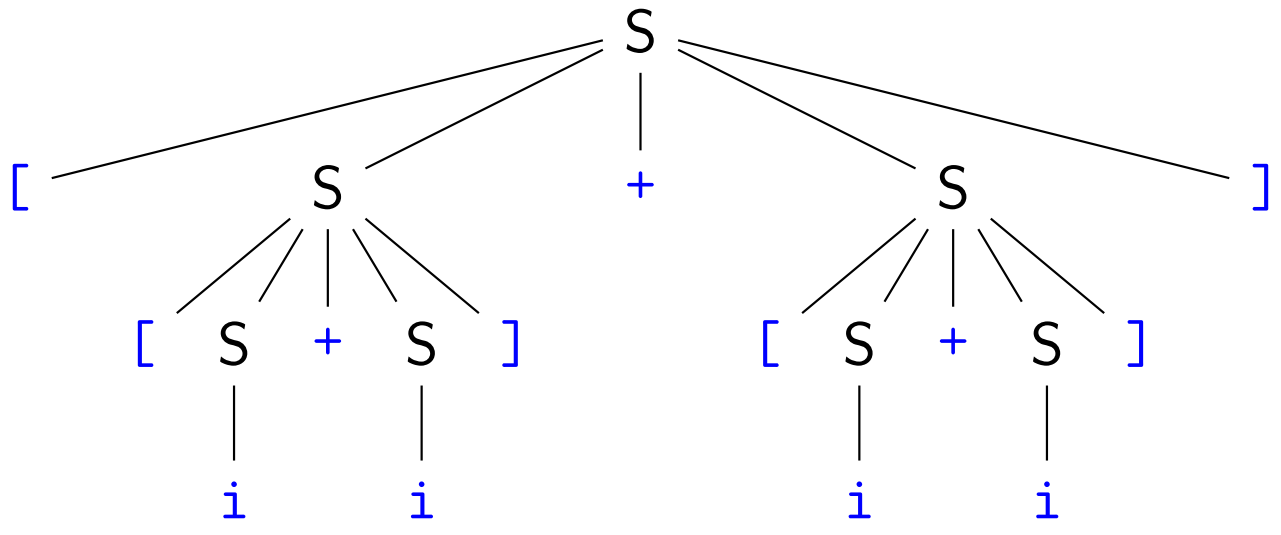
Productions : (1) S → i (2) S → [S+S]



[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Choisir règle (2) : c'est la seule qui peut produire à partir de S un mot qui commence par [.

etc. etc.



[	[	i	+	i	]	+	[	i	+	i	]	]

Construction terminée !

Ce qu'on a vu sur l'exemple :

- Il y a deux types d'actions :
  - consommer en parallèle un terminal du préfixe du mot des feuilles déjà construit, et le même symbole de l'entrée ;
  - ajouter des enfants à une feuille de l'arbre de dérivation partiel.
- Pour choisir la règle de la grammaire, on regarde en avant quel est le symbole suivant de l'entrée que nous aurions à consommer (lookahead).

Grammaires LL(1)

En fait, l'algorithme que nous avons vu sur l'exemple appartient à la classe *LL(1)* :

- le premier *L* indique qu'on parcourt l'entrée de gauche (angl. : left) à droite ;
- le deuxième *L* indique qu'on construit une dérivation gauche (angl. : left), c.-à-d. un arbre de dérivation dans un ordre préfixe ;
- le nombre *1* indique que nous utilisons la connaissance de 1 caractère dans la partie de l'entrée qui reste à consommer, pour déterminer la règle à appliquer (lookahead=1).

Grammaires LL(k)

- Idée : on peut déterminer la règle de production à appliquer au non-terminal le plus à gauche de l'arbre de dérivation en regardant les k symboles suivants de l'entrée (lookahead=k)
- Généralisation des LL(1).
- En pratique ce sont surtout les grammaires LL(1) qui nous intéressent, pour cette raison le cas général LL(k) n'est pas fait dans ce cours.

Définition LL(1)

Définition

Soit $G = (\Sigma, N, S, P)$ une grammaire algébrique. G est dite *LL(1)* ssi

- S'il existe deux dérivations *gauches*

$$S \rightarrow^* uY\alpha \rightarrow u\beta\alpha \rightarrow^* ux$$
$$S \rightarrow^* uY\alpha \rightarrow u\gamma\alpha \rightarrow^* uy$$

où $Y \in N$; $u, x, y \in \Sigma^*$; $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$; $Y \rightarrow \beta, Y \rightarrow \gamma \in P$, $\beta \neq \gamma$

- alors x et y diffèrent dans leur première lettre.

Explication de la définition de LL(1)

- On a déjà consommé u, partie initiale du mot d'entrée.
- Le non-terminal le plus à gauche à réécrire est maintenant Y.
- Dans les deux cas considérés, le mot d'entrée continue une fois par le mot x, l'autre fois par le mot y.
- En regardant le premier caractère de la suite du mot d'entrée, on peut maintenant décider comment réécrire le non-terminal Y.

Conséquences

- Toute grammaire G qui est LL(1) est *non-ambiguë* : tout mot du langage $\mathcal{L}(G)$ a une seule dérivation gauche, et donc un seul arbre de dérivation.
- Il existe un algorithme efficace pour la construction de cet arbre de dérivation.
- Question : comment savoir si une grammaire est LL(1) ?
- Notre définition parle de dérivations quelconques, ce n'est pas une méthode de décision efficace. Comment le décider efficacement en regardant la grammaire ?

Exemple d'une grammaire qui est LL(1)

- La grammaire de l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \texttt{i} \\ S &\rightarrow \texttt{[}S\texttt{+}S\texttt{]} \end{aligned}$$

  est clairement LL(1) car les deux côtés droits de S commencent par des non-terminaux différents.
- La question est donc facile *quand tous les côtés droits des règles commencent par des terminaux* : pour tout non terminal, les côtés droits des règles pour *ce non-terminal* doivent commencer par des symboles différents.

La notion de First_1

- Étant donnée une grammaire $G = (\Sigma, N, S, P)$ et un mot $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$

$$\mathrm{First}_1(\alpha) = \{c \in \Sigma \mid \exists w \in \Sigma^*, \alpha \rightarrow^* cw\}$$

- $\mathrm{First}_1(\alpha)$ est l'ensemble des symboles par lesquels un mot terminal dérivé à partir de α peut commencer.
- Pour que G soit LL(1) il est nécessaire que quand il y a deux règles différentes N $\rightarrow \alpha$ et N $\rightarrow \beta$ pour le *même* non-terminal, alors $\mathrm{First}_1(\alpha)$ est disjoint de $\mathrm{First}_1(\beta)$.
- Si G n'a pas de règles de la forme N $\rightarrow \epsilon$ alors c'est aussi suffisant.

Comment calculer le First_1 ?

- Quand le côté droit d'une règle commence par un terminal :

$$\mathsf{N} \to c\alpha \qquad (c \in \Sigma)$$

c'est trivial :

$$\mathrm{First}_1(c\alpha) = \{c\}$$

- Exemple :

$$\begin{aligned} \mathrm{First}_1(\texttt{i}) &= \{\texttt{i}\} \\ \mathrm{First}_1(\texttt{[S+S]}) &= \{\texttt{[}\} \end{aligned}$$

Exemple d'une grammaire qui n'est *pas* LL(1)

- Grammaire $G_1 = (\Sigma, N, S, P)$ où
- $\Sigma = \{\texttt{i}, \texttt{+}, \texttt{*}, \texttt{[}, \texttt{]}\}$
- $N = \{\mathsf{S}\}$
- $S = \mathsf{S}$
- P consiste en les règles suivantes :

$$\mathsf{S} \rightarrow \texttt{i} \tag{3}$$
$$\mathsf{S} \rightarrow \texttt{[}\mathsf{S}\texttt{+}\mathsf{S}\texttt{]} \tag{4}$$
$$\mathsf{S} \rightarrow \texttt{[}\mathsf{S}\texttt{*}\mathsf{S}\texttt{]} \tag{5}$$

- Pourquoi n'est-elle pas LL(1) ?
- Peut-on la transformer en une grammaire LL(1) ?

Transformation en une grammaire LL(1)

- Si une grammaire n'est pas LL(1) c'est souvent qu'on a à choisir entre deux règles, mais on n'a pas encore suffisamment d'informations pour faire ce choix.
- Solution : Retardez le choix !
- par exemple, avec un non-terminal supplémentaire O :

$$S \rightarrow \texttt{i} \tag{6}$$
$$S \rightarrow \texttt{[}\ S\ O\ S\ \texttt{]} \tag{7}$$
$$O \rightarrow \texttt{+} \tag{8}$$
$$O \rightarrow \texttt{*} \tag{9}$$

Implémentation en OCaml

- L'analyseur grammatical (parser) consiste en plusieurs fonctions mutuellement récursives.
- Pour chaque non-terminal N on a une fonction (sans argument) qui essaye de lire une partie du texte d'entrée qui peut être dérivée de N.
  Si c'est possible la fonction envoie le morceau d'arbre de dérivation correspondant, dans le cas contraire elle lève une exception.
- Dans chacque fonction il y a un cas par règle $\mathrm{N} \to \alpha$. Chaque cas commence avec un test si le symbole suivant de l'entrée fait partie de $\mathrm{First}_1(\alpha)$.

Implémentation en OCaml

- Un module pour demander des jetons de l'entrée, avec
  - une fonction `lookahead` pour obtenir un jeton sans avancer dans l'entrée,
  - un fonction `eat` qui consomme un jeton, et qui avance d'un cran dans l'entrée.
- Notre exemple :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \texttt{[}\ S\ \texttt{+}\ S\ \texttt{]} \\ S &\rightarrow \texttt{i} \end{aligned}$$

Axiome : S

Fichier `reader.mli` I

```
(* module for a lookahead(1) reader from standard input*)

exception Error of string

(* a token is a character, or the end-of-file marker *)
type token = Ch of char | EOF

(* string representation of a token *)
val string_of_token: token -> string

(* return the next token, do not advance the read pointer *)
val lookahead : unit -> token

(* [(eat t)] advances the read pointer if the next *)
(* token is t and throws an Error otherwise. *)
val eat : token -> unit
```

Fichier `tree.mli` I

```
(* module of derivation trees *)

(* type of trees. Inner nodes are labeled with strings, *)
(* leaves are labeled with chars. *)
(* Inner nodes may have an arbitrary number of children. *)
type t =
  | Node of string * t list
  | Leaf of char

(* print tree to stdout *)
val print: t -> unit
```

Fichier parser.ml I

```
open Tree
open Reader

exception Error of string

let rec parse_S () =
  match lookahead () with
  | Ch 'i' -> begin (* S -> i *)
      eat (Ch 'i');
      Node("S",[Leaf 'i'])
    end
  | Ch '[' -> begin (* S -> [S+S] *)
      eat (Ch '[');
      let x1 = parse_S () in
      eat (Ch '+');
      let x2 = parse_S () in
      eat (Ch ']');
      Node("S",[Leaf '[';x1;Leaf '+'; x2; Leaf ']'])
```

Fichier parser.ml II

```
    end
  | t -> raise (Error (Printf.sprintf
                         "parsing S: unexpected %s"
                         (Reader.string_of_token t)))

let parse () = parse_S ()
```

Ce qui reste à faire

- Comment calculer le First_1 quand une règle commence par un non-terminal ?
- Est-il utile d'admettre des règles $N \to \epsilon$?
- Si oui, comment faire pour les traiter dans une analyse LL(1) ?