

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE
U.F.R. Sciences

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE l'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE
Spécialité : Mathématiques

par

Thomas Seiller

Logique dans le facteur hyperfini Géométrie de l'interaction et Complexité

Thèse dirigée par Jean-Yves Girard et Laurent Régnier

Soutenue le 13 Novembre 2012

JURY

Pierre-Louis	CURIEN	Rapporteur
Martin	HYLAND	Rapporteur
Olivier	LAURENT	Examineur
Philip	SCOTT	Examineur
Jean-Yves	GIRARD	Directeur de thèse
Laurent	RÉGNIER	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à remercier Jean-Yves Girard et Laurent Regnier pour avoir accepté de diriger cette thèse. J'aurai appris de Jean-Yves l'importance de se poser les bonnes questions, d'avoir une réflexion sur notre domaine et notre recherche, c'est-à-dire à faire de la recherche et non simplement des mathématiques. Je retiendrai de Laurent l'énergie débordante et la passion avec laquelle il aborde toute question et partage ses réflexions et connaissances, ainsi que sa grande disponibilité. J'espère que je réussirai à m'inspirer de lui pour toujours garder ne serais-ce qu'un dixième de son enthousiasme. Je les remercie également tous deux pour la grande liberté qu'il m'ont accordé dans ma recherche.

Je souhaite également remercier Pierre-Louis Curien et Martin Hyland qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, malgré sa longueur et le peu de temps qu'ils avaient pour mener cette tâche à bien. De nombreuses suggestions de Pierre-Louis ont largement contribué à rendre ce texte plus lisible.

Je remercie Olivier Laurent et Philip Scott qui ont accepté de faire partie de mon jury. Je les remercie également tous deux des discussions que nous avons pu avoir sur mon travail.

Je remercie également Laurent Regnier, Bernard Illig et mon père qui ont accepté de relire une première version de ce manuscrit truffée de fautes d'orthographe.

Je tiens ensuite à remercier toute l'équipe « Logique de la Programmation », et plus généralement à l'ensemble du personnel de l'IML, pour la bonne humeur et l'enthousiasme qui règne au deuxième étage de l'IML, et pour leur accueil chaleureux lors de mes trois premières années de thèse : Myriam Quatrini, Yves Lafont, (Em)Manu(el) Beffara, Lionel Vaux, et bien sûr Laurent et Jean-Yves, auxquels il faut ajouter les doctorants qui ont été ou sont encore là : Marc de Falco, Etienne Duchesne, Pierre Rannou, Jean-Baptiste Midez, Michele Alberti, Marc Bagnol.

Je remercie également l'équipe « Logique, Informatique et Mathématiques Discrètes » du LAMA, le Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Savoie, qui m'ont accueilli lors de ma dernière année de thèse (et une année de postdoc qui s'amorce) : Tom Hirschowitz, Pierre Hyvernat, Christophe Raffali, Guillaume Theyssier, Krzysztof Worytkiewicz, et les doctorants : Florian Hatat, Matthieu Simonet, Pierre-Etienne Meunier.

Je remercie aussi l'ensemble des personnes qui ont pris part au groupe de travail sur la géométrie de l'interaction, devenu le projet ANR Logoi. Je remercie plus particulièrement Claudia Faggian, Damiano Mazza, Christophe Fouqueré, Alexis Saurin, qui m'ont beaucoup aidé au travers de nombreuses discussions.

Je remercie également Jean-Baptiste Joinet et Claudia Faggian qui m'ont encadré lors de mes stages de Master 1 et Master 2 respectivement, stages sans lesquels je n'aurai probablement jamais commencé cette thèse.

Je remercie aussi l'ensemble des doctorants (principalement parisiens) avec lesquels nous avons pu mener à bien le projet « Vérité et Preuve ». Qu'ils soient philosophes, informaticiens, linguistes, mathématiciens ou autres, les discussions que nous avons eues m'ont beaucoup apporté : Alberto Naibo, Mattia Petrolo, Clément Aubert, Giulio Guerrieri, Andrei Dorman, Jean-Baptiste Midez, Sylvain Cabanacq, et tous ceux que j'oublie de citer.

Je remercie ma famille pour leur soutien et leur présence : mes grand-parents, mes parents, mes frères et soeurs Anne, Nicolas, (Marie-)Sophie et Marie ; mes neveux (dans l'ordre d'apparition) Amélie, Aude, Lison, Florian, Antoine, Lucien, Pierre, Manon et Élise ; bien entendu mes oncles, tantes, et cousins dont la multitude m'empêche de les citer individuellement.

Enfin, *last but not least*, je remercie Johanna pour son soutien de tous les jours. Elle m'a prêté sa confiance inébranlable lorsque la mienne me faisait défaut. Elle m'a suivi à travers la France. Pour cela et pour tout le reste, merci.

Table des matières

I	Introduction et Préliminaires	7
1	Introduction	9
2	Logique Linéaire	17
2.1	Logique Classique	18
2.2	Logique Linéaire	21
2.3	Quelques remarques sur les réseaux multiplicatifs	24
2.4	Preuves comme Permutations	27
3	Algèbres d'Opérateurs	33
3.1	Espaces de Hilbert et Opérateurs	34
3.2	Algèbres stellaires	41
3.3	Algèbres de von Neumann	53
4	Géométrie de l'Interaction	65
4.1	Les premières géométries de l'interaction	66
4.2	Géométrie de l'interaction hyperfinie	71
4.A	GdI5.1	82
II	Graphes d'Interaction	85
5	Adjonctions géométriques	87
5.1	Définitions sur les graphes	88
5.2	Adjonctions Géométriques	93
5.3	Graphes tranchés, graphes épais	102
5.4	Conclusion et Notations	115
6	Fragment Multiplicatif	117
6.1	Les multiplicatifs	118
6.2	Sémantique Dénotationnelle	121
6.3	Vérité	125
7	Fragment Multiplicatif-Additif	131
7.1	Géométrie de l'interaction	132
7.2	Sémantique dénotationnelle	141
7.3	Vérité et Adéquation	145
8	Exponentielles	153
8.1	Changement de tranches et contraction	154
8.2	Graphages	158
8.3	Géométrie de l'interaction	173
8.4	Adéquation	186
8.5	Contraction, Conduites polarisées et ELL_{pol}	191

III Géométrie de l'Interaction dans le Facteur Hyperfini	201
9 Circuits et Opérateurs	203
9.1 Circuits et Déterminant	204
9.2 Graphes d'interaction et premières GdI	213
9.3 Graphes d'interaction et GdI hyperfinie	214
9.A Graphages et GdI	221
10 Vérité Subjective	225
10.1 Vérité Subjective	226
10.2 MASAs et Vérité Subjective dans le type II	227
10.3 Vérité Subjective en GdI5.1 et GdI5.2	245
11 Entiers Logspace	249
11.1 Représentation des entiers	250
11.2 Paires normatives	259
11.3 Caractérisation de co-NL	261
12 Conclusion et Perspectives	273
12.1 Graphes, Graphages et GdI	274
12.2 Complexité	275
12.3 Topologie Algébrique de l'Interaction	277
Bibliographie	279

Première partie

Introduction et Préliminaires

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

- §1.1 Historiquement, la logique est la science du raisonnement. C'est au début du 20^e siècle que celle-ci s'est imposée pour la formalisation des mathématiques — on parle dans ce cas de *logique mathématique*. Traditionnellement, la logique mathématique consiste en deux entités : d'un côté la syntaxe qui décrit la manière de construire les formules mathématiques et leurs preuves — la description du monde (mathématique), de l'autre la sémantique qui étudie les *modèles* d'une théorie — le monde, ou les structures mathématiques. La syntaxe est en quelque sorte affaire de vérité, ou plutôt de prouvabilité : usuellement les règles de construction de la syntaxe empêchent l'écriture de preuves incorrectes, on étudie alors les formules prouvables à partir d'un ensemble donné d'axiomes (une théorie). D'un autre côté, les modèles sont affaire de réfutation : ainsi, pour montrer qu'une formule A n'est pas conséquence d'une théorie, on construira un modèle de cette théorie dans lequel la formule A n'est pas satisfaite. Ces deux faces de la logique sont mises en dualité par le théorème de *complétude* : une formule A est dérivable dans une théorie si et seulement si elle est satisfaite dans tous les modèles.
- §1.2 La théorie de la démonstration, l'étude des systèmes de dérivation, se trouve donc appartenir à l'axe syntaxique. De nombreux systèmes de dérivations ont été développés pour les logiques classique et intuitionniste. À première vue, la règle la plus importante d'un système de dérivation est le *modus ponens*, généralisée en règle de coupure, qui permet, à partir d'une preuve de A et d'une preuve de $A \Rightarrow B$, de déduire une preuve de la formule B . Cette règle semble essentielle : c'est la règle qui permet l'utilisation de lemmes. Cependant, l'un des résultats fondamentaux en théorie de la démonstration, le *Hauptsatz* (« théorème fondamental ») prouvé par Gentzen [Gen64], affirme que la règle de coupure est redondante : s'il existe une dérivation d'une formule B , alors il existe une dérivation de B n'utilisant pas la règle de coupure. Si ce résultat est important en lui-même, il devient réellement fondamental après la découverte de la *correspondance de Curry-Howard*.

La correspondance de Curry-Howard

- §1.3 Au moment où certains étudiaient les axiomatiques des mathématiques, Church proposa une axiomatique pour la théorie des fonctions : le λ -calcul [Chu41]. Il s'avère que le λ -calcul permet de représenter toutes les fonctions calculables, et présente donc une approche alternative aux *machines de Turing* [Tur37] pour la théorie de la calculabilité. Dans cette théorie, le calcul est représenté par la règle de β -réduction : si t représente une fonction et u un argument, alors l'application $(t)u$ se *réduit* — ou se β -réduit — en un terme r représentant le résultat du calcul de la fonction représentée par t lorsqu'on lui donne l'argument représenté par le terme u . La correspondance de Curry-Howard [Cur34, How80] relie la procédure d'élimination des coupures en déduction naturelle — l'un des systèmes de déduction — pour la logique intuitionniste et la β -réduction en λ -calcul. En d'autres termes, elle établit une correspondance entre l'exécution d'un programme et l'élimination des détours dans les preuves. Ainsi, il est

possible d'étudier les programmes par le biais des systèmes de déduction, et particulièrement de leur *dynamique* — leur procédure d'élimination des coupures.

- §1.4 En logiques classique et intuitionniste, l'implication $A \Rightarrow B$ peut être comprise comme une fonction qui, à tout élément de type A , associe un élément de type B . Cette intuition est renforcée par la correspondance de Curry-Howard puisqu'un terme représentant une fonction des entiers $\mathbf{N}$ dans les entiers correspondra à une preuve de la formule $\text{Nat} \Rightarrow \text{Nat}$ (Nat représente le type des entiers naturels). En étudiant les modèles du λ -calcul [Gir88a], Girard a découvert que l'implication classique $\Rightarrow$ se décomposait naturellement en deux opérations indépendantes. La première de ces opérations, l'exponentiation — ou la pérennisation, consiste à rendre disponible un nombre arbitraire de copies de A , tandis que la seconde, l'implication linéaire — notée $\multimap$, est l'opération qui à A associe B , consommant A au passage, comme une machine effectuant une transformation. Girard introduit donc dans les années 80 [Gir87a] un raffinement de la logique classique tenant compte de cette observation : la logique linéaire (LL). La logique linéaire est sensible aux ressources et est donc particulièrement adaptée à l'étude des programmes. Ainsi, une preuve de $\text{Nat} \multimap \text{Nat}$ est une fonction des entiers dans les entiers qui utilise exactement une fois son argument, c'est-à-dire une fonction linéaire. La réutilisation des ressources étant gérée par les connecteurs exponentiels, on peut alors modifier les règles régissant ceux-ci afin d'obtenir des logiques *allégées*, parmi lesquelles la logique linéaire bornée (BLL) de Girard, Scedrov et Scott [GSS92], les logiques linéaires élémentaire (ELL) et light (LLL) introduites par Girard [Gir95b], ou encore la logique linéaire « douce » (Soft Linear Logic, SLL) de Lafont [Laf04]. Ces systèmes sont intéressants en cela qu'ils permettent de représenter des fonctions dont la complexité est bornée.
- §1.5 Avec la logique linéaire, Girard a introduit deux systèmes de déduction permettant de représenter les preuves : un calcul des séquents et une sorte de déduction naturelle multi-conclusion : les structures de preuve. Les structures de preuves ont une particularité intéressante par rapport aux syntaxes traditionnelles : la grammaire permettant de les construire n'est pas assez restrictive et il est donc possible d'écrire des structures ne correspondant pas à des preuves en calcul des séquents. Certaines structures de preuves correspondent donc à des preuves erronées. Il faut alors caractériser les structures *séquentialisables* — qui correspondent à une dérivation en calcul des séquents — de celles qui ne le sont pas. De nombreuses caractérisations ont été obtenues depuis l'introduction de la logique linéaire sous le nom de *critères de correction*. Cette particularité est le point de départ du projet de la *géométrie de l'interaction* : la reconstruction de la logique à partir des preuves et leur dynamique — l'élimination des coupures. En effet, l'extension de la syntaxe permet d'ajouter une saveur sémantique à celle-ci dans le sens où les objets syntaxiques ajoutés — qui ne sont pas des preuves — jouent en quelque sorte le rôle de contre-modèles.

La géométrie de l'interaction

- §1.6 La géométrie de l'interaction (GdI) est au départ une représentation des preuves de la logique linéaire fondée sur une étude en profondeur des réseaux. Une preuve n'est plus un morphisme de A dans B — une fonction de A dans B , mais un opérateur agissant sur l'espace $A \oplus B$. Ainsi, la composition, qui représente généralement le modus ponens, n'est plus de mise et l'opération permettant d'obtenir un élément de B à partir d'un élément de A consiste à résoudre une équation : l'*équation de rétroaction*. La géométrie de l'interaction pourrait donc être comprise comme une sémantique opérationnelle en cela qu'elle représente les preuves par des opérateurs agissant sur les formules — ou leur lieux — et non par de simples fonctions.
- §1.7 Cependant, le programme de la géométrie de l'interaction est plus ambitieux : on ne cherche pas uniquement à représenter les preuves, mais à reconstruire la logique à partir de celles-ci. Ainsi, les objets de la géométrie de l'interaction sont des *épreuves* — ou *parapreuves*, c'est-à-dire une généralisation des preuves. Cette généralisation permet d'envisager une reconstruction de la logique reposant sur l'interaction entre épreuves, offrant ainsi une vision plus homogène que la traditionnelle opposition preuves et contre-modèles. Ce n'est donc ni une sémantique — car trop syntaxique, ni une syntaxe — car trop sémantique. Il s'agit d'un entre deux,

d'une syntaxe discursive, où les épreuves — une généralisation des preuves — s'opposent, se disputent, chacune essayant de convaincre l'autre de ce qu'elle a à prouver. La discussion se termine lorsqu'un consensus est trouvé, c'est-à-dire lorsque l'une d'elles abandonne. Ainsi, les épreuves s'opposent au travers d'une notion d'exécution qui définit la solution à l'équation de rétroaction et généralise donc la procédure d'élimination des coupures. Deux épreuves sont alors dites *orthogonales* lorsque la discussion termine. De cette notion d'orthogonalité se dessinent les formules — ou les types — qui sont définis comme les ensembles d'épreuves clos par bi-orthogonal, une construction classique de réalisabilité.

- §1.8 Une fois les formules définies, on peut alors reconstruire les connecteurs en partant d'une définition de « bas niveau » — entre les épreuves — pour en arriver à une définition de « haut niveau » — entre les types. Ainsi, les connecteurs ne sont pas définis de manière ad-hoc, mais leur définition est une conséquence de leur contenu calculatoire : on définit l'action d'un connecteur sur les épreuves, et les connecteurs — au niveau des formules — ne sont que le reflet de l'effet de l'interaction entre la notion d'exécution et cette définition de bas niveau. On obtient ainsi une interprétation des formules de la logique linéaire — ou d'un fragment de celle-ci dans certains cas. On peut de plus caractériser les épreuves, dites gagnantes, qui correspondent intuitivement aux preuves. Cette définition induit une notion de vérité au niveau des formules : une formule est vraie lorsqu'elle contient une épreuve gagnante.
- §1.9 Au fil des ans, de nombreuses constructions réalisant ce programme ont été proposées par Girard. Dans chacune de ces constructions, les épreuves sont définies comme des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert. Dans les premières versions [Gir89a, Gir88b, Gir95a], les épreuves étaient des isométries partielles appartenant à une algèbre stellaire fixée. L'exécution entre épreuves était alors définie par la « formule d'exécution », formule impliquant l'inversion d'un opérateur. La construction était alors basée sur l'opposition entre épreuves : A et B sont orthogonales si et seulement si AB est nilpotent (resp. faiblement nilpotent), assurant que l'inversion de l'opérateur $1 - AB$ soit possible¹.
- §1.10 Dans la dernière version en date, la *géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini* introduite dans l'article *Geometry of Interaction V : Logic in The Hyperfinite Factor* [Gir11a], les épreuves sont les opérateurs hermitiens de norme au plus 1 dans une algèbre de von Neumann particulière : le facteur hyperfini $\mathfrak{R}$ de type² II_1 . Girard ayant donné une solution générale à l'équation de rétroaction [Gir06], l'exécution entre épreuves est toujours définie. L'orthogonalité entre épreuves est dans ce cas définie au travers du déterminant de Fuglede-Kadison [FK52], une généralisation du déterminant aux facteurs de type II_1 . Cette construction permet de reconstruire les connecteurs de la logique linéaire sur cette base, à ceci près que la restriction à cette algèbre de type II_1 contraint les exponentielles : on obtient une construction de la Logique Linéaire Élémentaire, une logique avec exponentielles bornées.

Contenu de la thèse

- §1.11 Dans le but de mieux comprendre les constructions de la géométrie de l'interaction, nous avons commencé par étudier une généralisation de la construction de l'article *multiplicatives* [Gir87b], en choisissant de travailler dans un cadre où les épreuves sont des graphes orientés pondérés. Dans ce cadre, nous avons découvert que la mesure de l'interaction entre épreuves définie par le déterminant de Fuglede-Kadison dans la GdI5 correspondait à une certaine mesure des cycles alternant entre deux graphes. Ainsi, nous avons montré comment l'adjonction — la propriété fondamentale sur laquelle est fondée la construction des connecteurs multiplicatifs — utilisée par Girard correspond à une propriété sur les ensembles de cycles alternants entre plusieurs graphes, ce qui nous a permis de développer une version combinatoire de la GdI5.

1. Dans le cas faiblement nilpotent, l'inversion de $1 - AB$ n'est pas nécessairement possible, mais on peut toujours définir la solution de l'équation de rétroaction.

2. En réalité, les opérateurs u considérés sont des éléments du facteur hyperfini $\mathfrak{R}_{0,1}$ de type II_∞ , mais tels qu'il existe une projection finie p satisfaisant $u \in p\mathfrak{R}_{0,1}p$. Ce sont donc des éléments d'un sous-facteur de type II_1 du facteur $\mathfrak{R}_{0,1}$.

- §1.12 Cependant, la propriété sur les cycles — l’adjonction — ainsi obtenue est en réalité une conséquence d’une identité géométrique plus générale qui ne dépend pas de la fonction de mesure choisie. Nous avons alors essayé d’abstraire les constructions de la GdI5, traitant par exemple le cas des *tranches* (correspondant à la notion d’idiome commutatif de GdI5) de manière purement combinatoire avec des sommes formelles. Ainsi, on obtient une construction de GdI pour la logique linéaire multiplicative additive paramétrée par une fonction de mesure, qui repose sur cette seule propriété géométrique que l’on nomme *propriété cyclique*. Cette propriété assure à la fois la bonne définition des connecteurs multiplicatifs et le fait que l’on puisse définir une sémantique catégorique pour MALL. On montre ensuite que les constructions diverses proposées par Girard correspondent à deux choix particuliers de paramètres, montrant ainsi que ces différentes GdI reposent sur une même propriété géométrique traitant des cycles.
- §1.13 On a ensuite généralisé le cadre des graphes afin de définir des connecteurs exponentiels ; ces graphes généralisés sont appelés *graphages*. Cette généralisation repose sur le passage au continu : on remplace les sommets des graphes par des boréliens de la droite réelle et les arêtes par des transformations préservant la mesure de Lebesgue. La propriété cyclique qui est vérifiée dans ce cadre est une conséquence directe de celle des graphes. On montre alors que l’on peut interpréter une version polarisée de la Logique Linéaire Élémentaire. Cette généralisation permet d’obtenir également une construction des quantificateurs du second ordre.
- §1.14 On étudie ensuite la notion de vérité subjective de la GdI5. Girard définit en effet la notion d’épreuve *gagnante* qui correspondrait en sémantiques de jeux à la notion de stratégie gagnante. Cela lui permet de définir une notion de vérité : un type est vrai lorsqu’il contient une épreuve gagnante. Le but originel de l’étude de cette notion était d’obtenir un résultat d’adéquation forte, c’est-à-dire que l’on souhaite montrer qu’il est possible d’interpréter les formules de la logique linéaire par des types et les preuves par des épreuves dans la GdI5 de façon à ce que la notion de prouvabilité (en logique linéaire) et celle de vérité (en GdI5) soient compatibles : si π est une preuve d’une formule A , alors l’interprétation de π sera une épreuve gagnante dans l’interprétation de A . À la différence de la Ludique, la notion d’épreuve gagnante dépend ici du choix d’une représentation du facteur hyperfini de type Π_∞ , c’est donc une notion subjective de vérité que l’on obtient. Afin de mieux comprendre cette notion, on introduit dans un premier temps une version légèrement modifiée de la GdI5 où la vérité dépend d’une sous-algèbre commutative maximale. Ceci permet d’utiliser la classification de Dixmier [Dix54], ainsi que l’invariant de Pukansky [Puk60] pour montrer une correspondance entre le fragment de la logique linéaire qu’il est possible d’interpréter selon une sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{P}$ et le type de $\mathfrak{P}$ (régulière, semi-régulière, singulière) dans la classification de Dixmier. On montre ensuite en quelle mesure cette notion modifiée de vérité correspond à celle de la GdI5.
- §1.15 Enfin, on présente le résultat d’un travail sur l’article *Normativity in Logic* de Girard [Gir11c]. Dans ce dernier Girard propose une caractérisation de la classe de complexité co-NL (le complémentaire de la classe des ensembles reconnaissable par une machine de Turing non-déterministe en espace logarithmique) basée sur la représentation des entiers en GdI5. On présente ici le résultat de Girard, explicitant la démonstration du fait que tout ensemble dans co-NL peut être représenté en montrant comment coder un ensemble co-NL complet. Le codage de ce problème est fait via l’introduction de la notion de *machines à pointeurs non déterministes*, qui s’avèrent être une caractérisation nouvelle de co-NL en terme de machines abstraites. On propose également une légère modification de la construction permettant d’envisager la caractérisation d’autres classes de complexité en utilisant une approche similaire.

La propriété cyclique.

- §1.16 Partant de la première version de la géométrie de l’interaction (GdI) où les épreuves sont des permutations, nous développons dans un premier temps une construction où les épreuves sont des graphes orientés pondérés. L’opération principale de notre construction, l’exécution de

deux graphes F et G , consiste à considérer l'ensemble des chemins (suites d'arêtes) alternant entre F et G — une arête de F ne peut être suivie que d'une arête de G et inversement.

- §1.17 Nous considérons alors les ensembles de cycles alternés apparaissant entre deux graphes donnés, et prouvons une propriété décrivant l'évolution de ces ensembles de cycles lors de l'opération d'exécution. Nous verrons dans les chapitres suivants que cette propriété — que nous nommons la *propriété cyclique*, est un résultat fondamental. Nous développons dans le chapitre 5 quatre notions d'exécution, chacune associée à une notion de cycle, pour lesquelles nous montrons que la propriété cyclique est satisfaite.
- §1.18 Dans un deuxième temps, nous définissons les graphes *tranchés*, les graphes *épais* et les graphes *épais tranchés*. Ces trois généralisations des graphes correspondent à l'introduction des *idiomes* — des algèbres de von Neumann finies — dans la GdI5. Les idiomes sont une notion utilisée par Girard dans le cadre de la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini [Gir11a] permettant de définir les connecteurs additifs et les exponentielles. La correspondance entre nos généralisation des graphes et les idiomes peut être décrite plus précisément ainsi : les graphes tranchés correspondent à l'introduction d'idiomes commutatifs, les graphes épais correspondent à l'introduction des idiomes purement non-commutatifs (cas où l'idiome est un facteur), et les graphes épais tranchés correspondent au cas général. Nous expliquons comment la propriété cyclique sur les graphes induit une propriété similaire pour chacune de ces généralisations.

Adjonctions à trois termes et Logique Linéaire Multiplicative-Additive

- §1.19 L'une des conséquences de la propriété cyclique est une adjonction géométrique à trois termes reliant l'exécution avec l'union de graphes disjoints — opération qui représente le tenseur de la logique linéaire $\otimes$ dans le modèle que nous définissons. Nous pouvons alors, pour tout choix d'une *fonction de quantification des circuits*, déduire une adjonction numérique à trois termes. Cette adjonction, qui relie l'exécution à l'union disjointe, est le fondement sur lequel repose l'interprétation des connecteurs multiplicatifs.
- §1.20 Dans le chapitre 6, nous montrons donc comment une telle adjonction à trois termes, dans le cadre des graphes orientés pondérés et celui des graphes épais, permet de construire une géométrie de l'interaction pour la logique linéaire multiplicative (MLL) avec la règle MIX. Nous déduisons de cette construction une famille, indexée par l'ensemble des fonctions de quantification des circuits, de modèles catégoriques de MLL+MIX. Il est de plus possible de définir une notion de vérité ; on montre alors un théorème d'adéquation forte pour le calcul des séquents de MLL+MIX avec unités.
- §1.21 Dans le chapitre 7, on décrira la construction additive dans notre modèle permise par l'introduction de *tranches*. Ainsi, dans le cadre des graphes tranchés ou des graphes épais tranchés il est possible de définir les connecteurs multiplicatifs et additifs de la logique linéaire avec leurs unités. Cette géométrie de l'interaction restreinte aux connecteurs multiplicatifs permet d'obtenir, comme dans le Chapitre 6, une famille de modèles catégoriques de MLL (catégories **-autonomes*). Comme c'est le cas dans toutes les GdI traitant des connecteurs additifs, le connecteur $\&$ ne définit pas un produit catégorique du fait du caractère local de l'exécution. Cependant, il est possible de définir une notion d'*équivalence observationnelle* et de montrer les résultats suivants, qui sont tous des corollaires de la propriété cyclique :
- Le connecteur $\&$ est un produit *modulo* l'équivalence observationnelle ;
 - L'équivalence observationnelle est une *congruence* : il est donc possible de quotienter la catégorie **-autonome* obtenue à partir des constructions multiplicatives ;
 - La catégorie quotient hérite de la structure **-autonome*.

On en déduit donc un modèle catégorique de MALL avec les unités additives dans lequel les règles d'affaiblissement et de MIX ne sont pas satisfaites. De plus, ce modèle est obtenu comme une sous-catégorie pleine d'une catégorie **-autonome*, c'est-à-dire un modèle de MLL avec les unités multiplicatives.

Exponentielles et Second Ordre

- §1.22 Dans le chapitre 8, on expliquera comment utiliser la possible non-commutativité de l’idiome pour définir la contraction et on en déduira la morphologie nécessaire des types exponentiels. Cette discussion permet de justifier la définition de la *pérennisation* — l’exponentiation — qui est une opération transformant un graphe épais en un graphe sans tranches. Afin d’obtenir un cadre permettant la définition d’une pérennisation intéressante — c’est-à-dire permettant d’interpréter la règle de promotion usuelle —, on développe ensuite une généralisation des graphes : les graphages sur un espace mesuré. Cette généralisation des graphes consiste à considérer des graphes dont les sommets sont des ensembles mesurables et dont les arêtes sont des bijections préservant la mesure entre le sommet source et le sommet but. On définit dans ce cadre les notions d’exécution et de cycles correspondant aux diverses constructions sur les graphes introduites dans le Chapitre 5. Ces notions satisfont, pour tout choix d’une *fonction de quantification des circuits*, la propriété cyclique.
- §1.23 On se restreint alors à une notion d’exécution particulière et la notion de cycle correspondante et on considère les graphages dont les sommets sont des parties mesurables de la droite réelle. On montre dans ce cas comment définir une famille de fonctions de quantification des circuits. Étant donné que la propriété cyclique est satisfaite, on peut alors suivre les constructions des chapitres précédents et définir une famille de modèles de la logique linéaire multiplicative additive. De plus, le passage des graphes aux graphages, c’est-à-dire le passage d’objets discrets à des objets continus, nous permet de définir des connecteurs exponentiels. On définit alors une version polarisée de la logique linéaire élémentaire pour laquelle on montre un résultat d’adéquation forte. On montre également que cette généralisation permet de définir les quantificateurs du second ordre.

La géométrie de l’interaction hyperfinie

- §1.24 Les chapitres suivants sont consacrés à des résultats liés à la GdI5. Dans un premier temps, on étudie les constructions sur les graphes des chapitres précédents pour deux fonctions particulières de quantification des cycles. On montre que les constructions obtenues sont des versions combinatoires de celles définies par Girard. En effet, la première valeur du paramètre définit une géométrie de l’interaction construite autour de la notion de nilpotence, et correspond à une version légèrement raffinée des anciennes constructions de Girard [Gir89a, Gir88b, Gir95a]. La deuxième valeur du paramètre définit une géométrie de l’interaction construite autour du déterminant. On montre alors comment associer un opérateur dans le facteur hyperfini³ de type II_∞ à un graphe de manière à préserver les opérations logiques : les graphes d’interaction sont donc une version combinatoire de la géométrie de l’interaction dans le facteur hyperfini [Gir11a], et permettent de comprendre le déterminant comme une manière de mesurer des cycles.
- §1.25 Ce résultat montre en particulier que les adjonctions sur lesquelles sont fondées ces différentes versions de la GdI sont toutes deux conséquences d’une même propriété géométrique portant sur les ensembles de cycles : la propriété cyclique. Ceci permet donc de mettre en lumière les similarités et les différences de ces deux constructions — celles fondées sur la notion de nilpotence et celle utilisant le déterminant.
- §1.26 On s’intéressera ensuite à la notion de vérité subjective introduite avec la GdI5. En effet, la notion de gain — et par conséquent celle de vérité — définie dans la construction de Girard dépend du choix d’une représentation du facteur hyperfini $\mathfrak{H}_{0,1}$ de type II_∞ . Après avoir expliqué la raison d’être de cette notion subjective de vérité, nous expliciterons une version légèrement modifiée de la GdI5 dans laquelle la vérité subjective dépend du choix d’une sous-algèbre maximale commutative de $\mathfrak{H}_{0,1}$. Dans ce cadre, on montre qu’il existe une correspondance entre le fragment de la logique linéaire que l’on peut interpréter selon un point de vue $\mathfrak{P}$ — une sous-algèbre maximale commutative du facteur $\mathfrak{H}_{0,1}$, et une classification

3. Les opérateurs associés sont en réalité définis comme les éléments d’un sous-facteur de type II_1 du facteur $\mathfrak{H}_{0,1}$, en accord avec les définitions de la GdI5.

des sous-algèbres maximales commutatives définie par Dixmier [Dix54] dans les années 60. On explicitera ensuite la relation entre les deux notions de vérité subjective — celle dépendant du choix d’une représentation et celle dépendant du choix d’une sous-algèbre maximale commutative — afin de mieux comprendre la notion de vérité subjective de la GdI5.

Complexité

- §1.27 Le dernier chapitre est dédié à une relecture de la caractérisation de co-NL proposée par Girard [Gir11c]. On présente donc en détail la représentation des entiers et la notion de paire normative. Après cela, on explique comment le remplacement de la condition exprimée par le déterminant par une condition de nilpotence permet d’envisager plus aisément la caractérisation d’autres classes de complexité en utilisant une approche similaire. On présente enfin le résultat de Girard en proposant une preuve alternative du fait que tout problème co-NL peut être représenté dans ce cadre. La preuve proposée consiste à montrer comment coder le complémentaire du problème NL-complet ST-conn consistant à décider s’il existe un chemin entre deux points donnés dans un graphe orienté.

CHAPITRE 2

LOGIQUE LINÉAIRE

Table des matières

2.1	Logique Classique	18
2.2	Logique Linéaire	21
2.3	Quelques remarques sur les réseaux multiplicatifs	24
2.3.1	Définition	24
2.3.2	Élimination des coupures	25
2.4	Preuves comme Permutations	27
2.4.1	Orthogonalité	28

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash \Gamma, F, \neg F} \text{Ax}^{\text{add}} \\
\frac{}{\vdash F, \neg F} \text{Ax}^{\text{mult}} \\
\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B} \wedge^{\text{add}} \\
\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \wedge B} \wedge^{\text{mult}} \\
\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A} \text{weak} \\
\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall X A} \forall^1 \\
\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, \neg A}{\vdash \Gamma} \text{Cut}^{\text{add}} \\
\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, \neg A}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{Cut}^{\text{mult}} \\
\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee^{\text{mult}} \\
\frac{\vdash \Gamma, A_i}{\vdash \Gamma, A_1 \vee A_2} \vee_i^{\text{add}} \\
\frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A} \text{ctr} \\
\frac{\vdash \Gamma, A[B/X]}{\vdash \Gamma, \exists X A} \exists
\end{array}$$

FIGURE 2.1 – Règles de LK

2.1 Logique Classique

§2.1.1 Cette section présente simplement une reformulation de la démonstration syntaxique de complétude du calcul propositionnel classique. Cette reformulation a l'avantage de contenir un certain nombre d'idées que l'on retrouvera par la suite. Celle-ci est donc l'occasion pour le lecteur qui n'est pas familier avec la géométrie de l'interaction ou la ludique de gagner quelques intuitions tout en restant dans un cadre plus « classique ».

Logique Classique

§2.1.2 DÉFINITION.

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de variables. Les formules de la logique classique sont définies par la grammaire suivante :

$$F := X \mid \neg F \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid \forall X F \mid \exists X F \quad (X \in \mathcal{V})$$

§2.1.3 On présentera ici uniquement le calcul des séquents monolatéral. Celui-ci est suffisant car la négation d'une formule est toujours équivalente logiquement à une formule où seules les variables sont niées. En effet, on peut quotienter l'ensemble des formules par les lois de De Morgan qui permettent de *repousser* la négation aux sous-formules.

§2.1.4 DÉFINITION.

Un *séquent* $\vdash A_1, \dots, A_n$ est un multi-ensemble de formules $A_1, \dots, A_n$.

§2.1.5 Il faut comprendre un séquent $\vdash A_1, \dots, A_n$ comme l'affirmation que l'une des formules parmi $A_1, \dots, A_n$ est vraie.

§2.1.6 DÉFINITION.

Une preuve d'un séquent $\vdash \Gamma$ en logique classique (dans le système LK) est une dérivation construite à partir des règles de la Figure 2.1 et de conclusion $\vdash \Gamma$, c'est-à-dire un arbre construit à partir des règles de la Figure 2.1 dont la racine est le séquent $\vdash \Gamma$ et dont les feuilles sont des règles axiomes.

Preuve syntaxique de complétude pour LK propositionnel

§2.1.7 Il semble que la première preuve syntaxique de complétude soit due à Schutte [Sch77]. On présente ici une reformulation de ce résultat en empruntant quelques notations de ludique. Ceci permet de mettre en avant le fait que l'extension de la syntaxe — en l'occurrence l'extension de la règle axiome — permet de donner une saveur sémantique à celle-ci. Ainsi, le

1. La variable X n'est pas libre dans Γ .

$$\frac{}{\vdash \Gamma, X, \neg X} \text{ ax } (X \in \mathcal{A}) \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B} \wedge$$

FIGURE 2.2 – Les règles de pLK_R

$$\frac{}{\vdash \Gamma} \boxtimes^2 \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B} \wedge$$

FIGURE 2.3 – Les règles de $pLK_R^{\boxtimes}$

calcul que nous allons définir est incohérent au sens strict du terme puisqu'il permet de dériver n'importe quel séquent. Cependant, il est possible de caractériser certaines dérivations, les dérivations *correctes*, qui correspondent aux preuves du calcul des séquents usuel de la logique classique. Cette caractérisation se fait uniquement sur la base des axiomes généralisés que nous avons introduits. On peut alors montrer qu'un séquent est prouvable si et seulement si il est conclusion d'une dérivation correcte. La preuve de ce résultat permet de comprendre comment les axiomes incorrects jouent le rôle de contre-modèles.

§2.1.8 DÉFINITION (FORMULES).

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de variables propositionnelles. On définit l'ensemble — noté Form — des formules par la grammaire suivante :

$$F := X \mid \neg X \mid F \vee F \mid F \wedge F \quad (X \in \mathcal{A})$$

§2.1.9 DÉFINITION.

Le système pLK_R est défini par les règles de la Figure 2.2.

§2.1.10 DÉFINITION.

Le système $pLK_R^{\boxtimes}$ est défini par les règles de la Figure 2.3.

§2.1.11 PROPOSITION (INVERSIBILITÉ).

Les règles $\vee$ et $\wedge$ sont inversibles dans le système $pLK_R^{\boxtimes}$.

Démonstration. La preuve se fait par induction sur le nombre de connecteurs dans le séquent conclusion. Les deux preuves (pour $\vee$ et $\wedge$) étant similaires, on montre uniquement l'inversibilité du $\vee$. Le cas de base pour l'induction est un séquent ne contenant qu'un seul connecteur, c'est-à-dire une règle $\boxtimes$ suivie d'une règle $\vee$. Dans ce cas, la règle $\boxtimes$ seule nous donne une dérivation de la prémisse de la règle $\vee$. On suppose maintenant que la propriété est vraie pour tout séquent contenant au plus n connecteurs, et on considère un séquent $\vdash \Gamma, A \vee B$ contenant $n+1$ connecteurs. Soit π une dérivation de $\vdash \Gamma, A \vee B$. Si π se termine par une règle $\vee$, la dérivation obtenue en supprimant la dernière règle est une dérivation de la prémisse. Si π ne se termine pas par une règle $\vee$, alors la dernière règle de π est nécessairement une règle $\wedge$:

$$\frac{\begin{array}{c} \pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Delta, A \vee B, C \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_2 \\ \vdots \\ \vdash \Delta, A \vee B, D \end{array}}{\vdash \Delta, A \vee B, C \wedge D} \wedge$$

En utilisant l'hypothèse d'induction sur les prémisses on obtient deux dérivations π'_1 et π'_2 de conclusions $\vdash \Delta, A, B, C$ et $\vdash \Delta, A, B, D$ respectivement. On définit alors la dérivation :

2. Le séquent $\vdash \Gamma$ ne contient que des formules atomiques ou des négations de formules atomiques.

Cette dérivation est celle recherchée. 😊

Tout séquent est dérivable dans $\text{pLK}_R^\boxtimes$.

Étant donné une preuve π de $\text{pLK}_R^\boxtimes$, on note $\mathfrak{L}(\pi)$ le multi-ensemble des séquents introduits par une règle $\boxtimes$ dans π .

Démonstration. La preuve se fait par induction sur le nombre de connecteurs dans le séquent $\vdash \Gamma$. Le cas de base est évident. Supposons que le lemme soit valide lorsque le nombre de connecteurs dans Γ est inférieur ou égal à n . On va montrer que les dérivations de $\vdash \Gamma, F, G$ dont la dernière règle introduit la formule F possèdent le même invariant que les dérivations dont la dernière règle introduit la formule G . On traitera uniquement le cas où $F = A \wedge B$ et $G = C \wedge D$, qui est le cas le plus complexe. Prenons les dérivations :

En utilisant l'hypothèse d'induction, on obtient les égalités $\mathfrak{L}(\pi_1) = \mathfrak{L}(\rho_1)$, $\mathfrak{L}(\pi_2) = \mathfrak{L}(\rho_3)$, $\mathfrak{L}(\pi_3) = \mathfrak{L}(\rho_2)$, $\mathfrak{L}(\pi_4) = \mathfrak{L}(\rho_4)$. En utilisant celles-ci et l'hypothèse d'induction à nouveau, on obtient alors :

- toute dérivation π de $\vdash \Gamma, A, C \wedge D$ satisfait $\mathfrak{L}(\pi) = \mathfrak{L}(\pi_1) + \mathfrak{L}(\pi_2)$;
- toute dérivation π de $\vdash \Gamma, B, C \wedge D$ satisfait $\mathfrak{L}(\pi) = \mathfrak{L}(\pi_3) + \mathfrak{L}(\pi_4)$;
- toute dérivation π de $\vdash \Gamma, A \wedge B, C$ satisfait $\mathfrak{L}(\pi) = \mathfrak{L}(\pi_1) + \mathfrak{L}(\pi_3)$;
- toute dérivation π de $\vdash \Gamma, A \wedge B, D$ satisfait $\mathfrak{L}(\pi) = \mathfrak{L}(\pi_2) + \mathfrak{L}(\pi_4)$;

On a donc montré que si π est une dérivation de conclusion $\vdash \Gamma, A \wedge B, C \wedge D$ dont la dernière règle est une règle $\wedge$ introduisant $A \wedge B$ et si ρ est une dérivation de même conclusion terminant par une règle $\wedge$ introduisant $C \wedge D$, alors leurs invariants sont égaux, c'est-à-dire :

Les autres cas se traitent de manière similaire. 😊

§2.1.15 REMARQUE. Par la Proposition §2.1.12 et le lemme précédent il est possible de considérer $\mathfrak{L}(\vdash \Gamma)$ pour tout séquent $\vdash \Gamma$.

§2.1.16 DÉFINITION.

Un séquent $\vdash \Gamma$ est *correct* lorsque toute formule dans Γ est un atome ou la négation d'un atome, et qu'il existe un atome X tel que les formules X et $\neg X$ appartiennent toutes deux à $\vdash \Gamma$. Par extension, une règle $\boxtimes$ est dite *correcte* lorsque le séquent qu'elle introduit est correct.

§2.1.17 PROPOSITION.

Un séquent $\vdash \Gamma$ est dérivable dans pLK_R si et seulement si $\mathcal{L}(\vdash \Gamma)$ ne contient que des séquents corrects.

Démonstration. Supposons que π soit une dérivation de $\vdash \Gamma$ dans le système pLK_R , alors en remplaçant chaque règle axiome par une règle $\boxtimes$ on obtient une dérivation π' de $\vdash \Gamma$ dans $\text{pLK}_R^{\boxtimes}$. Chaque règle $\boxtimes$ dans π' est évidemment correcte.

Inversement, si π' est une dérivation de $\vdash \Gamma$ dans $\text{pLK}_R^{\boxtimes}$ telle que $\mathcal{L}(\pi')$ ne contient que des séquents corrects, alors chaque séquent dans $\mathcal{L}(\pi')$ peut être introduit par une règle axiome dans pLK_R . On obtient ainsi une dérivation π de $\vdash \Gamma$ dans pLK_R . $\odot$

§2.1.18 DÉFINITION.

Soit $\delta : \text{Form} \rightarrow \{0, 1\}$ une valuation³. Alors :

- $\delta \models \Gamma$ si et seulement s'il existe un $A \in \Gamma$ tel que $\delta(A) = 1$
- $\vdash \Gamma$ si et seulement si pour tout δ , $\delta \models \Gamma$.

§2.1.19 LEMME.

Pour toute valuation δ , $\delta \models \Gamma$ si et seulement si $\delta \models \Delta$ pour tout $\vdash \Delta$ dans $\mathcal{L}(\vdash \Gamma)$.

Démonstration. Remarquons que, par définition de la satisfaisabilité d'un séquent (et l'associativité de $\vee$), $\delta \models \Delta, A, B$ si et seulement si $\delta \models \Delta, A \vee B$.

Dans le cas de la règle $\wedge$, supposons dans un premier temps que $\delta \models \Delta, A$ et $\delta \models \Delta, B$. Alors soit il existe une formule satisfaite dans Δ , soit les deux formules A et B sont satisfaites, et donc $\delta \models \Delta, A \wedge B$. Inversement, supposons que $\delta \not\models \Delta, A$, alors toute formule dans Δ est non satisfaite et A non plus, donc $A \wedge B$ n'est pas satisfaite. On en conclut que $\delta \not\models \Delta, A \wedge B$. Le lemme est alors prouvé par une simple induction. $\odot$

§2.1.20 PROPOSITION.

$\vdash \Gamma$ si et seulement si tous les séquents dans $\mathcal{L}(\vdash \Gamma)$ sont corrects.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{L}(\vdash \Gamma)$ ne contient que des séquents corrects, alors pour toute valuation δ et tous séquents $\vdash \Delta$ dans $\mathcal{L}(\vdash \Gamma)$, $\delta \models \Delta$ d'après la définition des séquents corrects. On utilise alors le Lemme §2.1.19 pour montrer que $\delta \models \Gamma$.

Inversement, supposons que $\mathcal{L}(\vdash \Gamma)$ contient au moins un séquent incorrect, par exemple $\vdash X_1, \dots, X_n, \neg Y_1, \dots, \neg Y_p$ tel que pour tout $i \in [1, n]$ et $j \in [1, p]$, $X_i \neq Y_j$. On choisit une valuation δ telle que $\delta(X_i) = 0$ et $\delta(Y_j) = 1$. Alors on a $\delta \not\models X_1, \dots, X_n, \neg Y_1, \dots, \neg Y_p$ et donc par le Lemme §2.1.19 on en déduit $\delta \not\models \Gamma$. $\odot$

2.2 Logique Linéaire

§2.2.1 DÉFINITION (FORMULES DE LA LOGIQUE LINÉAIRE).

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de variables. Les formules de la logique linéaire sont décrites par la grammaire suivante :

$$F := X \mid X^\perp \mid 1 \mid \top \mid \perp \mid 0 \mid F \wp F \mid F \otimes F \mid F \oplus F \mid F \& F \mid !F \mid ?F \quad (X \in \mathcal{V})$$

3. On rappelle qu'une valuation est une fonction assignant à chaque atome de $\mathcal{A}$ une valeur de vérité dans $\{0, 1\}$ étendue aux formules suivant les tables de vérité des connecteurs.

$\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Ax} \quad \frac{\vdash \Delta, A \quad \vdash \Gamma, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{Cut}$	
(a) Groupe Identité	
$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \wp \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \otimes$	
$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} \perp \quad \frac{}{\vdash 1} 1$	
(b) Groupe Multiplicatif	
$\frac{\vdash \Gamma, A_i}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2} \oplus_i \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} \&$	
Pas de règle pour 0	
(c) Groupe Additif	
$\frac{}{\vdash \Gamma, \top} \top$	
$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} ! \quad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} ?_c$	
$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} ?_d \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} ?_w$	
(d) Groupe Exponentiel	

FIGURE 2.4 – Calcul des séquents de la logique linéaire

La négation est involutive et est étendue aux formules par les lois de De Morgan :

$$\begin{aligned}
 (A \otimes B)^\perp &= A^\perp \wp B^\perp & 1^\perp &= \perp & (A \wp B)^\perp &= A^\perp \otimes B^\perp \\
 (A \& B)^\perp &= A^\perp \oplus B^\perp & \top^\perp &= 0 & (A \oplus B)^\perp &= A^\perp \& B^\perp \\
 (!A)^\perp &= ?A^\perp
 \end{aligned}$$

§2.2.2 DÉFINITION.

Un séquent de la logique linéaire est un multi-ensemble fini $[A_1, \dots, A_n]$ de formules de la logique linéaire noté $\vdash A_1, \dots, A_n$.

§2.2.3 DÉFINITION (PREUVES DE LA LOGIQUE LINÉAIRE).

Une preuve d'un séquent $\vdash A_1, \dots, A_n$ est une dérivation de conclusion $\vdash A_1, \dots, A_n$ construite à partir des règles de dérivation décrites dans la Figure 2.4.

§2.2.4 En logique linéaire, on parle d'*isomorphisme* entre des formules A et B lorsque :

- les deux implications $A \multimap B$ (c'est-à-dire $A^\perp \wp B$) et $B \multimap A$ (ou $B^\perp \wp A$) sont prouvables par des preuves π_1 et π_2 (on notera cela $A \circ \multimap B$);
- π_1 et π_2 sont telles que la preuve μ (resp. ν) obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle de coupure sur la formule A (resp. B) se normalise en une η -expansion de l'axiome $\vdash B, B^\perp$ (resp. $\vdash A, A^\perp$).

On présente quelques isomorphismes importants.

§2.2.5 Le premier isomorphisme a donné leur nom aux connecteurs exponentiels, puisqu'il montre que le connecteur $!$ transforme les conjonctions additives en conjonctions multiplicatives :

$$!(A \& B) \circ \multimap (!A) \otimes (!B)$$

On présente ici les preuves de deux implications mais nous ne décrivons pas la procédure d'élimination des coupures.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{ax}}{\vdash A, A^\perp \oplus B^\perp} \oplus}{\vdash A, ?(A^\perp \oplus B^\perp)} ?_d \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash B, B^\perp} \text{ax}}{\vdash B, A^\perp \oplus B^\perp} \oplus}{\vdash B, ?(A^\perp \oplus B^\perp)} ?_d \\
\frac{\vdash A, ?(A^\perp \oplus B^\perp)}{\vdash !A, ?(A^\perp \oplus B^\perp)} ! \quad \frac{\vdash B, ?(A^\perp \oplus B^\perp)}{\vdash !B, ?(A^\perp \oplus B^\perp)} ! \\
\frac{\vdash !A, ?(A^\perp \oplus B^\perp) \quad \vdash !B, ?(A^\perp \oplus B^\perp)}{\vdash !A \otimes !B, ?(A^\perp \oplus B^\perp), ?(A^\perp \oplus B^\perp)} \otimes \\
\frac{\vdash !A \otimes !B, ?(A^\perp \oplus B^\perp)}{\vdash !A \otimes !B, ?(A^\perp \oplus B^\perp)} ?_c \\
\frac{\vdash !A \otimes !B, ?(A^\perp \oplus B^\perp)}{\vdash !(A \& B) \multimap (!A) \otimes (!B)} \wp
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{ax}}{\vdash A, ?A^\perp} ?_d}{\vdash A, ?A^\perp, ?B^\perp} ?_w \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash B, B^\perp} \text{ax}}{\vdash B, ?B^\perp} ?_d}{\vdash B, ?A^\perp, ?B^\perp} ?_w \\
\frac{\vdash A, ?A^\perp, ?B^\perp \quad \vdash B, ?A^\perp, ?B^\perp}{\vdash A \& B, ?A^\perp, ?B^\perp} \& \\
\frac{\vdash A \& B, ?A^\perp, ?B^\perp}{\vdash !(A \& B), ?A^\perp, ?B^\perp} ! \\
\frac{\vdash !(A \& B), ?A^\perp, ?B^\perp}{\vdash !(A \& B), (?A^\perp) \wp (?B^\perp)} \wp \\
\frac{\vdash !(A \& B), (?A^\perp) \wp (?B^\perp)}{\vdash (!A) \otimes (!B) \multimap !(A \& B)} \wp
\end{array}$$

§2.2.6 Le second isomorphisme exprime la distributivité de $\wp$ sur $\&$ et de $\otimes$ sur $\oplus$:

$$\begin{array}{l}
A \wp (B \& C) \quad \multimap \quad (A \wp B) \& (A \wp C) \\
A \otimes (B \oplus C) \quad \multimap \quad (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)
\end{array}$$

On remarquera que ces deux formules sont les mêmes par dualité, et nous n'avons qu'à prouver que l'une des deux est valide. On traite ci-dessous le cas des connecteurs $\wp$ et $\&$.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{ax}}{\vdash A, A^\perp} \text{ax} \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash B, B^\perp} \text{ax}}{\vdash B, B^\perp \oplus C^\perp} \oplus}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A, B} \otimes}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A \wp B} \wp \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash C, C^\perp} \text{ax}}{\vdash C, B^\perp \oplus C^\perp} \oplus}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A, C} \otimes}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A \wp C} \wp \\
\frac{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A \wp B \quad \vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A \wp C}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), (A \wp B) \& (A \wp C)} \& \\
\frac{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), (A \wp B) \& (A \wp C)}{\vdash A \wp (B \& C) \multimap (A \wp B) \& (A \wp C)} \wp
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{ax}}{\vdash A, B, A^\perp \otimes B^\perp} \otimes \quad \frac{\frac{}{\vdash B, B^\perp} \text{ax}}{\vdash B, B^\perp} \text{ax}}{\vdash A, B, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)} \oplus \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{ax}}{\vdash A, C, A^\perp \otimes C^\perp} \otimes \quad \frac{\frac{}{\vdash C, C^\perp} \text{ax}}{\vdash C, C^\perp} \text{ax}}{\vdash A, C, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)} \oplus \\
\frac{\vdash A, B, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp) \quad \vdash A, C, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)}{\vdash A, B \& C, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)} \& \\
\frac{\vdash A, B \& C, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)}{\vdash A \wp (B \& C), (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)} \wp \\
\frac{\vdash A \wp (B \& C), (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)}{\vdash (A \wp B) \& (A \wp C) \multimap A \wp (B \& C)} \wp
\end{array}$$

§2.2.7 Il existe une représentation alternative des preuves en logique linéaire par le biais de graphes.

On définit dans un premier temps l'ensemble des *structures de preuve* comme l'ensemble des graphes construits à partir d'un certain nombre de noeuds et de boîtes (ensemble de noeuds). Les réseaux sont alors décrits comme l'ensemble des structures de preuve ainsi formées qui satisfont à une propriété nommée *critère de correction*. Nous présentons dans la section suivante une définition précise des structures et réseaux dans le cas de la logique linéaire multiplicative, et nous renvoyons le lecteur intéressé par les extensions aux connecteurs additifs, exponentiels et du second ordre aux différents travaux sur les réseaux [Gir95c, GLT89].

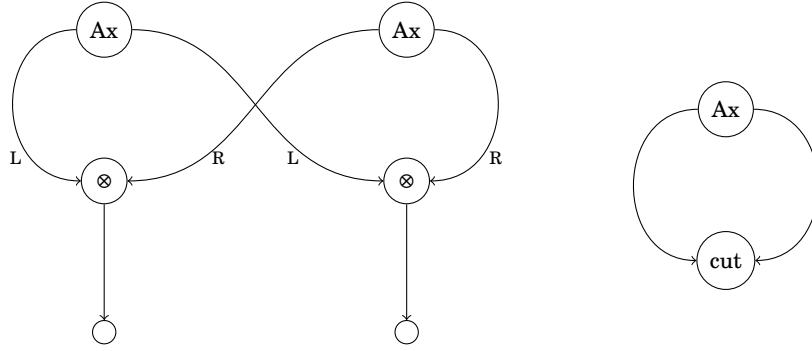


FIGURE 2.5 – Structures de preuve non séquentialisables

2.3 Quelques remarques sur les réseaux multiplicatifs

Définition

§2.3.1 On va maintenant définir les réseaux de preuve, une syntaxe pour les preuves de la logique linéaire que l'on peut considérer comme une déduction naturelle multi-conclusion. Les réseaux de preuve sont peut-être l'innovation la plus importante de la logique linéaire. En effet, la syntaxe des *structures de preuve* est trop expressive et permet d'écrire des structures qui ne correspondent pas à une preuve du calcul des séquents. On doit alors définir les *réseaux de preuve* comme le sous-ensemble des structures de preuve qui correspondent à une preuve en calcul des séquents. Bien entendu, cette définition serait complètement vide et inutile s'il n'était pas possible de distinguer les réseaux de preuve parmi les structures de preuves. Plusieurs résultats — les *critères de correction* — vont dans ce sens et permettent de faire cette distinction sur des critères purement géométriques (parfois topologiques).

§2.3.2 On commence par définir la notion de structure de preuve. Nous présenterons ici uniquement les réseaux pour la logique linéaire multiplicative, ce qui est suffisant pour faire les remarques que nous souhaitons faire sur les réseaux. Nous nous restreindrons également aux axiomes atomiques, ce qui nous permettra de ne pas nommer les arêtes avec les formules.

On écrira $d_{in}(e)$ (resp. $d_{out}(e)$) le degré entrant (resp. sortant) d'un sommet e dans un graphe dirigé.

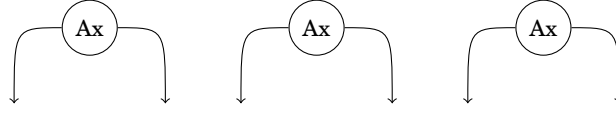
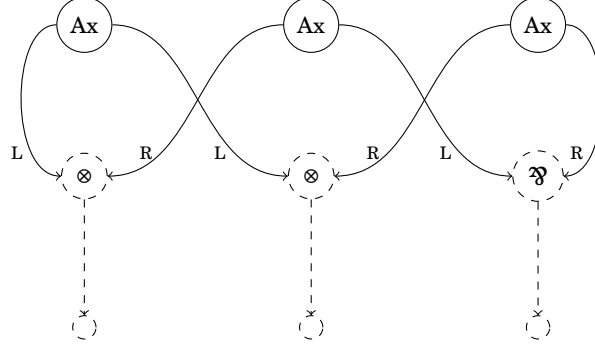
§2.3.3 DÉFINITION (STRUCTURE POUR MLL).

Une *structure de preuve (pour MLL)* est un graphe dirigé fini dont les sommets vérifient l'une des propriétés suivantes :

- $d_{in}(v) = 0$ et $d_{out}(v) = 2$ — un tel sommet sera appelé un sommet axiome ;
- $d_{in}(v) = 2$ et $d_{out}(v) = 0$ — appelé un sommet coupure ;
- $d_{in}(v) = 1$ et $d_{out}(v) = 0$ — un sommet conclusion ;
- $d_{in}(v) = 2$ et $d_{out}(v) = 1$ — un tel sommet sera soit un sommet $\otimes$, soit un sommet $\wp$ et ses arêtes entrantes sont nommées L et R .

§2.3.4 Une structure de preuve ne correspond pas nécessairement à une preuve en calcul des séquents — une telle structure est dite non *séquentialisable*. Par exemple, les structures de la Figure 2.5 sont non séquentialisables.

Il est donc nécessaire de distinguer les structures de preuves *séquentialisables* — celles qui correspondent à une preuve de calcul des séquents — de celles qui ne le sont pas. De nombreux résultats décrivant des méthodes pour faire cette distinction existent sous le nom de *critères de correction*. En particulier, nous retiendrons dans la suite les critères suivants : le critère des longs voyages (LV) [Gir87a], le critère de Danos-Regnier (DR) [DR95], le critère des contre-preuves (CP) [Cur06], et le critère des permutations (P) [Gir07, Gir10].

FIGURE 2.6 – La preuve non typée π FIGURE 2.7 – Le typage de π (premier exemple)

§2.3.5 Ces critères sont tous construits de manière similaire. Étant donnée une structure de preuve $\mathcal{R}$:

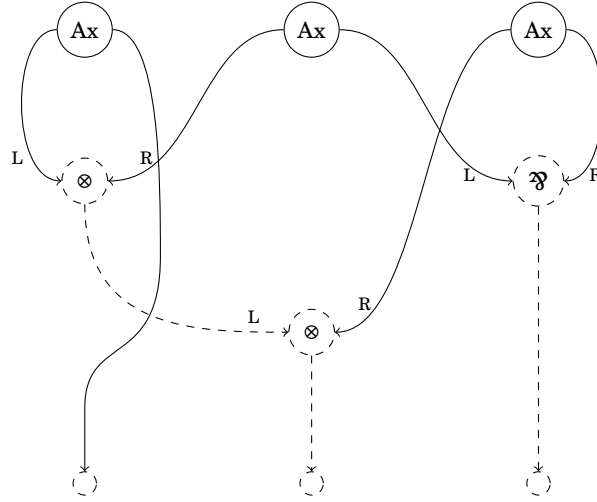
1. on définit une famille S d'objets — voyages (LV), graphes de switching (DR), une partition d'ensemble (CP), permutations (P) ;
2. on montre que $\mathcal{R}$ est séquentialisable si et seulement si tous les éléments de S vérifient une certaine propriété : être des longs voyages (LT), être acyclique et connexe (DR), être orthogonal à la partition définie par les axiomes (CP), être orthogonal à la permutation définie par les liens axiomes (P).

En y regardant d'un peu plus près, on peut se rendre compte que cette similitude est encore plus profonde que cela : dans chacun des cas cités, les éléments de S (quitte à reformuler légèrement le critère) peuvent être définis à partir de la structure de preuve sans les axiomes, c'est-à-dire $\mathcal{R}$ dans laquelle on a effacé les sommets axiomes. La seconde partie du critère — la propriété qui doit être satisfaite par les éléments de S — décrit alors comment la partie purement axiomatique de $\mathcal{R}$ interagit avec le reste de la structure.

§2.3.6 On va donc maintenant considérer l'ensemble des sommets axiomes d'une structure de preuve $\mathcal{R}$ comme une *preuve non-typée* sous-jacente, tandis que l'on considèrera le reste de la structure — la partie non-axiomatique — comme une manière de typer cette preuve. Si une structure de preuve $\mathcal{R}$ satisfait le critère de correction, cela signifie alors que la preuve non-typée contenue dans $\mathcal{R}$ peut être typée par la partie non-axiomatique de $\mathcal{R}$. Par exemple, la Figure 2.6 montre une preuve non typée π , et les Figures 2.7 et 2.8 montrent comment cette preuve non typée peut être typée de deux manières différentes.

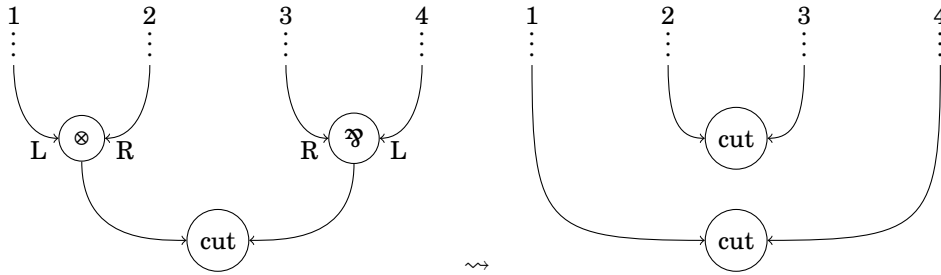
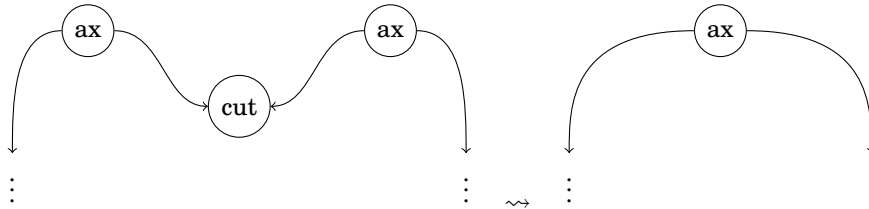
Élimination des coupures

§2.3.7 Une procédure d'élimination de coupures peut être définie directement sur les structures de preuve, une procédure plus simple que la procédure d'élimination des coupures pour le calcul des séquents puisque les règles de commutation ont disparu.

FIGURE 2.8 – Le typage de π (second exemple)

§2.3.8 DÉFINITION.

On définit une procédure d'élimination des sommets coupure. Cette procédure est une réécriture locale définie par les deux règles illustrées dans les Figures 2.9 et 2.10.

FIGURE 2.9 – Élimination des coupures : $\otimes - \otimes$ FIGURE 2.10 – Élimination des coupures : $ax - ax$

§2.3.9 REMARQUE. La procédure n'élimine pas nécessairement toutes les coupures, mais elle termine toujours. De plus, c'est une réécriture confluente, donc si $\mathcal{R}$ est une structure de preuve, on peut définir sa *forme normale* comme la dernière structure de preuve dans toute suite de réduction maximale.

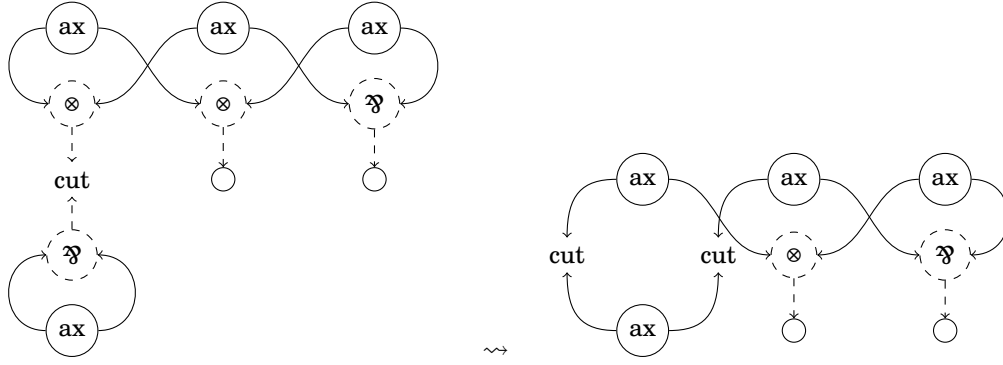


FIGURE 2.11 – Vérification de la compatibilité des spécifications (partie axiomatique non utilisée)

§2.3.10 Le théorème suivant est un résultat connu, même s'il n'est généralement pas énoncé ainsi. Il assure simplement que l'ensemble des réseaux de preuve (des structures de preuve séquentialisables) est clos pour la procédure d'élimination des coupures, et que la forme normale d'un réseau de preuve est un réseau de preuve sans sommets coupure.

§2.3.11 THÉORÈME.

Soit $\mathcal{R}$ une structure de preuve et $\mathcal{R}'$ sa forme normale. Si $\mathcal{R}$ est séquentialisable, alors $\mathcal{R}'$ est séquentialisable et sans sommets coupure.

§2.3.12 Nous allons maintenant décomposer cette réduction en deux parties. Nous considérerons la stratégie de réduction qui commence par éliminer toutes les coupures $\otimes - \wp$ (réduction du typage) jusqu'à ce qu'il n'y ait que des coupures ax-ax, et qui réduit dans un deuxième temps les coupures axiomes (l'exécution). Remarquons que :

- l'élimination d'une coupure $\otimes - \wp$ ne fait qu'associer deux à deux les sous-formules du connecteur $\otimes$ avec les sous-formules du connecteur $\wp$;
- l'élimination des types, en tenant compte de nos remarques précédentes, correspond à un test de compatibilité des spécifications (les types) ;
- le calcul se fait réellement lors de l'élimination des coupures ax-ax : c'est le seul pas de réduction qui fait disparaître des sommets coupure. Cela signifie que la *réduction* a lieu entre les preuves non typées, et que la spécification de celles-ci est sans intérêt dans ce processus.

§2.3.13 On en déduit que le calcul se fait entre les preuves non typées, c'est-à-dire les ensembles de sommets axiome, et le type (c'est-à-dire la structure de preuve dans laquelle on a supprimé les sommets coupure) assure simplement que les spécifications sont compatibles.

Avec une notion d'adresse l'élimination des types ne serait pas nécessaire. En effet, cette étape de l'élimination ne fait qu'apparier les arêtes sortant de sommets axiomes selon leurs étiquettes (appariant les L d'un côté et les R de l'autre). Avec une notion d'adresse, l'arête étiquetée L (resp. R) d'un $\otimes$ a la même adresse que l'arête étiquetée L (resp. R) du $\wp$ qui s'y oppose. Par conséquent, la coupure devient simplement le partage d'une adresse et est définie directement sur les preuves non typées. Dans ce cas, l'élimination des coupures ne consiste plus qu'en l'étape de réduction.

2.4 Preuves comme Permutations

§2.4.1 Le programme de géométrie de l'interaction trouve son origine et son nom dans un article intitulé *Towards a geometry of interaction* [Gir89b].

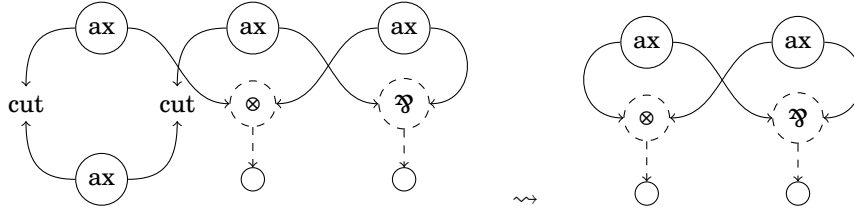


FIGURE 2.12 – Calcul de l'exécution (partie typée non utilisée)

Cependant, on peut faire remonter l'histoire de la géométrie de l'interaction presque jusqu'aux origines de la logique linéaire. En effet, Girard [Gir87b] remarque, très peu de temps après l'introduction de la logique linéaire [Gir87a], que les switchings utilisés pour la correction des réseaux de preuves font apparaître une dualité entre les tests et les preuves. Ainsi, les tests d'un tenseur ne sont rien d'autre que des $\wp$, tandis que les tests pour les $\wp$ sont des tenseurs. Il lui vient alors l'idée de représenter les preuves et les tests par des permutations, d'une part la permutation associée aux axiomes d'un réseau, d'autre part les permutations définies par le critère de correction.

Critère de Correction des Longs-Voyages

§2.4.2 DÉFINITION.

Soit $\mathcal{R}$ une structure de preuve. Un *itinéraire* dans $\mathcal{R}$ est la donnée, pour chaque sommet $\otimes$ et chaque sommet $\wp$ d'une permutation — les *indications* du sommet — parmi les deux choix possibles présentés dans la Figure 2.13. On notera $\mathbb{V}(\mathcal{R})$ l'ensemble des itinéraires de la structure $\mathcal{R}$.

§2.4.3 DÉFINITION.

Soit $\mathcal{R}$ une structure de preuve. On considère le graphe $G_{\mathcal{R}}$ obtenu en ajoutant à $\mathcal{R}$ les arêtes de directions opposées, c'est-à-dire pour toute arête e dans $\mathcal{R}$, on ajoute l'arête e^* entre les mêmes sommets mais d'orientation inverse.

Étant donné un itinéraire $v \in \mathbb{V}(\mathcal{R})$ et une arête e de $G_{\mathcal{R}}$, on définit alors une suite d'arêtes de $G_{\mathcal{R}}$, appelée *voyage d'origine e* , comme la suite $e_0 e_1 \dots e_n$ telle que $e_0 = e_n = e$, et où e_{i+1} est obtenu comme l'image de e_i par l'indication correspondante de l'itinéraire v .

Un voyage est *long* lorsqu'il contient toutes les arêtes de $G_{\mathcal{R}}$.

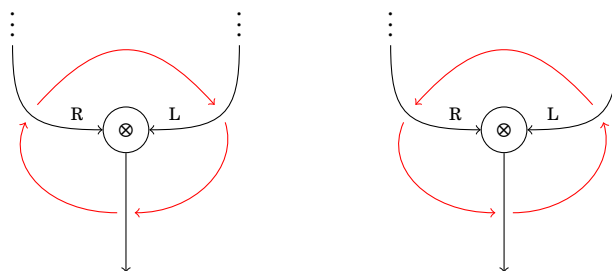
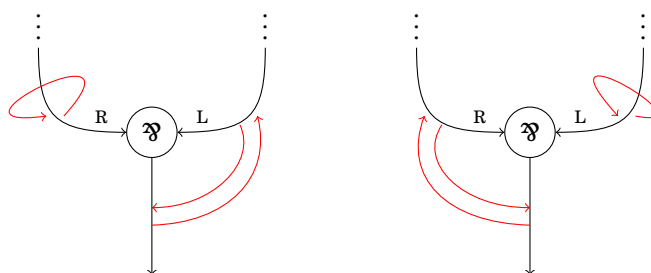
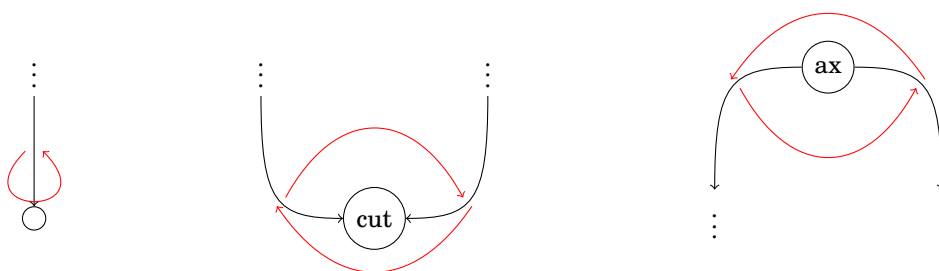
§2.4.4 REMARQUE. Si, étant donné un itinéraire v , un voyage d'origine e est long alors tous les voyages (en changeant l'origine) sont longs.

§2.4.5 THÉORÈME (GIRARD [GIR87A]).

Soit $\mathcal{R}$ une structure de preuve. Si pour tout $v \in \mathbb{V}(\mathcal{R})$ le voyage d'origine e dans $\mathcal{R}$ est long, alors $\mathcal{R}$ est séquentialisable.

Orthogonalité

§2.4.6 En accord avec les remarques que l'on a faites sur les réseaux de preuve, on va représenter une preuve non typée (un ensemble de liens axiomes) comme une permutation σ sur les atomes. On peut alors remarquer que chaque *itinéraire* v comme défini dans le critère des longs voyages détermine une autre permutation τ_v sur ces mêmes atomes. Les Figures 2.14 et 2.15 montrent l'exemple d'une structure de preuve, d'un itinéraire sur celle-ci et les permutations induites.

(a) Indications pour les sommets $\otimes$ (b) Indications pour les sommets $\wp$ 

(c) Indications pour les conclusions, axiomes et coupures

FIGURE 2.13 – Choix d'indications pour la définition d'un itinéraire

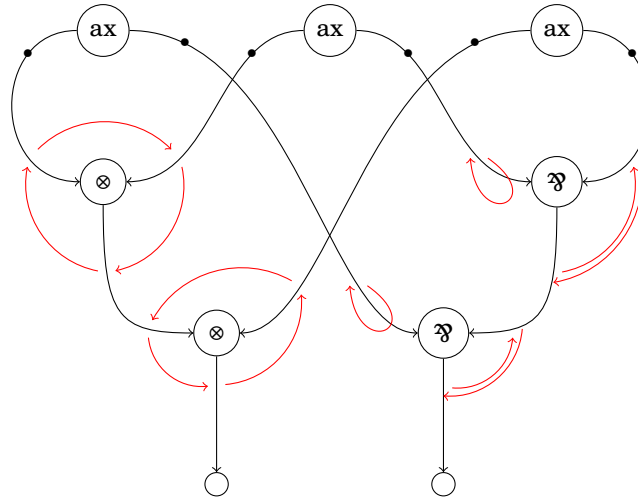


FIGURE 2.14 – Exemple d'un itinéraire pour une structure de preuve ; les atomes sont représentés sur les arêtes sortant des noeuds axiomes

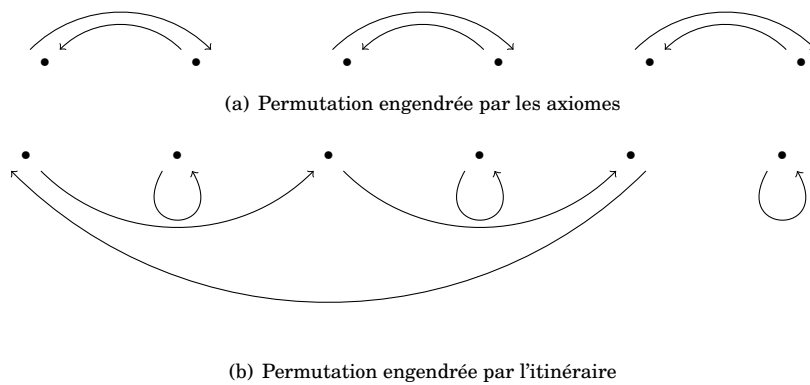


FIGURE 2.15 – Les permutations de l'itinéraire de la Figure 2.14

§2.4.7 Il est alors possible de reformuler le critère de correction. Ainsi, le fait que le voyage d'origine e défini par un itinéraire $v \in \mathbb{V}(\mathcal{R})$ est long correspond exactement au fait que le produit $\sigma\tau_v$ des permutations induites par les axiomes et l'itinéraire v est cyclique.

§2.4.8 DÉFINITION.

Soit σ et τ deux permutations sur un même ensemble de cardinal n . Elles sont dites *orthogonales* — ce que l'on notera $\sigma \perp \tau$ — lorsque $\sigma\tau$ est cyclique, c'est-à-dire lorsque $(\sigma\tau)^n = \text{Id}$ et $(\sigma\tau)^k \neq \text{Id}$ pour $1 \leq k < n$.

§2.4.9 DÉFINITION (PERMUTATIONS ENGENDRÉES).

Soit $\mathcal{R}$ une structure de preuve. On notera X l'ensemble des arêtes qui sortent d'un sommet axiome. L'ensemble des sommets axiomes définit une permutation sur X : un élément $x \in X$ est envoyé sur l'élément $y \in X$ tel qu'il existe un sommet axiome dans $\mathcal{R}$ dont les deux arêtes sortantes sont x et y .

Soit maintenant $v \in \mathbb{V}(\mathcal{R})$ un itinéraire dans $\mathcal{R}$. Alors v définit également une permutation sur X : un élément x est envoyé sur le premier élément y de X dans le voyage d'origine x induit par v .

§2.4.10 On peut alors reformuler le Théorème §2.4.5 en utilisant la notion d'orthogonalité que nous venons de définir.

§2.4.11 THÉORÈME.

Soit $\mathcal{R}$ une structure de preuve, $\sigma_{\mathcal{R}}$ la permutation engendrée par les liens axiomes, et $S = \{\tau_v \mid v \in \mathbb{V}(\mathcal{R})\}$. Alors $\mathcal{R}$ est séquentialisable si et seulement si $\forall v \in \mathbb{V}(\mathcal{R}), \sigma \perp \tau_v$.

§2.4.12 DÉFINITION.

Un *véhicule* est la donnée d'un ensemble non vide X et d'une permutation σ sur cet ensemble.

§2.4.13 DÉFINITION.

Un *type* est un ensemble non vide de véhicules égal à son bi-orthogonal. Deux véhicules (X, σ) et (Y, τ) orthogonaux satisfaisant nécessairement $X = Y$, on note $X^{\mathbf{A}}$ l'ensemble tel que $(Y, \sigma) \in \mathbf{A} \Rightarrow Y = X^{\mathbf{A}}$.

§2.4.14 DÉFINITION.

Soit (X, σ) et (Y, τ) deux véhicules tels que $X \cap Y = \emptyset$. On définit :

$$(X, \sigma) \otimes (Y, \tau) = (X \cup Y, \sigma \cup \tau)$$

§2.4.15 Nous allons maintenant définir l'exécution, qui représentera l'élimination des coupures. On souhaite, étant donné deux véhicules (X, σ) et $(X \cup Y, \tau)$, définir la permutation $\sigma \upharpoonright \tau$ sur Y telle que :

$$x = \sigma \upharpoonright \tau(y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}, x = \tau(\sigma\tau)^k(y)$$

Cette permutation représente l'ensemble des chemins qui alternent entre la permutation τ et la permutation σ , et correspond intuitivement à l'élimination simultanée de plusieurs coupures ax – ax. Il reste cependant à vérifier qu'il s'agit bien d'une permutation. La première chose à remarquer est qu'il s'agit bien d'une fonction, et qu'elle est injective : puisque τ et σ sont injectives il n'existe, pour chaque $y \in Y$, qu'au plus un entier k et un élément $x \in Y$ tel que $x = \tau(\sigma\tau)^k(y)$. Il reste maintenant à montrer qu'elle est surjective. Pour cela, on suppose qu'il existe $y \in Y$ tel qu'il n'existe pas d'entier k et d'élément $x \in Y$ tels que $x = \tau(\sigma\tau)^k(y)$. On peut alors remarquer que les éléments de la suite $(\tau(\sigma\tau)^k(y))_{k \in \mathbf{N}}$ sont nécessairement deux à deux distincts puisque τ et σ sont bijectives. Ces éléments étant dans X , un ensemble de cardinal fini, on tombe sur une contradiction.

§2.4.16 Afin de définir formellement la permutation $\sigma \upharpoonright \tau$, on considèrera les restrictions des permutations $\tau(\sigma\tau)^k$ à l'ensemble Y , c'est-à-dire les injections partielles $(\tau(\sigma\tau)^k)|_Y$. Ces injections partielles sont de domaines (resp. codomaines) deux à deux disjoints, et on peut alors définir $\sigma \upharpoonright \tau$ comme l'union de ces fonctions.

§2.4.17 DÉFINITION.

Soit (X, σ) et $(X \cup Y, \tau)$ deux véhicules. On définit :

$$(X, \sigma) \dot{\cup} (X \cup Y, \tau) = (Y, \bigcup_{k \geq 0} (\tau(\sigma\tau)^k)|_Y) = (Y, \sigma \dot{\cup} \tau)$$

§2.4.18 PROPOSITION.

Soit $(X, \sigma), (Y, \tau), (X \cup Y, \rho)$ des véhicules. Alors :

$$\rho \perp \sigma \cup \tau \Leftrightarrow (\rho \dot{\cup} \sigma \perp \tau) \wedge (\rho\sigma \text{ acyclique})$$

§2.4.19 DÉFINITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux types tels que $X^{\mathbf{A}} \cap X^{\mathbf{B}} = \emptyset$. On définit :

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = \{(X^{\mathbf{A}} \cup X^{\mathbf{B}}, \rho) \mid \forall (X^{\mathbf{A}}, \sigma) \in \mathbf{A}, \rho\sigma \text{ acyclique et } (X^{\mathbf{B}}, \rho \dot{\cup} \sigma) \in \mathbf{B}\}$$

§2.4.20 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux types tels que $X^{\mathbf{A}} \cap X^{\mathbf{B}} = \emptyset$.

$$(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}^\perp)^\perp = \{(X^{\mathbf{A}}, \sigma) \otimes (X^{\mathbf{B}}, \tau) \mid (X^{\mathbf{A}}, \sigma) \in \mathbf{A}, (X^{\mathbf{B}}, \tau) \in \mathbf{B}\}^{\perp\perp}$$

§2.4.21 La proposition précédente nous assure que l'on a bien défini un « modèle » de la logique linéaire multiplicative (sans unités). Afin de représenter un fragment plus important de la logique linéaire, il est cependant nécessaire de changer de cadre. Ainsi, le traitement des additifs nécessite de considérer des injections partielles plutôt que des permutations. De plus, il est nécessaire de travailler avec des espaces de dimension infinie pour traiter les exponentielles. Girard, dans les premières versions de la géométrie de l'interaction, a donc choisi de travailler avec des injections partielles d'un ensemble dénombrable. Il choisit cependant de considérer celles-ci comme des isométries partielles⁴ dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ des opérateurs continus sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ de dimension dénombrable. Si les premières constructions ne font qu'utiliser des notions de bases de la théorie des algèbres d'opérateurs pour représenter ces injections partielles sur $\mathbf{N}$, la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini [Gir11a] fait usage de notions plus avancées de cette théorie. Nous avons donc choisi de présenter les premières versions de la GdI avec des opérateurs en lieu des injections partielles⁵ afin de garder une présentation homogène de ces diverses constructions. Nous allons donc faire un rappel de notions de la théorie des algèbres d'opérateurs qui nous seront utiles pour présenter les constructions de Girard dans le Chapitre 4, et nous présenterons également certains résultats que nous utiliserons dans cette thèse (principalement dans les Chapitres 10 et 11).

4. Nous verrons plus tard qu'il s'agit d'un sous-ensemble des isométries partielles : les isométries partielles appartenant au groupoïde normalisant d'une sous-algèbre diagonale de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ définie par une base de $\mathbb{H}$.

5. Une présentation des premières constructions en terme d'injections partielles peut être trouvée dans la thèse d'Étienne Duchesne [Duc09].

CHAPITRE 3

ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

Table des matières

3.1	Espaces de Hilbert et Opérateurs	34
3.1.1	Espaces de Banach	34
3.1.2	Quelques propriétés	36
3.1.3	Opérateurs	39
3.2	Algèbres stellaires	41
3.2.1	Algèbres stellaires commutatives	41
3.2.2	Opérateurs positifs	51
3.2.3	Construction GNS	52
3.3	Algèbres de von Neumann	53
3.3.1	Facteurs	53
3.3.2	Algèbre d'un Groupe et Produits Croisés	57
3.3.3	Représentation Standard	60
3.3.4	Sous Algèbres Commutatives Maximales	61
3.3.5	Invariant de Pukansky	62

§3.1 Ce chapitre est une introduction aux algèbres d'opérateurs principalement axé sur les résultats qui nous seront utiles dans la suite de cette thèse (particulièrement dans la partie concernant les algèbres de von Neumann). Le lecteur souhaitant approfondir le sujet trouvera plus de détails sur la théorie des algèbres stellaires dans l'excellent ouvrage de Murphy [Mur90]; concernant la théorie des algèbres de von Neumann, l'ouvrage en deux volumes de Kadison et Ringrose [KR97a, KR97b] est parfaitement adapté, même si la série plus récente et complète de Takesaki [Tak01, Tak03a, Tak03b] reste la référence à ce sujet.

Dans l'ensemble de ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés seront des espaces vectoriels complexes. De même, toutes les algèbres seront supposées séparables.

3.1 Espaces de Hilbert et Opérateurs

Espaces de Banach

§3.1.1 DÉFINITION (ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE).

Un espace vectoriel topologique est la donnée d'un espace vectoriel V et d'une topologie $\mathcal{O}$ sur V telle que :

1. Tout point de V est un fermé ;
2. Les opérations d'espace vectoriel (somme et multiplication par un scalaire) sont continues.

§3.1.2 DÉFINITION (NORME).

Une norme sur un espace vectoriel V est une fonction $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ satisfaisant, pour tous $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbf{C}$:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Si $\|\cdot\|$ ne satisfait pas le point 3 (mais seulement l'implication $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ qui est une conséquence du point 2), on dira que $\|\cdot\|$ est une semi-norme.

Une norme sur un espace vectoriel induit une distance par $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$, et définit une topologie sur V , à savoir la topologie engendrée par les boules ouvertes définies grâce à la distance $d_{\|\cdot\|}$.

§3.1.3 DÉFINITION (SUITE DE CAUCHY).

Soit (X, d) un espace métrique (d est une distance). Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est dite *de Cauchy* lorsqu'elle vérifie :

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_{>0}, \exists N \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathbf{N}, ((p \geq N) \wedge (q \geq N)) \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon$$

§3.1.4 DÉFINITION (ESPACE COMPLET).

Un espace métrique (X, d) est *complet* lorsque toute suite de Cauchy est convergente dans X .

§3.1.5 DÉFINITION (ESPACE DE BANACH).

Un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ tel que l'espace métrique $(X, d_{\|\cdot\|})$ est complet est un *espace de Banach*.

§3.1.6 REMARQUE. Un espace de Banach est un espace vectoriel topologique, si l'on considère la topologie induite par la distance $d_{\|\cdot\|}$.

§3.1.7 Ci-dessous, quelques exemples d'espaces de Banach :

1. Si Ω est un espace topologique, alors $\mathcal{C}_b(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ continue et bornée}\}$ muni de la norme $\|f\|_{\infty} = \inf\{M \in \mathbf{R}_{\geq 0} \mid \forall \omega \in \Omega, |f(\omega)| \leq M\}$ est un espace de Banach.
2. Si Ω est un espace de Hausdorff localement compact, alors on définit :

$$\mathcal{C}_0(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ continue et nulle à l'infini}\}$$

où l'on dit que f est *nulle à l'infini* lorsque pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > \epsilon\}$ est compact. Alors $\mathcal{C}_0(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

3. Si $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, l'algèbre des fonctions mesurables essentiellement bornées, munie de la norme du supremum essentiel $\|f\|_\infty$ est un espace de Banach.
4. Si X est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(X)$ (l'ensemble des opérateurs de X dans X , voir la Section 3.1.3) muni de la norme opérateur est un espace de Banach.

§3.1.8 DÉFINITION (FORME SESQUILINÉAIRE).

Soit V un espace vectoriel. Une *forme sesquilinéaire* est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant :

1. $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbf{C}, \langle \alpha x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle$;
2. $\forall x, y, z \in V, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
3. $\forall x, y \in V, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

On dit qu'une forme sesquilinéaire est *positive* si :

4. $\forall x \in V, \langle x, x \rangle \geq 0$.

On dit qu'une forme sesquilinéaire est *définie positive* si :

5. $\forall x \in V, x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

On nommera *produit scalaire* une forme sesquilinéaire définie positive.

§3.1.9 DÉFINITION (FORME SESQUILINÉAIRE PARTIELLE).

Soit V un espace vectoriel. Une *forme sesquilinéaire partielle* est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ vérifiant les propriétés d'une forme sesquilinéaire.

§3.1.10 REMARQUE. Un produit scalaire sur un espace vectoriel V induit une norme définie par :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

§3.1.11 DÉFINITION (ESPACE DE HILBERT).

Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel $\mathbb{H}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ — où $\|\cdot\|$ est la norme induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — soit un espace de Banach.

§3.1.12 Soit S un ensemble. L'ensemble V des fonctions $S \rightarrow \mathbf{C}$, muni de la somme de fonctions point par point, et de la multiplication point par point par un scalaire, forme un espace vectoriel. En notant $\bar{g}$ la conjuguée point par point de g , on peut définir une forme sesquilinéaire partielle sur V ainsi :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{s \in S} f(s) \bar{g}(s)$$

On note alors $l^2(S)$ le sous-espace vectoriel de V défini par $l^2(S) = \{f \in V \mid \langle f, f \rangle < \infty\}$. On peut alors montrer que $l^2(S)$ muni de la forme sesquilinéaire de V (restreinte à $l^2(S)$) est un espace de Hilbert. En particulier, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit le produit scalaire sur $l^2(S)$.

§3.1.13 La construction précédente se généralise au cas continu. Soit $(X, \mathcal{M}, m)$ un espace mesuré, i.e. $\mathcal{M}$ est une tribu sur X — l'ensemble des sous-ensembles mesurables de X — et $m : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ est une mesure. On définit $L^0(X, \mathcal{M}, m)$ l'ensemble des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{M}, m)$ dans $\mathbf{C}$. Cet ensemble forme un espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations de somme et multiplication par un scalaire définies point par point, et il est possible de définir une forme sesquilinéaire partielle :

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \bar{g}(x) dm(x)$$

On définit alors l'ensemble $L^2(X, \mathcal{M}, m)$ des fonctions mesurables à carré sommable :

$$L^2(X, \mathcal{M}, m) = \{f \in L^0(X, \mathcal{M}, m) \mid \langle f, f \rangle < \infty\}$$

Contrairement au cas discret, l'espace vectoriel $L^2(X, \mathcal{M}, m)$ muni de la forme sesquilinéaire $\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \bar{g}(x) dm(x)$ n'est pas en général un espace de Hilbert, mais seulement un espace

pré-Hilbertien : il peut exister des fonctions $f \in L^2(X, \mathcal{M}, m)$ non nulles telles que $\langle f, f \rangle = 0$. Si l'on prend pour X la droite réelle munie de la tribu des boréliens et la mesure de Lebesgue, la fonction caractéristique des nombres rationnels est un exemple d'une telle fonction. Il faut donc commencer par séparer l'espace $L^2(X, \mathcal{M}, m)$, c'est-à-dire le quotienter par le noyau de la norme $f \mapsto (\int_X |f(x)|^2 dm(x))^{\frac{1}{2}}$, l'ensemble des fonctions nulles presque partout.

§3.1.14 DÉFINITION (SOMME DIRECTE).

Soit $\mathbb{H}, \mathbb{K}$ deux espaces de Hilbert. La somme directe $\mathbb{H} \oplus \mathbb{K}$ est définie comme l'espace vectoriel dont l'ensemble de base est $\{h \oplus k \mid h \in \mathbb{H}, k \in \mathbb{K}\}$ et la somme et le produit sont définis par $\alpha(h \oplus k) = (\alpha h) \oplus (\alpha k)$ et $h_1 \oplus k_1 + h_2 \oplus k_2 = (h_1 + h_2) \oplus (k_1 + k_2)$, muni du produit scalaire :

$$\langle h_1 \oplus k_1, h_2 \oplus k_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle + \langle k_1, k_2 \rangle$$

On peut montrer que l'on a bien défini un produit scalaire et que $\mathbb{H} \oplus \mathbb{K}$ est complet pour la norme induite.

§3.1.15 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2, \dots$ des espaces de Hilbert, et

$$\mathbb{H} = \{\{h_i\}_{i=1}^\infty \mid \forall i, h_i \in \mathbb{H}_i, \sum_{n=1}^\infty \|h_i\|^2 < \infty\}$$

On définit, pour $h = \{h_i\}_{i=1}^\infty, g = \{g_i\}_{i=1}^\infty$ dans $\mathbb{H}$:

$$\langle h, g \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle h_n, g_n \rangle$$

Alors $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel sur lequel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire et $\mathbb{H}$ est complet par rapport à la norme induite. Cet espace de Hilbert est la somme directe des espaces $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2, \dots$ et on le notera $\mathbb{H} = \bigoplus_{i=1}^\infty \mathbb{H}_i$.

§3.1.16 Soit $\mathbb{H}, \mathbb{K}$ deux espaces de Hilbert. On considère l'espace vectoriel engendré par les tenseurs simples $x \otimes y$ pour $x \in \mathbb{H}, y \in \mathbb{K}$. Cet espace vectoriel peut alors être quotienté par les relations $(x+x') \otimes (y+y') \simeq x \otimes y + x' \otimes y + x \otimes y' + x' \otimes y'$ et $(\lambda x) \otimes y \simeq \lambda(x \otimes y)$ pour $x, x' \in \mathbb{H}, y, y' \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. On note $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$ cet espace vectoriel, et on définit un produit scalaire en étendant la forme définie sur les tenseurs simples par $\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle$. Ce produit scalaire définit une norme, et donc une distance, par rapport à laquelle on peut compléter $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$.

§3.1.17 DÉFINITION.

Soit $\mathbb{H}, \mathbb{K}$ des espaces de Hilbert. Le résultat de la complétion de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$ est appelé le *produit tensoriel* de $\mathbb{H}$ et $\mathbb{K}$ et sera noté $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$.

Quelques propriétés

§3.1.18 PROPOSITION (INÉGALITÉ DE SCHWARTZ).

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, et x, y deux vecteurs de $\mathbb{H}$. Alors :

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\| \|y\|$$

De plus, l'égalité est satisfaite si et seulement si x, y sont linéairement dépendants.

Démonstration. On calcule $\|x + \lambda y\|^2$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \|x + \lambda y\|^2 &= \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

On suppose $\langle x, y \rangle = \rho e^{i\theta}$ et l'on pose $\lambda = a e^{-i\theta}$ pour $a \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2a\rho + a^2 \|y\|^2$$

Comme $\|x + \lambda y\| \geq 0$, on en déduit que le discriminant $4\rho^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ est nécessairement positif ou nul, d'où $\|x\|^2\|y\|^2 \geq |\langle x, y \rangle|^2$.

Le cas d'égalité $\|x\|^2\|y\|^2 = |\langle x, y \rangle|^2$ correspond au cas où le discriminant est égal à 0, c'est-à-dire le cas où il existe une valeur de λ pour laquelle $\|x + \lambda y\|^2 = 0$, c'est-à-dire telle que $x = -\lambda y$. $\odot$

§3.1.19 PROPOSITION (THÉORÈME DE PYTHAGORE).

Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert. Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Démonstration. On montre le cas binaire. Par les propriétés du produit scalaire, on obtient $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$ (cette égalité est parfois appelée l'identité de polarisation). Si x, y sont orthogonaux, $\langle x, y \rangle = 0$ d'où $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Le cas général se prouve par une simple induction. $\odot$

§3.1.20 PROPOSITION (IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME).

Soit x, y deux vecteurs d'un espace de Hilbert. On a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Démonstration. On obtient les deux égalités suivantes par les propriétés du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de les additionner. $\odot$

§3.1.21 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, K un sous-ensemble convexe fermé de $\mathbb{H}$, et $h \in \mathbb{H}$. Alors il existe un unique point $k_0 \in K$ tel que

$$\|h - k_0\| = d_{\|\cdot\|}(h, K) = \inf\{\|h - k\| \mid k \in K\}$$

Démonstration. En considérant $K - h = \{k - h \mid k \in K\}$, on peut supposer que $h = 0$.

Soit $d = d_{\|\cdot\|}(0, K) = \inf\{\|k\| \mid k \in K\}$. Par définition, il existe une suite $\{k_n\}$ d'éléments de K telle que $k_n \rightarrow d$. Par l'identité du parallélogramme, on a :

$$\left\| \frac{k_n - k_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|k_n\|^2 + \|k_m\|^2) - \left\| \frac{k_n + k_m}{2} \right\|^2$$

Puisque K est convexe, $(1/2)(k_n + k_m) \in K$, d'où $\|(k_n + k_m)/2\|^2 \geq d^2$.

Soit $\epsilon > 0$. On choisit N tel que pour $n \geq N$, $\|k_n\|^2 < d^2 + \epsilon^2/4$. Alors pour m, n tels que $n \geq N, m \geq N$, on a :

$$\left\| \frac{k_n - k_m}{2} \right\|^2 < \frac{2d^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2}{2} - d^2 = \frac{1}{4}\epsilon^2$$

D'où $\|k_n - k_m\| < \epsilon$ et donc (k_n) est une suite de Cauchy. Puisque $\mathbb{H}$ est complet et que K est fermé, il existe k_0 tel que $\|k_n - k_0\| \rightarrow 0$. Comme $d \leq \|k_0\| = \|k_0 - k_n + k_n\| \leq \|k_0 - k_n\| + \|k_n\|$ et que cette dernière expression tend vers d , on obtient $\|k_0\| = d$.

Pour montrer l'unicité, on suppose l'existence d'un deuxième point $h_0 \in K$ tel que $\|h_0\| = d$. Par convexité de K , $l_0 = (k_0 + h_0)/2 \in K$. D'où $d \leq \|l_0\| \leq (\|k_0\| + \|h_0\|)/2 \leq d$, c'est-à-dire $d = \|l_0\|$. Par l'identité du parallélogramme, on obtient :

$$d^2 = \|l_0\|^2 = d^2 - \|(k_0 - h_0)/2\|^2$$

D'où $h_0 = k_0$. $\odot$

§3.1.22 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, M un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$, $h \in \mathbb{H}$ et f_0 l'unique élément de M tel que $\|h - f_0\| = d_{\|\cdot\|}(h, M)$. Alors $h - f_0 \in M^\perp$. Inversement, si $f_0 \in M$ est tel que $h - f_0 \in M^\perp$, alors $\|h - f_0\| = d_{\|\cdot\|}(h, M)$.

Démonstration. Soit $f \in M$. Alors $f_0 + f \in M$ et donc :

$$\|h - f_0\|^2 \leq \|h - (f_0 + f)\|^2 = \|(h - f_0) - f\|^2 = \|h - f_0\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle h - f_0, f \rangle + \|f\|^2$$

D'où $2\operatorname{Re}\langle h - f_0, f \rangle \leq \|f\|^2$ pour tout $f \in M$. Supposons que $\langle h - f_0, f \rangle = \rho e^{i\theta}$ et utilisons cette inégalité avec $f_t = te^{i\theta}f$. On obtient donc $2t\rho \leq t^2\|f\|^2$, et, en faisant tendre t vers 0, on en déduit que $\rho = 0$, c'est-à-dire que $h - f_0 \perp f$.

Inversement, supposons que $f_0 \in M$ tel que $h - f_0 \in M^\perp$. Si $f \in M$, on a alors $h - f_0 \perp f_0 - f$ et donc

$$\|h - f\|^2 = \|(h - f_0) + (f_0 - f)\|^2 = \|h - f_0\|^2 + \|f_0 - f\|^2 \geq \|h - f_0\|^2$$

Finalement, $\|h - f_0\| = d_{\|\cdot\|}(h, M)$. ☺

§3.1.23 THÉORÈME.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et M un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$. Pour tout $h \in \mathbb{H}$, on note Ph l'unique point de M tel que $h - Ph \in M^\perp$. Alors :

1. P est une application linéaire sur $\mathbb{H}$;
2. $\|Ph\| \leq \|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{H}$;
3. $P^2 = P$;
4. $\ker P = M^\perp$ et $\operatorname{im}(P) = M$.

Démonstration. On rappelle que pour tout $h \in \mathbb{H}$, $h - Ph \in M^\perp$ et $\|h - Ph\| = d_{\|\cdot\|}(h, M)$.

1. Soit $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$ et $\alpha \in \mathbf{C}$. Si $f \in M$, alors $\langle (h_1 + \alpha h_2) - (Ph_1 + \alpha Ph_2), f \rangle = \langle h_1 - Ph_1, f \rangle + \alpha \langle h_2 - Ph_2, f \rangle = 0$. Par l'unicité énoncée dans la proposition précédente, on a :

$$P(h_1 + \alpha h_2) = Ph_1 + \alpha Ph_2$$

2. Soit $h \in \mathbb{H}$. Alors $h = (h - Ph) + Ph$, avec $Ph \in M$ et $h - Ph \in M^\perp$. D'où $\|h\|^2 = \|h - Ph\|^2 + \|Ph\|^2 \geq \|Ph\|^2$.
3. Soit $f \in M$. Alors $Pf = f$. Pour tout h dans $\mathbb{H}$, $Ph \in M$, et par conséquent $P^2(h) = P(Ph) = Ph$.
4. Si $Ph = 0$, alors $h = h - Ph \in M^\perp$. Inversement, si $h \in M^\perp$, alors 0 est le seul vecteur de M tel que $h - 0 = h \in M^\perp$ et donc $Ph = 0$. Le fait que $\operatorname{im}(P) = M$ est clair.

☺

§3.1.24 DÉFINITION.

Si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert et M est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$, l'application linéaire définie dans le théorème précédent est appelée la *projection orthogonale de $\mathbb{H}$ sur M* .

§3.1.25 DÉFINITION (BASE DE HILBERT).

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, et $\mathcal{B} = \{\beta_i\}_{i \in I}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{H}$. Alors $\mathcal{B}$ est une *base de Hilbert* si :

1. $\mathcal{B}$ est une famille *orthonormale* :

$$\forall i, j \in I^2, \langle \beta_i, \beta_j \rangle = \delta_{i,j}$$

où δ est la fonction de Kronecker ;

2. $\mathcal{B}$ est *génératrice* :

$$\forall \eta \in \mathbb{H}, \exists \{\lambda_i\}_{i \in I} \in \mathbf{C}^I, \sum_{i \in I} \lambda_i \beta_i = \eta$$

§3.1.26 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Si E est un ensemble de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux, alors il existe une base de Hilbert $\mathcal{B}$ de $\mathbb{H}$ contenant E .

Démonstration. Voir par exemple le livre de Conway [Con90]. ☺

§3.1.27 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, et $\mathcal{B} = \{\beta_i\}_{i \in I}$ une base de Hilbert. Alors pour tout $\eta \in \mathbb{H}$:

$$\eta = \sum_{i \in I} \langle \eta, \beta_i \rangle \beta_i$$

Démonstration. Voir par exemple le livre de Conway [Con90]. ☺

§3.1.28 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de Hilbert. Alors $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont la même cardinalité.

Démonstration. Voir par exemple le livre de Conway [Con90]. ☺

§3.1.29 DÉFINITION (CONVERGENCE FORTE).

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Une suite généralisée $\{\xi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge fortement vers 0 lorsque la suite généralisée $\{\|\xi_\lambda\|\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge vers 0.

§3.1.30 DÉFINITION (CONVERGENCE FAIBLE).

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Une suite généralisée $\{\xi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge faiblement vers 0 lorsque pour tout $\eta \in \mathbb{H}$, la suite généralisée $\{\langle \xi_\lambda, \eta \rangle\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge vers 0.

§3.1.31 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. La topologie forte est plus forte que la topologie faible. Si $\mathbb{H}$ est de dimension infinie, alors il existe une suite convergent vers 0 faiblement mais pas fortement.

Démonstration. Il est clair que si une suite converge fortement vers 0, alors elle converge faiblement vers 0 : par l'inégalité de Schwartz, on a $|\langle \xi_\lambda, \eta \rangle| \leq (\|\xi_\lambda\| \|\eta\|)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $\mathcal{B}$ une base Hilbertienne de $\mathbb{H}$. Comme $\mathbb{H}$ est de dimension infinie, le cardinal de $\mathcal{B}$ est supérieur ou égal à celui de $\mathbf{N}$. On peut alors considérer une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathcal{B}$ définissant une suite $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \dots$. Cette suite converge faiblement vers 0 mais ne converge pas fortement vers 0 puisque la norme de chaque β_i est égale à 1. ☺

Opérateurs

§3.1.32 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}, \mathbb{K}$ deux espaces de Hilbert et $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est continue ;
2. F est continue en 0 ;
3. F est continue en un point ;
4. F est bornée : il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\|F\eta\| \leq c\|\eta\|$ pour tout $\eta \in \mathbb{H}$.

Une application linéaire $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ satisfaisant ces conditions est appelée un opérateur, et nous noterons $\|A\| = \inf\{C \in \mathbf{R}_{\geq 0} \mid \forall \eta \in \mathbb{H}, \|A\eta\| \leq C\|\eta\|\}$. Nous noterons $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ l'ensemble des opérateurs de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{K}$, et nous abrègerons $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ en $\mathcal{L}(\mathbb{H})$.

Démonstration. Voir par exemple le livre de Conway [Con90]. ☺

§3.1.33 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}, \mathbb{K}, \mathbb{L}$ des espaces de Hilbert, $A, B \in \mathcal{L}(H, K)$, $C \in \mathcal{L}(K, L)$ et $\alpha \in \mathbf{C}$. Alors :

1. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;
3. $\|CA\| \leq \|C\| \|A\|$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{H}$. Alors, par l'inégalité triangulaire satisfaite par la norme sur $\mathbb{K}$, $\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$, ce qui permet de déduire le premier point. De plus, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, ce qui permet de montrer le second point. On déduit alors le dernier point de l'inégalité $\|CAx\| \leq \|C\| \|Ax\| \leq \|C\| \|A\| \|x\|$. $\odot$

§3.1.34 THÉORÈME.

Soit $\mathbb{H}, \mathbb{K}$ des espaces de Hilbert, et $A \in \mathcal{L}(H, K)$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(K, H)$ tel que :

$$\langle A\eta, \xi \rangle_{\mathbb{K}} = \langle \eta, A^* \xi \rangle_{\mathbb{H}}$$

Démonstration. Voir par exemple le livre de Murphy [Mur90] pour une preuve détaillée. La preuve classique est basée sur le théorème de représentation de Riesz qui énonce que pour toute forme linéaire ρ sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, il existe un élément $\xi_\rho \in \mathbb{H}$ tel que $\rho(\eta) = \langle \eta, \xi_\rho \rangle$. On obtient alors le résultat en appliquant le théorème de représentation de Riesz à la forme $\eta \mapsto \langle A\eta, \xi \rangle$. $\odot$

§3.1.35 REMARQUE. On a bien entendu $\|A\| = \|A^*\|$.

§3.1.36 PROPOSITION.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $(A + \alpha B)^* = A^* + \bar{\alpha} B^*$;
2. $(AB)^* = B^* A^*$;
3. $A^{**} = A$;
4. Si A est inversible, alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Démonstration. Voir par exemple le livre de Murphy [Mur90]. $\odot$

§3.1.37 PROPOSITION.

Si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, alors $\|A^* A\|^2 = \|A^*\|^2$.

Démonstration. Voir par exemple le livre de Murphy [Mur90]. $\odot$

§3.1.38 PROPOSITION.

Soit E un idempotent non nul sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est une projection : $\ker P = \text{im}(P)^\perp$;
2. E est la projection orthogonale de $\mathbb{H}$ sur $\text{im}(E)$;
3. $\|E\| = 1$;
4. E est hermitien : $E = E^*$;
5. E est normal : $EE^* = E^*E$;
6. $\langle Eh, h \rangle \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{H}$.

Démonstration. Voir le livre de Conway [Con90]. $\odot$

§3.1.39 Les topologies faibles et fortes sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$ induisent deux topologies sur $\mathcal{L}(\mathbb{H})$. Ces topologies sont définies comme les topologies de convergence point par point lorsque $\mathbb{H}$ est muni de l'une de ses deux topologies. Bien entendu, la norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ définit également une topologie. On caractérise ces topologies par la notion de convergence associée.

§3.1.40 DÉFINITION.

Sur $\mathcal{L}(\mathbb{H})$, on définit :

- la topologie de la norme : $A_n \rightarrow A$ en norme lorsque $\|A_n - A\|$ tend vers 0 ;

- la *topologie forte opérateur* : $A_n \rightarrow A$ fortement lorsque $\forall \xi \in \mathbb{H}, A_n \xi - A \xi$ tend fortement vers 0 (dans $\mathbb{H}$) ;
- la *topologie faible opérateur* : $A_n \rightarrow A$ faiblement lorsque $\forall \xi \in \mathbb{H}, A_n \xi - A \xi$ tend faiblement vers 0 (dans $\mathbb{H}$) ;

§3.1.41 On peut montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ est l'espace dual d'un espace noté $\mathcal{L}(\mathbb{H})_*$ contenant les *opérateurs à trace* (de manière générale, on verra — Proposition §3.3.20 — que toute algèbre de von Neumann possède un préduel). Le lecteur intéressé pourra consulter le livre de Murphy [Mur90] ou bien de Takesaki [Tak01] qui traitent de ce sujet. On énonce ici ce résultat uniquement afin de définir la topologie σ -faible. On rappelle que si A est un espace vectoriel topologique et A^* est le dual de A — l'ensemble des formes linéaires continues de A dans $\mathbf{C}$, on définit la *topologie faible** sur A comme la topologie de convergence point par point¹.

§3.1.42 DÉFINITION.

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. La topologie σ -faible sur $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ est définie comme la topologie faible* induite par le préduel $\mathcal{L}(\mathbb{H})_*$ de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$.

§3.1.43 REMARQUE. Si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert de dimension infinie dénombrable, $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ se plonge dans $\mathcal{L}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H})$ par le morphisme $x \mapsto x \otimes 1$. Il est alors possible de montrer que la restriction de la topologie faible opérateur de $\mathcal{L}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H})$ est la topologie σ -faible sur $\mathcal{L}(\mathbb{H})$.

3.2 Algèbres stellaires

Algèbres stellaires commutatives

Algèbres de Banach

§3.2.1 DÉFINITION (ALGÈBRE DE BANACH).

Une algèbre de Banach A est une algèbre associative sur le corps des complexes $\mathbf{C}$ qui est un espace normé complet et qui satisfait $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ pour tous $a, b \in A$ (cette condition garantit la continuité du produit).

§3.2.2 REMARQUE. Si une algèbre de Banach A contient une unité 1 (on dira que A est *unitale*), on peut supposer que $\|1\| = 1$. En effet, si ce n'est pas le cas, la norme opérateur des fonctions $b \mapsto ab$ définit une norme équivalente pour laquelle l'unité a pour norme 1.

§3.2.3 PROPOSITION (ADJONCTION D'UNITÉ - ALGÈBRES DE BANACH).

Étant donné une algèbre de Banach non-unitale A , on peut lui adjoindre une unité en définissant l'algèbre $A^+ = A \times \mathbf{C}$ avec la multiplication $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$. L'algèbre A^+ est alors une algèbre de Banach lorsqu'elle est munie de la norme

$$\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$$

Démonstration. La fonction $(a, \lambda) \mapsto \|a\| + |\lambda|$ définit bien une norme. De plus, si (a_n, λ_n) est une suite de Cauchy, alors a_n et λ_n sont toutes deux de Cauchy. On déduit alors de la complétude de A et de $\mathbf{C}$ que A^+ est complète pour cette norme, donc A^+ est une algèbre de Banach. ☺

§3.2.4 PROPOSITION.

L'ensemble des inversibles $A^\times$ d'une algèbre de Banach unitale A est ouvert.

Démonstration. On considère la série

$$c_b = \sum_{k=0}^{\infty} b^k$$

1. Une autre manière de définir la topologie faible* utilise le plongement de A dans son bi-dual A^{**} : chaque élément $a \in A$ définit donc une forme linéaire sur A^* notée θ_a , et la topologie faible* est la plus faible topologie sur A^* telle que les θ_a soient continus.

Cette série converge pour $\|b\| < 1$, et dans ce cas, $c_b(1-b) = (1-b)c_b = 1$. Si $x \in A^\times$, alors tout $y \in A$ tel que $\|x-y\| < 1/\|x^{-1}\|$ vérifie $\|1-x^{-1}y\| < 1$, et est par conséquent inversible. Donc la boule ouverte de rayon $1/\|x^{-1}\|$ ne contient que des inversibles. ☺

§3.2.5 COROLLAIRE.

Un idéal propre d'une algèbre de Banach unitale ne peut être dense.

Démonstration. Si un idéal est dense, il contient un inversible, et ne peut donc être propre. ☺

§3.2.6 DÉFINITION.

Soit A une algèbre de Banach unitale et $a \in A$. On définit le spectre de a , noté $\text{Spec}_A(a)$, comme l'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda \cdot 1_A - a \text{ non-inversible}\}$.

§3.2.7 PROPOSITION.

Soit A une algèbre de Banach unitale, et $a, b \in A$. Alors :

$$\text{Spec}_A(ab) \cup \{0\} = \text{Spec}_A(ba) \cup \{0\}$$

Démonstration. On montre que $1-ab$ est inversible si et seulement si $1-ba$ est inversible. Pour cela, on suppose $1-ab$ inversible et on pose $c = (1-ab)^{-1}$. On vérifie alors que $1+bca$ est l'inverse de $1-ba$. ☺

§3.2.8 PROPOSITION.

Soit A une algèbre de Banach unitale et $a \in A$ tel que $\text{Spec}_A(a) \neq \emptyset$. Pour tout polynôme complexe p , on a :

$$\text{Spec}_A(p(a)) = p(\text{Spec}_A(a))$$

Démonstration. Soit $\mu \in \mathbf{C}$. Il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ tels que :

$$p(\lambda) - \mu = \lambda_0(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Alors $p(a) - \mu = \lambda_0(a - \lambda_1) \dots (a - \lambda_n)$, et on en déduit que $p(a) - \mu$ est inversible si et seulement si $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$ le sont. Finalement, $\mu \in \text{Spec}_A(p(a))$ si et seulement si $\mu = p(\lambda)$ pour un $\lambda \in \text{Spec}_A(a)$. ☺

§3.2.9 PROPOSITION.

Soit A une algèbre de Banach unitale. Alors pour tout $a \in A$, $\text{Spec}_A(a) \neq \emptyset$.

Démonstration. On commence par montrer que si $\text{Spec}_A(a) = \emptyset$, la fonction $\lambda \mapsto (a - \lambda)^{-1}$ est différentiable et bornée sur $\mathbf{C}$. Si $\tau \in A^* = \mathcal{L}(A, \mathbf{C})$, alors $\lambda \mapsto \tau((a - \lambda)^{-1})$ est une fonction entière, donc constante par le Théorème de Liouville. On en déduit que $\tau((a - 1)^{-1}) = \tau(a^{-1})$, c'est-à-dire $\tau((a - 1)^{-1} - a^{-1}) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $\tau \in A^*$, on a $(a - 1)^{-1} - a^{-1} = 0$, c'est-à-dire $a = a - 1$, ce qui est contradictoire. ☺

§3.2.10 PROPOSITION.

Soit A une algèbre de Banach unitale, et $a \in A$. Alors $\text{Spec}_A(a)$ est fermé et borné.

Démonstration. La fonction $\lambda \mapsto \lambda 1_A - a$ est continue et l'ensemble des inversibles d'une algèbre de Banach est un ouvert. Donc le complémentaire de $\text{Spec}_A(a)$ est un ouvert puisqu'il est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. On en déduit que $\text{Spec}_A(a)$ est fermé.

Choisissons $\lambda > \|a\|$. Alors $\lambda - a$ est inversible si et seulement si $1 - a/\lambda$ est inversible. Or $b = \sum_{i \geq 0} (a/\lambda)^i$ est l'inverse de $1 - a/\lambda$. Donc $\text{Spec}_A(a)$ est borné. ☺

§3.2.11 PROPOSITION.

Soit A une algèbre de Banach unitale. Si tout élément non nul de A est inversible, alors $A = \mathbf{C}$.

Démonstration. Soit $a \in A$. Par la proposition précédente, $\text{Spec}_A(a) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \text{Spec}_A(a)$, par définition $\lambda - a$ est non inversible, donc égal à 0, et on en déduit que $\lambda = a$. ☺

§3.2.12 DÉFINITION.

Soit A une algèbre de Banach unitale et $a \in A$. On définit le *rayon spectral* de a par :

$$\text{rad}(a) = \sup_{\lambda \in \text{Spec}_A(a)} |\lambda|$$

§3.2.13 THÉORÈME.

Soit A une algèbre de Banach unitale, et $a \in A$. Alors $\text{rad}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration. Premièrement, si $\lambda \in \text{Spec}_A(a)$, alors $\lambda^n \in \text{Spec}_A(a^n)$ par la proposition §3.2.8. Donc $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$, et on obtient $\text{rad}(a) \leq \inf_{n \geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Soit maintenant $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1/\text{rad}(a)\}$. Si $\lambda \in \Delta$, alors $1 - \lambda a$ est inversible. Soit $\tau \in A^*$, et $f : \lambda \mapsto \tau((1 - \lambda a)^{-1})$. On montre que cette fonction est analytique sur Δ , et donc $f(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \lambda^n$. Si $|\lambda| < 1/\|a\|$, alors $\|\lambda a\| < 1$ et donc $(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \lambda^n a^n$. On a donc $\lambda_n = \tau(a^n)$, et $\tau(a^n) \lambda^n$ tend vers 0, ce qui permet d'affirmer que $\tau(a^n) \lambda^n$ est bornée. Comme nous n'avons pas fait d'hypothèses sur τ , on en déduit que $a^n \lambda^n$ est bornée, donc il existe M tel que $\|a^n \lambda^n\| \leq M$ quelque soit n . D'où $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}}/|\lambda|$. On a donc $\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1/|\lambda|$.

Comme $\text{rad}(a) \leq |\lambda|^{-1}$ implique $\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|^{-1}$, on a $\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \text{rad}(a)$.

Finalement, comme $\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \text{rad}(a) \leq \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \text{rad}(a)$. ☺

Algèbres stellaires

§3.2.14 Le but de cette section est d'introduire uniquement les notions d'algèbres stellaires nécessaires pour la suite, et ne constitue donc pas un cours sur les algèbres stellaires. Une bonne référence pour en savoir plus sur les algèbres stellaires est le livre de G. Murphy, *C*-algebras and operator theory* [Mur90].

§3.2.15 DÉFINITION (ALGÈBRE DE BANACH INVOLUTIVE).

Une algèbre de Banach involutive est une algèbre de Banach munie d'une *involution* $(\cdot)^* : A \rightarrow A$ vérifiant, pour $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$:

$$a^{**} = a, \quad (a + b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \quad \|a^*\| = \|a\|$$

§3.2.16 DÉFINITION (ALGÈBRE STELLAIRE).

Une *algèbre stellaire* (ou C^* -algèbre) est une algèbre de Banach involutive satisfaisant pour tout $a \in A$ l'égalité

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

§3.2.17 Si l'algèbre A de départ est une algèbre stellaire, on souhaiterait que l'algèbre unitarisée A^+ soit également une algèbre stellaire. Si l'involution définie sur A^+ est celle à laquelle on pense naturellement, c'est-à-dire $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$, la norme définie en §3.2.3 ne fait pas de A^+ une algèbre stellaire. On peut cependant montrer qu'il existe une norme qui fait de A^+ une algèbre stellaire.

§3.2.18 LEMME.

Si un espace vectoriel normé X possède un sous-espace complet Y de codimension finie, alors X est complet.

Démonstration. La preuve se fait par induction et on montre le résultat uniquement pour Y de codimension 1. Supposons Y de codimension 1 et fixons $u \in X - Y$. Soit $(x_n + \lambda_n u)$ une suite de Cauchy. Si $|\lambda_n| \rightarrow \infty$, le fait que $(x_n + \lambda_n u)$ soit bornée montre que $\lambda_n^{-1}(x_n + \lambda_n u) \rightarrow 0$, i.e. $-\lambda_n^{-1}x_n \rightarrow u$. Comme Y est complet, et donc clos, on obtient que $u \in Y$, une contradiction. On peut donc supposer que $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{C}$. Alors (x_n) doit être de Cauchy, et converge vers $x \in Y$. Donc $x_n \rightarrow x + \lambda u$ et X est complet. ☺

§3.2.19 PROPOSITION (ADJONCTION D'UNITÉ - ALGÈBRES STELLAIRES).

Soit A une algèbre stellaire non unitale. La fonction $\|(a, \lambda)\|_* = \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\}$ définit une norme sur $A^+ = A \times \mathbb{C}$ et A^+ est complète pour cette norme. De plus, si A est une algèbre stellaire, alors A^+ munie de la norme $\|\cdot\|_*$ et de l'involution $(a, \lambda) \mapsto (a^*, \bar{\lambda})$ est une algèbre stellaire.

Démonstration. On montre tout d'abord que l'on a bien défini une norme :

1. On a la sous-additivité :

$$\begin{aligned} \|(a, \lambda) + (b, \mu)\|_* &= \|(a + b, \lambda + \mu)\|_* \\ &= \sup\{\|(a + b)c + (\lambda + \mu)c\| : \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|ac + \lambda c\| : \|c\| \leq 1\} + \sup\{\|bc + \mu c\| : \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \|(a, \lambda)\|_* + \|(b, \mu)\|_* \end{aligned}$$

2. On a l'homogénéité :

$$\begin{aligned} \|\mu(a, \lambda)\|_* &= \|(\mu a, \mu \lambda)\|_* \\ &= \sup\{\|\mu ab + \mu \lambda b\| : \|b\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\mu(ab + \lambda b)\| : \|b\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\mu| \|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\} \\ &= |\mu| \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\} \\ &= |\mu| \|(a, \lambda)\|_* \end{aligned}$$

3. On a la séparation :

$$\begin{aligned} \|(a, \lambda)\|_* = 0 &\Leftrightarrow \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \|b\| \leq 1, \|ab + \lambda b\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall b, ab + \lambda b = 0 \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 0$,

$$\|(a, \lambda)\|_* = 0 \Leftrightarrow \forall b, -(a/\lambda)b = b$$

donc $-a/\lambda$ est une unité gauche de A , d'où $(-a/\lambda)^*$ est une unité droite de A , et alors $-a/\lambda = (-a/\lambda)(-a/\lambda)^* = (-a/\lambda)^*$ montre que $-a/\lambda$ est une unité de A , ce qui contredit les hypothèses. Donc $\lambda = 0$. On a alors $ab = 0$ pour tout $b \in A$, i.e. $a = 0$.

4. On a la sous-multiplicativité :

$$\begin{aligned} \|(a, \lambda)(b, \mu)\|_* &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda \mu)\|_* \\ &= \sup\{\|abc + \lambda bc + \mu ac + \lambda \mu c\| : \|c\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|a(bc + \mu c) + \lambda(bc + \mu c)\| : \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|ad + \lambda d\| : \|d\| \leq \|bc + \mu c\|, \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|ad + \lambda d\| \|bc + \mu c\| : \|d\| \leq 1, \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|ad + \lambda d\| : \|d\| \leq 1\} \sup\{\|bc + \mu c\| : \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \|(a, \lambda)\|_* \|(b, \mu)\|_* \end{aligned}$$

Remarquons que restreinte à A , la norme $\|\cdot\|_*$ est égale à la norme de A . En effet, la norme de $(a, 0)$ est égale à $\sup\{\|ab\| : \|b\| \leq 1\}$, donc $\|(a, 0)\|_* \leq \|a\|$ par la sous-multiplicativité de la norme. De plus, la propriété des algèbres stellaires nous donne $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|(a, 0)\|_* \|a^*\| = \|(a, 0)\|_* \|a\|$: on a $\|a^*a\| \leq \sup\{\|a^*ab\| : \|b\| \leq 1\} \leq \|a^*\| \|(a, 0)\|_*$, la première inégalité étant donnée par le fait que $b = a^*a/\|a^*a\|$ est de norme 1 et vérifie

$$\|a^*a\| = \|(a^*a)\|^2 \|a^*a\|^{-1} = \|(a^*a)^*(a^*a)\| \|a^*a\|^{-1} = \|(a^*a)(a^*a)\| \|a^*a\|^{-1} = \|a^*ab\|$$

Comme A est complète et de codimension 1 dans A^+ , on en déduit que A^+ est complète. De plus, A^+ est une algèbre stellaire :

$$\begin{aligned}
 \|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\|_* &= \sup\{\|a^*ab + \bar{\lambda}ab + \lambda a^*b + \bar{\lambda}\lambda b\| \mid \|b\| \leq 1\} \\
 &\geq \sup\{\|b^*a^*ab + \bar{\lambda}b^*ab + \lambda b^*a^*b + \bar{\lambda}\lambda b^*b\| \mid \|b\| \leq 1\} \\
 &\geq \sup\{\|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\| \mid \|b\| \leq 1\} \\
 &\geq \sup\{\|ab + \lambda b\|^2 \mid \|b\| \leq 1\} \\
 &\geq \|(a, \lambda)\|_*^2
 \end{aligned}$$

L'inégalité opposée étant une simple conséquence de la sous-multiplicativité. $\odot$

§3.2.20 PROPOSITION.

Si A est une algèbre stellaire et $a \in A$ est hermitien, alors $\text{rad}(a) = \|a\|$.

Démonstration. On utilise le fait que $\text{rad}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ pour tout élément d'une algèbre de Banach. Or, $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$, et donc $\|a^{2n}\| = \|a\|^{2n}$. D'où :

$$\text{rad}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2n}\|^{\frac{1}{2n}} = \|a\|$$

Donc $\text{rad}(a) = \|a\|$. $\odot$

§3.2.21 COROLLAIRE.

Il existe au plus une norme faisant d'une algèbre de Banach une algèbre stellaire.

Démonstration. Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes faisant de A une algèbre stellaire. On utilise le fait que pour tout $a \in A$, l'opérateur a^*a est hermitien :

$$\forall a \in A, \|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = \text{rad}(a^*a) = \|a^*a\|_2 = \|a\|_2^2 \quad \odot$$

§3.2.22 COROLLAIRE.

Un $*$ -homomorphisme ϕ d'une algèbre de Banach involutive A dans une algèbre stellaire B fait décroître la norme.

Démonstration. Quitte à prendre les unitarisations des algèbres, on peut les considérer unitales. Pour $a \in A$, on a $\text{Spec}(\phi(a)) \subset \text{Spec}(a)$, d'où :

$$\|\phi a\|^2 = \|(\phi a)^* \phi a\| = \|\phi(a^*a)\| = \text{rad}(\phi(a^*a)) \leq \text{rad}(a^*a) \leq \|a\|^2$$

D'où $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$. $\odot$

§3.2.23 COROLLAIRE.

Un $*$ -isomorphisme entre algèbres stellaires est isométrique.

La transformation de Gelfand pour les algèbres de Banach

§3.2.24 DÉFINITION.

Un espace de Hausdorff compact X définit naturellement une algèbre de Banach commutative unitale $\mathcal{C}(X)$: l'ensemble des fonctions continues $X \rightarrow \mathbf{C}$ avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

§3.2.25 DÉFINITION.

Un espace topologique X est dit *localement compact* si pour chaque point x il existe un compact $K_x \subset X$ contenant un voisinage de x .

§3.2.26 DÉFINITION (COMPACTIFICATION D'ALEXANDROFF).

Si X est un espace de Hausdorff localement compact, mais non compact, on définit la *compactification à un point* de X comme l'espace $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ dont la topologie est définie comme l'union des ouverts de X et des unions $G \cup \{\infty\}$ où G est le complémentaire d'un compact.

§3.2.27 THÉORÈME (C.F. [MUN00], p.183).

Un espace de Hausdorff X est localement compact si et seulement si $\tilde{X}$ est compact.

§3.2.28 DÉFINITION.

Un espace de Hausdorff localement compact (mais non compact) X définit une algèbre de Banach commutative $\mathcal{C}_0(X)$: l'ensemble des fonctions continues $X \rightarrow \mathbf{C}$ qui s'annulent à l'infini (i.e. l'ensemble des fonctions continues $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ telles que pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\{x \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$ soit compact) avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

C'est une algèbre de Banach non unitale.

§3.2.29 PROPOSITION.

Soit X un espace de Hausdorff localement compact mais non compact, et Y sa compactification à un point. On a $\mathcal{C}_0(X)^+ \cong \mathcal{C}(Y)$.

Démonstration. Il faut montrer que les fonctions continues qui s'annulent à l'infini peuvent être identifiées avec les fonctions continues f de la compactification à un point de X dans $\mathbf{C}$ avec $f(\infty) = 0$. L'extension d'une fonction f de $\mathcal{C}_0(X)$ par $f(\infty) = 0$ définit bien une fonction de $\mathcal{C}(Y)$. Inversement, une fonction $f \in \mathcal{C}(Y)$ telle que $f(\infty) = 0$ vérifie que $\{x \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$ est le complémentaire de $f^{-1}(]-\epsilon, \epsilon[)$ qui est un ouvert ne contenant pas ∞ , et est donc compact.

On définit ensuite, en notant $\tilde{f}$ l'extension de f à Y par $\tilde{f}(\infty) = 0$, $(f, \lambda) \in \mathcal{C}_0(X)^+ \mapsto \tilde{f}(x) + \lambda \in \mathcal{C}(Y)$. On vérifie facilement que c'est un $*$ -isomorphisme. ☺

Le théorème de Gelfand définit, pour toute algèbre de Banach commutative A , un morphisme de A dans une algèbre de fonctions sur un espace localement compact.

§3.2.30 DÉFINITION (CARACTÈRE).

Un caractère d'une algèbre de Banach A est un morphisme d'algèbre non nul $A \rightarrow \mathbf{C}$. L'ensemble des caractères (éventuellement vide) est noté $M(A)$ et est appelé le *spectre* de A .

§3.2.31 REMARQUE. Si A n'est pas unitale, un caractère μ de A s'étend en un caractère μ^+ de A^+ en posant $\mu((0, 1)) = 1$, et la fonction nulle s'étend en le caractère $(a, \lambda) \mapsto \lambda$. On identifie donc $M(A) \cup \{0\}$ avec $M(A^+)$.

§3.2.32 PROPOSITION.

Le spectre d'une algèbre de Banach A est inclus dans la sphère unité du dual A^* de A .

Démonstration. On remarque tout d'abord que si μ est un caractère de A , alors $\mu(a) \in \text{Spec}(a)$ pour tout $a \in A$. En effet, si $a - \mu(a)$ était inversible dans A , $\mu(a - \mu(a)) = 0$ serait inversible dans $\mathbf{C}$. On a donc $|\mu(a)| \leq \|a\|$, donc μ est borné (donc continu) et $\|\mu\| \leq 1$. De plus, on a $\mu(1) = 1$, donc $\|\mu\| = 1$. ☺

§3.2.33 DÉFINITION.

Si A est une algèbre de Banach, on munit $M(A)$ de la topologie induite par la topologie faible* sur A^* . On rappelle (voir §3.1.41) que la topologie faible* est celle de la convergence point par point sur les éléments de A .

§3.2.34 LEMME.

Le spectre $M(A)$ d'une algèbre de Banach commutative, muni de la topologie de Gelfand, est un espace localement compact.

Démonstration. Le théorème de Banach-Alaoglu affirme que la boule unité de A^* est faible* compacte. On montre donc simplement que $M(A) \cup \{0\}$ est clos pour la topologie faible*, et on en déduit qu'il est compact. On fixe pour cela $a, b \in A$, et on remarque que la fonction $\mu \mapsto \mu(a)\mu(b) - \mu(ab)$ est faible* continue sur la boule unité (les fonctions $\mu \mapsto \mu(a)$ sont faibles* continues car les μ sont continus : $\mu(a_\lambda)$ converge vers $\mu(a)$ pour toute suite généralisée $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$). Cette fonction étant nulle sur $M(A) \cup \{0\}$, elle est nulle sur sa clôture faible*. Dans ce cas, enlever $\{0\}$ donne un espace localement compact ou compact (si $\{0\}$ est isolé).

Si A est unitale, alors le point $\{0\}$ est isolé, car la fonction $\mu \mapsto \mu(1)$, qui est continue pour la topologie faible*, le sépare de $M(A)$. ☺

§3.2.35 DÉFINITION.

Soit A une algèbre de Banach commutative. La transformée de Gelfand de $a \in A$ est la fonction $\hat{a} : M(A) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\hat{a}(\mu) = \mu(a)$, c'est-à-dire $\hat{a}$ est l'évaluation au point a .

La transformation de Gelfand est la fonction $\mathcal{G} : A \rightarrow \mathcal{C}_0(M(A))$ définie par $\mathcal{G}(a) = \hat{a}$.

§3.2.36 THÉORÈME (GELFAND).

Soit A une algèbre de Banach commutative telle que $M(A)$ soit non vide. La transformation de Gelfand $\mathcal{G} : A \rightarrow \mathcal{C}_0(M(A))$ est un morphisme faisant décroître la norme.

La transformation de Gelfand pour les algèbres stellaires

§3.2.37 Dans une algèbre stellaire, on distingue certains types d'opérateurs.

§3.2.38 DÉFINITION.

Soit A une algèbre stellaire. On dit d'un élément $u \in A$ qu'il est :

- un *hermitien* — on dit également que u est *auto-adjoint* — si $u = u^*$;
- *normal* si $uu^* = u^*u$;
- une *projection* si $u = u^* = u^2$;
- une *isométrie partielle* si $uu^* = p$ où p est une projection.

Si A est unitale, on dira également que $u \in A$ est :

- un *unitaire* si $uu^* = u^*u = 1$;
- une *isométrie* si $uu^* = 1$;
- une *co-isométrie* si $u^*u = 1$.

§3.2.39 L'algèbre de Banach $\mathcal{C}(X)$ définie (pour X Hausdorff compact) dans la section précédente est en réalité une algèbre stellaire. En effet, en définissant $f^*(x) = \overline{f(x)}$, on vérifie que la propriété des algèbres stellaires est bien satisfaite :

$$\|f\|^2 = \sup_{x \in X} \{|f(x)|^2\} = \sup_{x \in X} \{\overline{f(x)}f(x)\} = \sup_{x \in X} \{f^*(x)f(x)\} = \|f^*f\|$$

De même, l'algèbre de Banach non unitale $\mathcal{C}_0(Y)$ pour Y Hausdorff localement compact est une algèbre stellaire non unitale lorsque munie de cette même involution.

§3.2.40 LEMME.

Soit a un hermitien dans une algèbre stellaire A . Alors $\mu(a) \in \mathbb{R}$ pour tout $\mu \in M(A)$.

Démonstration. On considère la série $u = \exp ia = \sum_{k=0}^{\infty} (ia)^k/k!$ qui est convergente dans A (ou dans A^+ si A est non unitale) avec $\|u\| \leq \exp \|a\|$. Alors $u^* = \exp -ia$ et alors $uu^* = 1 = u^*u$, i.e. u est un unitaire. On a donc, par la condition des algèbres stellaires, que $\|u^{-1}\|^2 = \|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$. Comme $\|u\| \leq 1$, on obtient $|\mu(u)| \leq 1$ et $|\mu(u)|^{-1} = |\mu(u^{-1})| \leq 1$, donc $|\mu(u)| = 1$. Comme par ailleurs on a $\mu(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(ia)^k/k! = \exp i\mu(a)$ on obtient $\mu(a) \in \mathbb{R}$. ☺

§3.2.41 REMARQUE. Soit A une algèbre stellaire. Si $a \in A$ n'est pas hermitien, on peut écrire $a = a_1 + ia_2$, avec $a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*)$ et $a_2 = \frac{1}{2}(a - a^*)$ deux hermitiens. On obtient alors, pour tout $\mu \in M(A)$:

$$\mu(a^*) = \mu(a_1 - ia_2) = \mu(a_1) - i\mu(a_2) = \overline{\mu(a)}$$

Cela nous donne $\hat{a}^*(\mu) = \overline{\hat{a}(\mu)}$, c'est-à-dire $\hat{a}^* = (\hat{a})^*$.

§3.2.42 LEMME.

Soit A une algèbre stellaire commutative, soit $a \in A$ et λ un élément du spectre de a . Si A est unitale, ou bien si A est non-unitale et $\lambda \neq 0$, il existe un caractère μ tel que $\mu(a) = \lambda$.

Démonstration. Le noyau d'un caractère μ d'une algèbre stellaire unitale commutative est un idéal maximal propre. Si J est un idéal contenant strictement $\ker \mu$, et si $a \in J/\ker \mu$, alors $\mu(a)$ a un inverse, et il existe $b \in A$ tel que $\mu(b)\mu(a) = 1$. Comme ba et $ba - 1_A$ sont dans J , $1_A \in J$.

Réciproquement, si J est un idéal maximal, alors il est clos. En effet, sa clôture est aussi un idéal et, comme nous l'avons déjà remarqué (paragraphe §3.2.5) un idéal propre dans une algèbre de Banach unitale ne peut être dense. Comme A/J est une algèbre de Banach unitale commutative sans idéaux propres (voir par exemple le livre de Cohn [Coh82], page 303), c'est le corps des complexes (on remarque que, pour tout $y \in A/J$ non nul, $y(A/J)$ est un idéal et qu'il contient nécessairement 1 donc tout élément est inversible, puis on utilise le théorème de Gelfand-Mazur). Il y a donc un unique caractère μ , l'application quotient, tel que $\mu^{-1}(0) = J$.

On obtient alors le résultat pour une algèbre unitale, puisque l'idéal non trivial $A(a - \lambda.1)$ est contenu dans un idéal maximal (une conséquence du lemme de Zorn). Pour le cas non unital, on fait le même raisonnement sur A^+ . ☺

§3.2.43 THÉORÈME (STONE-WEIERSTRASS).

Si X est un espace localement compact, et B est une sous algèbre close de $\mathcal{C}(X)$ telle que :

1. B sépare les points : pour tous $p \neq q$ dans X , il existe $y \in B$ tel que $y(p) \neq y(q)$;
2. il n'existe pas de point de X où B s'annule ;
3. B est close par conjugaison complexe.

Alors B est égale à $\mathcal{C}(X)$.

§3.2.44 THÉORÈME (GELFAND-NAIMARK).

Si A est une algèbre stellaire commutative, la transformée de Gelfand est un *-isomorphisme isométrique de A sur $\mathcal{C}_0(M(A))$.

Démonstration. On a déjà remarqué que la transformée de Gelfand était un *-morphisme puisque $\widehat{a^*} = (\widehat{a})^*$. Elle est isométrique car :

$$\|\widehat{a}\|^2 = \|\widehat{a^* a}\| = \|\widehat{a^*} \widehat{a}\| = \text{rad}(a^* a) = \|a^* a\| = \|a\|^2$$

où l'égalité $\|\widehat{a^* a}\| = \text{rad}(a^* a)$ est justifiée par le lemme précédent. En particulier, $\mathcal{G}$ est injective. Comme $\mathcal{G}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0(M(A))$ qui est *complète* puisque A est complète et $\mathcal{G}$ est isométrique, et par conséquent close. Comme $\mathcal{G}(A)$ vérifie les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass (les deux premières sont immédiates et la troisième est une conséquence du lemme §3.2.40), on en déduit que $\mathcal{G}$ est surjective. ☺

§3.2.45 THÉORÈME.

Soit u un unitaire dans une algèbre stellaire A . Si $\text{Spec}(u) \neq \mathbf{T}$ ($\mathbf{T}$ est le cercle unité), alors il existe $a \in A$ hermitien tel que $u = \exp ia$.

Démonstration. Quitte à remplacer u par λu avec $\lambda \in \mathbf{T}$, on peut supposer que $1 \notin \text{Spec}(u)$. Comme u est normal, on peut également supposer que A est commutative, quitte à remplacer A par l'algèbre stellaire engendrée par 1 et u . Soit $\log : \mathbf{C} -]-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{C}$ la branche principale du logarithme. Alors $g = \log \circ \mathcal{G}(u)$ est un élément de $\mathcal{C}_0(M(A))$ et $\exp g = \mathcal{G}(u)$. Comme $|\mathcal{G}(u)(\omega)| = 1$ pour tout $\omega \in M(A)$, la partie réelle de g est nulle, donc $g = ih$ pour $h = h^*$ dans $\mathcal{C}_0(M(A))$. Soit $a = \mathcal{G}^{-1}(h)$, alors $a = a^*$ et $u = \exp ia$ car $\mathcal{G}(u) = \exp ih = \exp i\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(\exp ia)$. ☺

§3.2.46 REMARQUE. Si $\|1 - u\| < 2$, alors $\text{Spec}(u) \neq \mathbf{T}$. En effet, $\|1 - u\| = \text{rad}(1 - u) = \sup\{|1 - \lambda| \mid \lambda \in \text{Spec}(u)\}$, d'où $-1 \notin \text{Spec}(u)$.

§3.2.47 REMARQUE. Si X et Y sont deux espaces de Hausdorff compacts, et $f : X \rightarrow Y$ est continue, la *transposée* :

$$\mathcal{C}f : \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X), \quad g \mapsto g \circ f$$

est un *-homomorphisme unital. De plus, si f est un homéomorphisme, alors $\mathcal{C}f$ est un *-isomorphisme unital.

§3.2.48 THÉORÈME.

Soit a un élément normal dans une algèbre stellaire unitale A , et $\iota : \text{Spec}(a) \rightarrow \mathbf{C}$ l'injection canonique du spectre dans $\mathbf{C}$. Il existe un unique $*$ -homomorphisme unital $\phi : \mathcal{C}(\text{Spec}(a)) \rightarrow A$ tel que $\phi(\iota) = a$. De plus, ϕ est isométrique et $\text{Im}(\phi)$ est la sous-algèbre stellaire de A engendrée par 1 et a .

Démonstration. Soit B l'algèbre stellaire commutative engendrée par 1 et a . La transformée de Gelfand $\mathcal{G} : B \rightarrow \mathcal{C}(M(B))$ est un $*$ -isomorphisme, tout comme $\mathcal{C}\hat{a} : \mathcal{C}(\text{Spec}(a)) \rightarrow \mathcal{C}(M(B))$ car $\hat{a} : M(B) \rightarrow \text{Spec}(a)$ est un homéomorphisme. Soit ϕ la composée $\mathcal{G}^{-1} \circ \mathcal{C}\hat{a}$, qui est un $*$ -isomorphisme, et donc isométrique. On a $\phi(\iota) = a$ car $\phi(\iota) = \mathcal{G}^{-1}(\mathcal{C}\hat{a}(\iota)) = \mathcal{G}^{-1}(\hat{a}) = a$, et ϕ est unital. Par le théorème de Stone-Weierstrass, on sait que $\mathcal{C}(\text{Spec}(a))$ est engendrée par 1 et ι , donc ϕ est l'unique $*$ -homomorphisme de $\mathcal{C}(\text{Spec}(a))$ dans A tel que $\phi(\iota) = a$. ☺

§3.2.49 L'unique $*$ -homomorphisme unital tel que $\phi(\iota) = a$ que l'on vient de définir est appelé le *calcul fonctionnel* en a . Si p est un polynôme, alors $\phi(p) = p(a)$, donc pour $f \in \mathcal{C}(\text{Spec}(a))$ on écrira $f(a)$ pour $\phi(f)$.

Si B est l'image de ϕ , alors B est l'algèbre engendrée par 1 et a . Si $\tau \in M(B)$, alors $f(\tau(a)) = \tau(f(a))$ car les fonctions $f \mapsto f(\tau(a))$ et $f \mapsto \tau(f(a))$ sont des $*$ -homomorphismes prenant les mêmes valeurs sur les éléments générateurs de B .

§3.2.50 THÉORÈME.

Soit a un élément normal d'une algèbre stellaire unitale A , et soit $f \in \mathcal{C}(\text{Spec}(a))$. Alors $\text{Spec}(f(a)) = f(\text{Spec}(a))$. De plus, si $g \in \mathcal{C}(\text{Spec}(f(a)))$, alors $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Démonstration. Soit B l'algèbre stellaire engendrée par 1 et a . Alors $\text{Spec}(f(a)) = \{\tau(f(a)) \mid \tau \in M(B)\} = \{f(\tau(a)) \mid \tau \in M(B)\} = f(\sigma(a))$.

Si C est la $*$ -sous-algèbre engendrée par 1 et $f(a)$, alors $C \subset B$ et pour tout $\tau \in M(B)$, la restriction τ_C est un caractère sur C . On a alors $\tau((g \circ f)(a)) = g(f(\tau(a))) = g(\tau_C(f(a))) = \tau_C(g(f(a))) = \tau(g(f(a)))$. Donc $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. ☺

Topologie Non-Commutative

§3.2.51 DÉFINITION.

On notera $\mathcal{C}\text{ompH}$ la catégorie dont les objets sont les espaces de Hausdorff compacts et les morphismes sont les fonctions continues.

On notera $\mathcal{S}\text{tell}_{\text{com}}^1$ la catégorie dont les objets sont les algèbres stellaires unitales commutatives et les morphismes sont les $*$ -homomorphismes.

§3.2.52 Nous avons vu que si $f : X \rightarrow Y$ est une fonction continue entre espaces de Hausdorff compacts, alors $\mathcal{C}f$ est un $*$ -homomorphisme unital. On vérifie de plus que si $g : Y \rightarrow Z$ est une autre fonction continue entre espaces de Hausdorff compacts, alors $\mathcal{C}(g \circ f) = \mathcal{C}f \circ \mathcal{C}g$. Comme de plus $\mathcal{C}\text{Id}_X = \text{Id}_X$, on a défini un foncteur contravariant $C : f \mapsto \mathcal{C}f$ de la catégorie $\mathcal{C}\text{ompH}$ dans la catégorie $\mathcal{S}\text{tell}_{\text{com}}^1$.§3.2.53 Il existe un autre foncteur contravariant, qui va de $\mathcal{S}\text{tell}_{\text{com}}^1$ dans $\mathcal{C}\text{ompH}$. La topologie de Gelfand est en effet définie comme la plus faible topologie pour laquelle les fonctions $\hat{a} : M(A) \rightarrow \mathbf{C}$ pour $a \in A$ sont continues. Elle possède donc une propriété universelle : une fonction $f : X \rightarrow M(A)$ est continue si et seulement si chaque $\hat{a} \circ f : X \rightarrow \mathbf{C}$ est continue.

§3.2.54 DÉFINITION.

Si $\phi : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme unital entre algèbres stellaires unitales commutatives, on note $M\phi$ la fonction $\mu \mapsto \mu \circ \phi$ de $M(B)$ sur $M(A)$. Alors $M\phi$ est une fonction continue puisque $\hat{a} \circ M(\phi) = \widehat{\phi(a)}$ est continue pour tout $a \in A$. Si $\psi : B \rightarrow C$ est un autre $*$ -homomorphisme unital, alors $M(\psi \circ \phi) = M\phi \circ M\psi$. C'est donc un foncteur contravariant de $\mathcal{S}\text{tell}_{\text{com}}^1$ dans $\mathcal{C}\text{ompH}$.

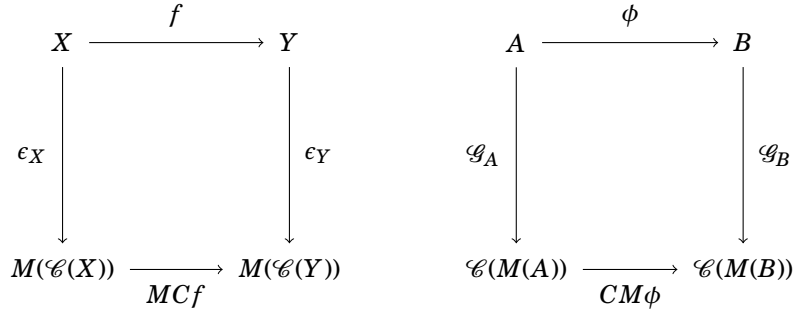


FIGURE 3.1 – Diagrammes de Naturalité

§3.2.55 THÉORÈME.

Soit X un espace de Hausdorff compact. Pour tout $x \in X$, on note ϵ_x le caractère sur $\mathcal{C}(X)$ défini par l'évaluation en x , i.e. $\epsilon_x(f) = f(x)$. Alors la fonction

$$X \rightarrow M(\mathcal{C}(X)), \quad x \mapsto \epsilon_x$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Cette fonction est continue, car si $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un net dans X convergeant vers un point x , alors $\lim_{\lambda \in \Lambda} f(x_\lambda) = f(x)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, donc la suite généralisée $(\epsilon_{x_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ est faible* convergente vers ϵ_x .

Cette fonction est injective, car si x, x' sont deux points distincts de X , par le lemme d'Urysohn, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ telle que $f(x) = 0$ et $f(x') = 1$, et donc $\epsilon_x(f) \neq \epsilon_{x'}(f)$.

On montre maintenant la surjectivité. Soit $\tau \in M(\mathcal{C}(X))$. Alors $N = \ker(\tau)$ est une sous-algèbre stellaire propre de $\mathcal{C}(X)$. De plus, N sépare les points de X car si x, x' sont des points distincts de X , il existe, comme on vient de le voir, une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ telle que $f(x) \neq f(x')$ et alors $g = f - \tau(f)$ est une fonction dans N telle que $g(x) \neq g(x')$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, on déduit qu'il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $f \in N$. Donc $(f - \tau(f))(x) = 0$, et $f(x) = \tau(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$. Par conséquent, $\tau = \epsilon_x$ et la fonction est une bijection continue entre espaces de Hausdorff compacts, donc c'est un homéomorphisme. $\odot$

§3.2.56 On a $(\epsilon_Y \circ f) : x \mapsto \epsilon_{f(x)}$, donc $(\epsilon_Y \circ f)(x)(g) = g(f(x))$. D'autre part, $(M\mathcal{C}f \circ \epsilon_X)(x) : M\mathcal{C}f(\epsilon_x)$ et donc $(M\mathcal{C}f \circ \epsilon_X)(x)(g) = (\epsilon_x \circ \mathcal{C}f)(g) = \epsilon_x(g \circ f) = g \circ f(x)$.

Au final, $\epsilon_Y \circ f = MCf \circ \epsilon_X$ pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$ continue, et on a défini une transformation naturelle bijective entre le foncteur MC et le foncteur identité sur $\mathcal{C}ompH$.

§3.2.57 Le théorème de Gelfand-Naimark définit une autre transformation naturelle $\mathcal{G}$ entre le foncteur identité sur $\mathcal{S}tell_{com}^1$ et le foncteur CM . En effet, le théorème nous dit que $a \mapsto \hat{a}$ est un isomorphisme de A sur $\mathcal{C}(M(A))$. De plus, si $\phi : A \rightarrow B$ est un *-homomorphisme unital, alors pour $\hat{a} \in \mathcal{C}(M(A))$ et $v \in M(B)$, on a

$$((CM\phi)\hat{a})v = \hat{a}((M\phi)v) = \hat{a}(v \circ \phi) = v(\phi(a)) = \widehat{\phi(a)}(v)$$

donc $(CM\phi)(\hat{a}) = \mathcal{G}_B(\phi(a))$ ou de manière équivalente $\mathcal{G}_B \circ \phi = CM\phi \circ \mathcal{G}_A$.

§3.2.58 PROPOSITION.

Les catégories $\mathcal{C}ompH$ et $\mathcal{S}tell_{com}^1$ sont équivalentes.

§3.2.59 Ce théorème se généralise au cas non unital. Il faut alors considérer l'ensemble des espaces de Hausdorff localement compacts muni des fonctions propres, c'est-à-dire des fonctions continues telles que l'image réciproque d'un compact est un compact. On note $\mathcal{LCH}$ la catégorie des espaces de Hausdorff localement compacts et des fonctions propres, et $\mathcal{S}tell_{com}$ la catégorie

des algèbres stellaires commutatives et des morphismes propres, c'est-à-dire les morphismes qui préservent les approximations de l'unité. On peut alors montrer que ces catégories sont équivalentes.

§3.2.60 Ce théorème et sa généralisation permettent de comprendre pourquoi la théorie des algèbres stellaires est parfois appelée la *topologie non-commutative*. En effet, l'équivalence de catégories que l'on vient de démontrer permet d'obtenir des définitions et constructions sur les algèbres stellaires équivalentes aux définitions et constructions sur les espaces de Hausdorff localement compacts. Par exemple, on peut montrer que la notion de compactification d'un espace correspond à l'unitarisation d'une algèbre.

Opérateurs positifs

§3.2.61 On peut déduire des résultats précédents certaines propriétés sur les spectres d'opérateurs particuliers. Ainsi, le spectre d'un hermitien est nécessairement inclus dans $\mathbf{R}$. De même, on peut montrer que le spectre d'une projection est inclus dans $\{0, 1\}$, et que le spectre d'un unitaire est inclus dans le cercle unité T de $\mathbf{C}$. Le spectre d'une isométrie partielle est inclus dans $T \cup \{0\}$, et celui d'une *symétrie partielle*, c'est-à-dire une isométrie partielle auto-adjointe, est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

§3.2.62 PROPOSITION.

Soit u un élément d'une algèbre stellaire A . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $uu^*u = u$;
2. $u^*uu^* = u^*$;
3. uu^* est une projection ;
4. u^*u est une projection.

Démonstration. Supposons que $uu^*u = u$. Alors $u^*uu^* = (uu^*u)^* = u^*$. Cela montre que 1 implique 2. On montre de la même manière que 2 implique 1.

De plus, si $uu^*u = u$, alors $(uu^*)^2 = uu^* = (uu^*)^*$, donc uu^* est une projection. On a donc que 1 implique 3. De même, 2 implique 4, donc 1 implique 4.

Il reste à montrer que si u^*u est une projection, alors $uu^*u = u$. On pose $v = uu^*u - u$ et on calcule :

$$\begin{aligned} v^*v &= (u^*uu^* - u^*)(uu^*u - u) \\ &= u^*uu^*uu^*u - u^*uu^*u - u^*uu^* + u^*u \\ &= (u^*u)^3 - 2(u^*u)^2 + u^*u \\ &= 0 \end{aligned}$$

De $v^*v = 0$, on déduit $v = 0$ car $\|v\|^2 = \|v^*v\| = 0$, et donc $uu^*u = u$. ☺

§3.2.63 Soit $A = \mathcal{C}_0(X)$ où X est un espace de Hausdorff localement compact. Alors les opérateurs hermitiens de A sont exactement les fonctions $f \in A$ telles que $f(X) \subset \mathbf{R}$. On a un ordre partiel sur ces fonctions : $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in X$. On peut alors définir les opérateurs positifs de A comme les hermitiens tels que $f \geq 0$. On peut alors montrer qu'un opérateur est positif si et seulement si il est de la forme $f = g\bar{g}$, et que dans ce cas f a une unique racine carrée positive dans A , à savoir la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$.

Nous allons maintenant voir comment généraliser cette définition aux algèbres stellaires quelconques (i.e. non commutatives).

§3.2.64 DÉFINITION.

Soit A une algèbre stellaire, et $a \in A$. On dit que a est *positif* si a est hermitien et $\text{Spec}_A(a) \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$. On notera A^+ l'ensemble des opérateurs positifs de A .

§3.2.65 PROPOSITION.

Soit A une algèbre stellaire et $a \in A^+$. Alors il existe un unique élément $b \in A^+$ tel que $b^2 = a$.

Démonstration. L'existence est une conséquence du calcul fonctionnel (Proposition §3.2.48).

Pour l'unicité, on suppose l'existence d'un élément $c \in A^+$ tel que $c^2 = a$. Comme c commute avec a , il commute avec b puisque ce dernier est une limite d'une suite de polynômes en a . On considère alors l'algèbre B (commutative) engendrée par b et c , et l'on note $\phi : B \rightarrow \mathcal{C}_0(\Omega)$ la représentation de Gelfand de B . Alors $\phi(b), \phi(c)$ sont des racines carrées positives de $\phi(a)$ dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$, donc elles sont égales. Ce qui implique que $b = c$. $\odot$

§3.2.66 Soit c un hermitien dans une algèbre stellaire A . Alors c^2 est un élément de A^+ , et on définit $|c| = (c^2)^{\frac{1}{2}}$, $c^+ = \frac{1}{2}(|c| + c)$ et $c^- = \frac{1}{2}(|c| - c)$. On peut alors montrer que $|c|, c^+, c^-$ sont des éléments positifs de A , et que $c = c^+ - c^-$ et $c^- c^+ = 0$.

§3.2.67 Soit a un hermitien tel que $\|a\| \leq 1$. Alors $1 - a^2 \in A^+$ et

$$u = a + i\sqrt{1 - a^2} \quad v = a - i\sqrt{1 - a^2}$$

sont deux unitaires tels que $a = \frac{u+v}{2}$. On en déduit que tout élément est combinaison linéaire de quatre unitaires, et que l'ensemble des unitaires d'une algèbre stellaire A engendrent A .

§3.2.68 PROPOSITION.

Tout opérateur d'une algèbre stellaire unitale est combinaison linéaire de quatre unitaires.

Démonstration. Soit A une algèbre stellaire unitale et $c \in A$. Alors $c = \|a\| \frac{a}{\|a\|} + i\|b\| \frac{b}{\|b\|}$, où a, b sont les hermitiens définis par :

$$a = \frac{c + c^*}{2} \quad b = \frac{c - c^*}{2i}$$

Comme $\frac{a}{\|a\|} = u_a + v_a$ où $u_a = a + i\sqrt{1 - a^2}$ et $v_a = a - i\sqrt{1 - a^2}$ sont des unitaires, et que de même $\frac{b}{\|b\|} = u_b + v_b$ où u_b et v_b sont des unitaires, on a :

$$c = \|a\|u_a + \|a\|v_a + i\|b\|u_b + i\|b\|v_b$$

Donc c est bien combinaison linéaire de quatre unitaires. $\odot$

§3.2.69 PROPOSITION.

Pour toute algèbre stellaire A , on a :

$$A^+ = \{u^*u \mid u \in A\}$$

Démonstration. L'inclusion $A^+ \subset \{u^*u \mid u \in A\}$ est donnée par l'existence d'une racine carrée. Il suffit donc de montrer l'autre inclusion.

On montre dans un premier temps que $a = 0$ lorsque $-a^*a \in A^+$. Puisque $\text{Spec}(-aa^*) - \{0\} = \text{Spec}(-a^*a) - \{0\}$, $-aa^* \in A^+$ car $-a^*a \in A^+$. On écrit $a = b + ic$ avec b, c hermitiens. Alors $a^*a + aa^* = 2b^2 + 2c^2$ donc $a^*a = 2b^2 + 2c^2 - aa^* \in A^+$. Donc $\text{Spec}(a^*a) \subset \mathbf{R}_{\geq 0} \cap (-\mathbf{R}_{\geq 0}) = \{0\}$. D'où $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \text{rad}(a^*a) = 0$ et donc $a = 0$.

Soit $a \in A$. Alors, si $b = a^*a$, b est un hermitien et on peut donc écrire $b = b^+ - b^-$ avec b^+, b^- positifs. Si $c = ab^-$, alors $-c^*c = -b^-a^*ab^- = -b^-(b^+ - b^-)b^- = (b^-)^3 \in A^+$. Donc $c = 0$, et par conséquent $(b^-)^3 = 0$. Comme b^- est positif, cela implique que $b^- = 0$. Finalement, on a montré que $a^*a = b^+$. $\odot$

Construction GNS

§3.2.70 La construction GNS (Gelfand-Naimark-Segal) est en quelque sorte l'équivalent du théorème de Gelfand pour les algèbres stellaires non commutatives. En effet, le théorème de Gelfand montre que toute algèbre stellaire commutative est l'algèbre des fonctions continues sur un espace localement compact. De la même manière, la construction GNS caractérise l'ensemble des algèbres stellaires (non nécessairement commutatives) en montrant que toute algèbre stellaire A peut être représentée comme une $*$ -sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ pour un certain espace de Hilbert $\mathbb{H}$. C'est de là que vient le terme « construction » : la preuve consiste à construire l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$ sur lequel il sera possible de représenter A .

§3.2.71 DÉFINITION (REPRÉSENTATION).

Une *représentation* d'une algèbre stellaire A est un couple $(\mathbb{H}, \phi)$ où $\phi : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est un $*$ -morphisme. Si ϕ est injectif, on dira que la représentation est *fidèle*.

§3.2.72 Soit maintenant τ une forme linéaire positive sur une algèbre stellaire A , c'est-à-dire que $\tau(A^+) \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$. On définit alors $N_\tau = \{a \in A \mid \tau(a^*a) = 0\}$. On peut alors montrer que N_τ est un idéal (gauche) fermé de A et que A/N_τ peut être muni d'un produit scalaire :

$$\langle a, b \rangle = \tau(b^*a)$$

On note alors $\mathbb{H}_\tau$ la complétion de A/N_τ par rapport à la norme induite.

§3.2.73 Soit $a \in A$ un opérateur. On définit $\phi(a)$ de A/N_τ sur A/N_τ par :

$$\phi(a)b = ab$$

On peut alors montrer que $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ et on définit ϕ_τ l'unique extension de ϕ à $\mathbb{H}_\tau$. On montre alors que ϕ_τ est un $*$ -morphisme.

§3.2.74 On a donc défini, pour chaque forme linéaire positive τ , une représentation $(\mathbb{H}_\tau, \phi_\tau)$. On peut alors définir la *représentation universelle* de A comme la somme directe sur l'ensemble des formes linéaires positives τ des représentations $(\mathbb{H}_\tau, \phi_\tau)$:

$$(\mathbb{H}_U, \phi_U) = \left(\bigoplus_{\tau} \mathbb{H}_\tau, \bigoplus_{\tau} \phi_\tau \right)$$

§3.2.75 THÉORÈME.

Soit A une algèbre stellaire. Alors A possède une représentation fidèle. En particulier, la représentation universelle de A est fidèle.

3.3 Algèbres de von Neumann

Facteurs

Définition

§3.3.1 DÉFINITION (ALGÈBRE DE VON NEUMANN).

Une algèbre de von Neumann est une $*$ -sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ close pour la topologie forte opérateur (SOT).

§3.3.2 Soit $M \subset \mathcal{L}(\mathbb{H})$. On définit le commutant de M (dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$) comme l'ensemble $M' = \{x \in \mathcal{L}(\mathbb{H}) \mid \forall m \in M, mx = xm\}$. On omettra la plupart du temps la précision de l'algèbre ambiante et on notera M' le commutant de M lorsque le contexte sera suffisamment clair. On notera de plus M'' le bi-commutant $(M')'$ de M .

§3.3.3 Le théorème suivant est la clef de voûte de la théorie des algèbres de von Neumann. Ce théorème est particulièrement élégant, puisqu'il permet de montrer l'équivalence entre une notion purement algébrique (être clos par passage au bi-commutant) et une notion purement topologique (être clos pour la topologie forte opérateur).

§3.3.4 THÉORÈME (THÉORÈME DU BI-COMMUTANT DE VON NEUMANN).

Soit M une $*$ -sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ telle que $1_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \in M$. Alors M est une algèbre de von Neumann si et seulement si $M = M''$.

§3.3.5 REMARQUE. Étant donné que la topologie forte opérateur (SOT) est plus faible que la topologie de la norme, une algèbre de von Neumann est également close pour la topologie de la norme, et par conséquent une algèbre stellaire. De plus, étant donné que M est le commutant d'un ensemble d'opérateurs, M contient nécessairement l'identité de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$, et est par conséquent une algèbre stellaire unital. Il est donc possible de définir le calcul fonctionnel continu pour tout opérateur normal de M .

Facteurs et Intégrales directes

§3.3.6 Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann. On définit le *centre* de $\mathfrak{M}$ comme l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$.

§3.3.7 DÉFINITION (FACTEUR).

Une *facteur* est une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ dont le centre est trivial, c'est-à-dire lorsque $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{M}}$.

§3.3.8 L'étude des algèbres de von Neumann peut être réduite à celle des facteurs. C'est l'un des résultats les plus importants, dû à Murray et von Neumann [MvN36] : ils ont montré que toute algèbre de von Neumann peut être écrite comme une *intégrale directe* de facteurs. Une intégrale directe est une somme directe continue, tout comme une intégrale est une somme continue. Une exposition complète de ce résultat se trouve dans le premier volume de Takesaki [Tak01], section IV.8, page 264.

§3.3.9 L'idée est la suivante. Si $\mathfrak{A}$ n'est pas un facteur, son centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ est une algèbre de von Neumann commutative non triviale (différente de $\mathbf{C}$). Supposons alors que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ est une algèbre *diagonale*, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble dénombrable I (éventuellement fini) et une famille $(p_i)_{i \in I}$ de projections minimales disjointes deux à deux telle que $\sum_{i \in I} p_i = 1$. Alors les algèbres $p_i \mathfrak{A}$ sont des facteurs, et l'on a $\mathfrak{A} = \bigoplus_{i \in I} p_i \mathfrak{A}$. Cependant, dans le cas général, le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ n'est pas nécessairement une algèbre diagonale, et peut contenir une sous-algèbre *diffuse*, c'est-à-dire sans projections minimales. Il est alors nécessaire de considérer une version continue de la somme directe : les intégrales directes.

§3.3.10 DÉFINITION.

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Une famille $(\mathbb{H}_x)_{x \in X}$ d'espaces de Hilbert est *mesurable* sur $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ lorsqu'il existe une partition dénombrable $(X_i)_{i \in I}$ de X telle que pour tout $i \in I$:

$$\exists \mathbb{K}, \forall x \in X_i, \mathbb{H}_x = \mathbb{K}$$

où $\mathbb{K}$ est soit $\mathbf{C}^n$ ($n \in \mathbf{N}$) soit $l^2(\mathbf{N})$.

Une section $(\xi_x)_{x \in X}$ ($\xi_x \in \mathbb{H}_x$) est mesurable lorsque sa restriction à chacune des partitions X_n est mesurable.

§3.3.11 DÉFINITION.

Soit $(\mathbb{H}_x)_{x \in X}$ une famille mesurable d'espaces de Hilbert sur un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \lambda)$. L'*intégrale directe* $\int_X^\oplus \mathbb{H}_x d\lambda(x)$ est l'espace de Hilbert dont les éléments sont les classes d'équivalence de sections mesurables modulo l'égalité presque partout, et le produit scalaire est défini par :

$$\langle (\xi_x)_{x \in X}, (\zeta_x)_{x \in X} \rangle = \int_X^\oplus \langle \xi_x, \zeta_x \rangle d\lambda(x)$$

§3.3.12 Tout comme les algèbres stellaires commutatives sont exactement les algèbres des fonctions continues sur les espaces de Hausdorff localement compacts, il est possible de montrer que toute algèbre de von Neumann commutative est l'algèbre $L^\infty(X, \mathcal{B}, \lambda)$ des fonctions mesurables essentiellement bornées sur un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \lambda)$.

§3.3.13 THÉORÈME.

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de von Neumann commutative. Alors il existe $(\mathbb{H}_x)_{x \in X}$ une famille mesurable d'espaces de Hilbert sur un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ telle que $\mathfrak{A}$ soit unitairement équivalente à l'algèbre $L^\infty(X)$ agissant sur l'espace $\int_X^\oplus \mathbb{H}_x d\lambda(x)$.

§3.3.14 Nous ne définirons pas ici ce qu'est une famille mesurable d'algèbres de von Neumann, ni ce qu'est une intégrale directe d'algèbres de von Neumann. Nous nous contentons d'énoncer le théorème fondamental que nous avons cité plus haut.

§3.3.15 THÉORÈME.

Toute algèbre de von Neumann est une intégrale directe de facteurs.

Démonstration. Voir le deuxième volume de Takesaki [Tak03a], Théorème IV.8.21 page 275.

☺

Théorème de Sakai

§3.3.16 Nous avons défini pour l'instant les algèbres de von Neumann comme des sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ où $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert séparable. Nous en avons donc donné une définition concrète, c'est-à-dire comme un ensemble d'opérateurs agissant sur un espace donné. Nous avons vu dans le cas des algèbres stellaires que celles-ci pouvaient être définies de manière abstraite, sans référence à un espace sous-jacent. De même, les algèbres de von Neumann peuvent être caractérisées de manière abstraite, un résultat dû à Sakai [Sak71].

§3.3.17 DÉFINITION.

Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann. Le *pré-dual* $\mathfrak{M}_*$ de $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des formes linéaires continues² pour la topologie σ -faible (Définition §3.1.42).

§3.3.18 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann. Alors il existe un isomorphisme isométrique entre $\mathfrak{M}$ et $(\mathfrak{M}_*)^*$ — le dual (en tant qu'espace de Banach) du pré-dual de $\mathfrak{M}$.

Démonstration. Voir le premier volume de Takesaki [Tak01], Théorème II.2.6, page 70. ☺

§3.3.19 La réciproque a été démontrée par Sakai [Sak71] et permet alors de caractériser exactement les algèbres de von Neumann parmi les algèbres stellaires.

§3.3.20 THÉORÈME.

Une algèbre stellaire $\mathfrak{A}$ est une algèbre de von Neumann si et seulement si il existe une algèbre de Banach B dont $\mathfrak{A}$ est le dual : $\mathfrak{A} = B^*$. L'algèbre B est de plus unique.

Démonstration. Voir le premier volume de Takesaki [Tak01], Théorème 3.5, page 133, ainsi que le Corollaire 3.9, page 135. ☺

Classification des facteurs

§3.3.21 Il existe une classification des facteurs fondée sur l'étude de l'ensemble des projections et leurs isomorphismes (isométries partielles). On rappelle qu'une projection est un opérateur p tel que $p^2 = p = p^*$. Si $\mathfrak{M}$ est un algèbre de von Neumann, on notera $\Pi(\mathfrak{M})$ l'ensemble des projections dans $\mathfrak{M}$. On dit que deux projections p, q sont disjointes lorsque $pq = 0$. On rappelle également qu'il existe un ordre partiel sur l'ensemble $\Pi(\mathcal{L}(\mathbb{H}))$ défini par $p \leq q$ si et seulement si $pq = p$. Si $\mathfrak{M}$ est une algèbre de von Neumann, la restriction de cet ordre partiel à $\Pi(\mathfrak{M})$ définit bien entendu un ordre partiel.

§3.3.22 Un opérateur u tel que u^*u est une projection (ou, de manière équivalente, uu^* est une projection) est une isométrie partielle (Proposition §3.2.62). Dans une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$, on peut définir une relation d'équivalence sur $\Pi(\mathfrak{M})$ par : $p \sim_{\mathfrak{M}} q$ lorsqu'il existe une isométrie partielle $u \in \mathfrak{M}$ telle que $uu^* = p$ et $u^*u = q$.

L'ordre partiel sur l'ensemble des projections induit un nouvel ordre partiel $\preceq_{\mathfrak{M}}$ sur les classes d'équivalence de projections, c'est-à-dire sur $\Pi(\mathfrak{M})/\sim_{\mathfrak{M}}$.

§3.3.23 REMARQUE. Comme nous l'avons déjà vu, $p \leq q$ signifie que $p\mathbb{H}$ est un sous-espace de $q\mathbb{H}$. Le fait que $p \sim_{\mathfrak{M}} q$ signifie que $p\mathbb{H}$ et $q\mathbb{H}$ sont *isomorphes intérieurement* (par rapport à $\mathfrak{M}$), c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme entre elles qui est un élément de $\mathfrak{M}$. Par conséquent, le fait que $p \preceq_{\mathfrak{M}} q$ signifie que $p\mathbb{H}$ est isomorphe *intérieurement* à un sous-espace de $q\mathbb{H}$, et donc que $p\mathbb{H}$ est en quelque sorte *intérieurement plus petit* que $q\mathbb{H}$.

§3.3.24 DÉFINITION.

Une projection p dans une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ est dite *infinie* (dans $\mathfrak{M}$) lorsqu'il existe $q < p$ (c'est-à-dire une sous-projection propre) telle que $q \sim_{\mathfrak{M}} p$. Une projection est dite *finie* lorsqu'elle n'est pas infinie.

2. On rappelle que l'on nomme généralement *forme linéaire sur un espace vectoriel* V une application linéaire de V dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un élément du dual de V . Dans le cas où V est un espace vectoriel topologique, les éléments du dual topologique de V sont donc les formes linéaires continues.

§3.3.25 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann. Alors $\mathfrak{M}$ est un facteur si et seulement si la relation $\lesssim_{\mathfrak{M}}$ est un ordre total.

Démonstration. Voir le premier volume de Takesaki [Tak01], Proposition V.1.3 page 291 et Théorème V.1.8 page 293. ☺

Pour énoncer le théorème suivant, nous utiliserons une légère variante de la notion usuelle de type d'ordre : nous distinguerons l'élément noté ∞ de tout autre élément, considérant que ∞ représente une classe de projections infinies. Par exemple, $\{0,1\}$ et $\{0,\infty\}$ doivent être considérés comme des types d'ordre distincts puisque le premier ne contient pas d'éléments infinies contrairement au second.

§3.3.26 PROPOSITION (TYPE D'UN FACTEUR).

Soit $\mathfrak{M}$ un facteur. On dira que :

- $\mathfrak{M}$ est de type I_n lorsque $\lesssim_{\mathfrak{M}}$ est du même type d'ordre que $\{0,1,\dots,n\}$;
- $\mathfrak{M}$ est de type I_∞ lorsque $\lesssim_{\mathfrak{M}}$ est du même type d'ordre que $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$;
- $\mathfrak{M}$ est de type II_1 lorsque $\lesssim_{\mathfrak{M}}$ est du même type d'ordre que $[0,1]$;
- $\mathfrak{M}$ est de type II_∞ lorsque $\lesssim_{\mathfrak{M}}$ est du même type d'ordre que $\mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- $\mathfrak{M}$ est de type III lorsque $\lesssim_{\mathfrak{M}}$ est du même type d'ordre que $\{0,\infty\}$, c'est-à-dire que toutes les projections non nulles sont infinies.

De plus, $\lesssim_{\mathfrak{M}}$ ne peut être d'un autre type d'ordre.

Démonstration. Voir le premier volume de Takesaki [Tak01], Corollaire V.1.20 page 297. ☺

On peut montrer qu'un facteur de type I_n est isomorphe à $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$, l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes. Un facteur de type I_∞ est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{H})$.

§3.3.27 REMARQUE. Suivant la remarque précédente §3.3.23, lorsque nous nous restreignons à une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$, nous perdons nécessairement des opérateurs, et plus particulièrement des isométries partielles. Il y a une analogie à faire ici avec le fait qu'il soit possible de trouver des ensembles non dénombrables dans un modèle dénombrable de la théorie des ensembles (paradoxe de Skolem). L'explication de ce semblant de contradiction est qu'un ensemble X est *intérieurement* non-dénombrable car il n'existe pas de bijection à l'intérieur du modèle entre ω et X , mais il reste *extérieurement* dénombrable car il existe une telle bijection à l'extérieur du modèle. Ici, nous sommes dans une situation similaire : il se peut que les sous-espaces $p\mathbb{H}$ et $q\mathbb{H}$ définis par des projections p, q soient isomorphes, mais qu'il faille *sortir* de $\mathfrak{M}$ pour s'en rendre compte (c'est-à-dire que toute isométrie partielle de $p\mathbb{H}$ sur $q\mathbb{H}$ est à l'extérieur de $\mathfrak{M}$). Les sous-espaces sont donc *non isomorphes* du point de vue de $\mathfrak{M}$, même s'ils le sont du point de vue de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$.

§3.3.28 DÉFINITION.

Une *trace* τ sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ est une fonction de $\mathfrak{M}^+$ dans $[0,\infty]$ satisfaisant :

1. $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$ pour tous $x, y \in \mathfrak{M}^+$;
2. $\tau(\lambda x) = \lambda \tau(x)$ pour tous $x \in \mathfrak{M}^+$ et $\lambda \geq 0$;
3. $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$.

On dira que τ est :

- *fidèle* si $\tau(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ dans $\mathfrak{M}^+$;
- *finie* lorsque $\tau(1) < \infty$;
- *semi-finie* lorsque pour tout élément x de $\mathfrak{M}^+$ il existe un élément $y \in \mathfrak{M}^+$ tel que $x - y \in \mathfrak{M}^+$ (on dit que x majore y) et $\tau(y) < \infty$;
- *normale* lorsque $\tau(\sup\{x_i\}) = \sup\{\tau(x_i)\}$ pour toute suite généralisée croissante et bornée $\{x_i\}$ dans $\mathfrak{M}^+$.

§3.3.29 THÉORÈME.

Si $\mathfrak{M}$ est un facteur fini (c'est-à-dire que l'identité est finie), alors il existe une trace τ fidèle, normale et finie. De plus, toute autre trace ρ fidèle, normale et finie est nécessairement proportionnelle à τ .

Si $\mathfrak{M}$ est de type II_1 , on appellera trace normalisée l'unique trace T fidèle, normale et finie telle que $T(1) = 1$.

Démonstration. Voir le premier volume de Takesaki [Tak01], Théorème V.2.6 page 312. ☺

§3.3.30 REMARQUE. Puisque les opérateurs positifs dans $\mathfrak{M}$ génèrent l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$, une trace finie τ s'étend de manière unique à une forme linéaire positive sur $\mathfrak{M}$ que l'on notera abusivement τ . En particulier, tout opérateur a dans un facteur de type II_1 a une trace (finie).

§3.3.31 DÉFINITION.

Une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ est *hyperfinie* s'il existe une famille dirigée $\mathfrak{M}_i$ de $*$ -sous-algèbres de $\mathfrak{M}$ de dimension finie telle que l'union $\cup_i \mathfrak{M}_i$ est dense dans $\mathfrak{M}$ pour la topologie σ -faible.

§3.3.32 REMARQUE. L'hyperfinitude d'un facteur $\mathfrak{M}$ doit être comprise comme le fait que les opérateurs dans $\mathfrak{M}$ peuvent être approximés par des matrices — c'est-à-dire par des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert de dimension finie.

§3.3.33 THÉORÈME.

Le facteur hyperfini $\mathfrak{R}$ de type II_1 est unique à isomorphisme près.

Démonstration. Voir le troisième volume de Takesaki [Tak03b], Théorème XIV.2.4 page 97. ☺

§3.3.34 THÉORÈME.

Le facteur hyperfini $\mathfrak{R}_{0,1}$ de type II_∞ est unique à isomorphisme près. En particulier, il est isomorphe à l'algèbre de von Neumann définie comme le produit tensoriel $\mathcal{L}(\mathbb{H}) \otimes \mathfrak{R}$.

Démonstration. Voir le troisième volume de Takesaki [Tak03b], Théorème XVI.1.22 page 236. ☺

Algèbre d'un Groupe et Produits Croisés

§3.3.35 DÉFINITION.

Une action d'un groupe topologique G sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ est un homomorphisme continu de G dans $\text{Aut}(\mathfrak{M})$.

§3.3.36 DÉFINITION (PRODUIT CROISÉ).

Soit $(\mathbb{H}, \rho)$ une représentation d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$, G un groupe localement compact, et α une action de G sur $\mathfrak{M}$. Soit $\mathbb{K} = L^2(G, \mathbb{H})$ l'espace de Hilbert des fonctions de G dans $\mathbb{H}$ de carré sommable. On définit des représentations π_α de $\mathfrak{M}$ et λ de G sur $\mathbb{K}$ comme suit :

$$\begin{aligned} (\pi_\alpha(x).\xi)(g) &= \rho(\alpha(g)^{-1}(x))\xi(g) \\ (\lambda(g).\xi)(h) &= \xi(g^{-1}h) \end{aligned}$$

L'algèbre de von Neumann sur $\mathbb{K}$ engendrée par $\pi_\alpha(\mathfrak{M})$ et $\lambda(G)$ est appelée le *produit croisé* de la représentation $(\mathbb{H}, \rho)$ de $\mathfrak{M}$ par α et sera notée $(\mathbb{H}, \rho) \rtimes_\alpha G$.

§3.3.37 DÉFINITION.

Le produit croisé d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ par une action α d'un groupe localement compact G — noté simplement $\mathfrak{M} \rtimes_\alpha G$ — est défini comme le produit croisé de la représentation standard de $\mathfrak{M}$ (voir Théorème §3.3.54) par α .

§3.3.38 THÉORÈME (TAKESAKI [TAK03A], THEOREM 1.7 PAGE 241).
 Soit $(\mathbb{H}, \rho)$ et $(\mathbb{K}, \rho')$ deux représentations fidèles d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$, et α une action d'un groupe localement compact G sur $\mathfrak{M}$. Il existe alors un isomorphisme entre les algèbres $(\mathbb{H}, \rho) \rtimes_{\alpha} G$ et $(\mathbb{K}, \rho') \rtimes_{\alpha} G$.

§3.3.39 DÉFINITION (ALGÈBRE D'UN GROUPE).
 Soit G un groupe. On définit l'algèbre de von Neumann de G comme le produit croisé $\mathbf{C} \rtimes_{\alpha} G$, où $\alpha(g) = \text{Id}$ pour tout $g \in G$.

§3.3.40 DÉFINITION (GROUPE I.C.C.).
 Un groupe est dit I.C.C. (pour *Infinite Conjugacy Class*) lorsque la classe de conjugaison de tout élément (en dehors de l'identité) est infinie.

§3.3.41 PROPOSITION.
 L'algèbre de von Neumann $\mathbf{C} \rtimes G$ d'un groupe G est un facteur si et seulement si G est I.C.C.

Démonstration. Voir par exemple dans le livre de Sinclair et Smith [SS08]. ☺

§3.3.42 DÉFINITION (GROUPE MOYENNABLE).
 Un groupe topologique de Hausdorff localement compact est *moyennable* lorsqu'il existe une forme $\phi : L^{\infty}(G, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ qui est :
 – bornée et telle que $\phi(1) = 1$;
 – positive : si $\forall g \in G, f(g) \geq 0$, alors $\phi(f) \geq 0$;
 – G -invariante à gauche : pour tout $g \in G$, $\phi(g.f) = \phi(f)$ où $f.g : G \rightarrow \mathbf{R}$ est définie par $h \mapsto f(g^{-1}h)$.

§3.3.43 Par exemple, les groupes commutatifs sont moyennables, et la classe des groupes moyennables est close pour un certain nombre d'opérations, comme par exemple le produit semi-direct (le lecteur peut consulter par exemple le livre de Lück [Lüc02] pour plus de détails).

§3.3.44 THÉORÈME.
 L'algèbre de von Neumann $\mathbf{C} \rtimes G$ d'un groupe G est hyperfinie si et seulement si G est moyennable.

Démonstration. Voir par exemple dans le livre de Sinclair et Smith [SS08]. ☺

§3.3.45 DÉFINITION (GROUP MEASURE SPACE CONSTRUCTION).
 Soit (Ω, μ) un espace mesuré standard σ -fini, et G un groupe séparable localement compact agissant sur (Ω, μ) par l'action T . Alors l'action T induit une action α de G sur l'algèbre de von Neumann commutative $L^{\infty}(\Omega, \mu)$ par :

$$\alpha_g(a)(\omega) = a(T_g^{-1}(\omega)) \quad g \in G, a \in L^{\infty}(\Omega, \mu), \omega \in \Omega$$

Le produit croisé $L^{\infty}(\Omega, \mu) \rtimes_{\alpha} G$ correspond à la construction nommée *group-measure space construction* introduite par Murray et von Neumann [MvN36] associée au triplet (Ω, μ, G) selon l'action T .

§3.3.46 DÉFINITION (ACTIONS LIBRES ET ERGODIQUES).
 On dit qu'une action T de G sur (Ω, μ) est *libre* si pour tout sous-ensemble compact K de G tel que $1 \notin K$ et pour tout borélien E de Ω avec $\mu(E) > 0$, il existe un borélien $F \subset E$ tel que $\mu(F) > 0$ et $T_s(F) \cap F = \emptyset$ pour tout $s \in K$.

L'action T est dite *ergodique* si $\forall s \in G, T_s(E) = E$ implique $\mu(E) = 0$ ou $\mu(\Omega - E) = 0$.

§3.3.47 PROPOSITION (THÉORÈME 1.7, [TAK03B] P.7).
 Si l'action α de G sur (Ω, μ) est libre et ergodique, alors $\mathfrak{R} = L^{\infty}(\Omega, \mu) \rtimes_{\alpha} G$ est un facteur. De plus, il est de type II_{∞} si et seulement si

1. l'action n'est pas transitive ;

2. il existe une mesure ν équivalente à μ telle que

$$\delta_G(s) \frac{d\nu \circ T_s}{d\nu}(\omega) = 1 \quad \forall s \in G, \quad \forall \omega \in \Omega$$

où δ_G est la fonction modulaire³ de G ;

3. lorsque G est discret, μ est une mesure infinie.

§3.3.48 Une généralisation de cette construction a été introduite par Krieger [Kri70] qui a défini, étant donné une relation d'équivalence ergodique S , le *facteur de Krieger* $\mathfrak{K}(S)$. Cette construction est assez complexe, et nous nous contenterons d'utiliser quelques résultats. Nous ne définirons pas les facteurs de Krieger explicitement, et renvoyons le lecteur au troisième volume du livre de Takesaki [Tak03b] pour les preuves des théorèmes qui suivent.

§3.3.49 PROPOSITION (PROPOSITION 4.9, [TAK03B] P.71).

Soit G un groupe discret moyennable agissant sur un espace mesuré standard σ -fini (X, μ) par des transformations non singulières⁴. Alors le groupoïde mesuré principal induit $\{\mathcal{G}, X, \mu\}$ est moyennable.

§3.3.50 THÉORÈME (ZIMMER [ZIM77]).

Un facteur de Krieger est hyperfini si et seulement si la relation d'équivalence ergodique correspondante est moyennable.

§3.3.51 COROLLAIRE.

L'algèbre de von Neumann engendrée par l'action d'un groupe discret moyennable agissant sur un espace mesuré σ -fini par des transformations non-singulières est un facteur hyperfini.

Démonstration. Par définition, une relation d'équivalence ergodique est moyennable si et seulement si son groupoïde mesuré principal l'est. Le résultat est donc une conséquence triviale de la Proposition §3.3.49 et du Théorème §3.3.50. ☺

Nous allons définir le facteur $l^\infty(\mathbf{R}, \mu) \rtimes G$, où μ est la mesure de Lebesgue et G est le groupe des translations rationnelles. Nous allons montrer qu'il s'agit du facteur hyperfini de type II_∞ .

§3.3.52 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{R}_{0,1}$ l'algèbre de von Neumann définie par $l^\infty(\mathbf{R}, \mu) \rtimes \mathbf{Q}$, où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, et $\mathbf{Q}$ est le groupe des nombres rationnels agissant sur $\mathbf{R}$ par translation. Alors $\mathfrak{R}_{0,1}$ est le facteur hyperfini de type II_∞ .

Démonstration. Remarquons que dans la construction le groupe G est supposé localement compact, donc topologique. On considérera $\mathbf{Q}$ muni de la topologie discrète. On montre que l'action de G sur $L^\infty(\mathbf{R}, \mu)$ est libre et ergodique. Ceci montrera, par la Proposition §3.3.47, que $\mathfrak{R}_{0,1}$ est un facteur.

- **Liberté.** On choisit un sous-ensemble compact $K \subset \mathbf{Q}^*$ et un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbf{R}$ avec $\mu(E) > 0$. Alors, puisque K est compact, il existe un élément m de K tel que pour tout $x \in K$, $|m| \leq |x|$. De plus, puisque $\mu(E) > 0$, il existe au moins un intervalle $[x_0, z_0]$, avec $z_0 = x_0 + |m|/2$ tel que $F = E \cap [x_0, z_0]$ vérifie $\mu(F) > 0$. Alors, puisque $F \cap T_g(F) = \emptyset$ pour tout $g \in K$, l'action de $\mathbf{Q}$ est libre.

3. La notion de fonction modulaire est liée à celle de *mesure de Haar*. On rappelle qu'une mesure de Haar sur un groupe topologique G est une mesure de Borel μ invariante par translation à gauche : $\mu(gA) = \mu(A)$ pour tout $g \in G$ et tout ensemble mesurable A de G . L'existence de telles mesures est assurée dans le cas où G est un groupe localement compact, et si μ, μ' sont deux mesures de Haar sur G , alors $\mu = \alpha \mu'$ pour un nombre réel positif α que l'on notera abusivement μ/μ' . Comme une translatée à droite $\mu.h : A \mapsto \mu(Ah)$ d'une mesure de Haar μ est toujours une mesure de Haar, on peut alors définir le morphisme de groupe $\delta_G : G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}^*$ par $\delta_G(h) = \mu/(\mu.h)$. Le morphisme δ_G est appelé la *fonction modulaire* de G .

4. On rappelle que T est une transformation non-singulière si elle est bijective, bi-mesurable, et satisfait $\mu(T^{-1}B) = 0 \Leftrightarrow \mu(B) = 0$.

- **Ergodicité.** On suppose qu'il existe un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbf{R}$ tel que $T_g(E) = E$ pour tout $g \in \mathbf{Q}$. On définit une mesure μ_E par $\mu_E(X) = \mu(E \cap X)$, pour tout $X \in \mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est la σ -algèbre des boréliens de la droite réelle. On a alors $\mu_E(T_g X) = \mu(E \cap T_g X) = \mu(T_{g^{-1}} E \cap X) = \mu(E \cap X) = \mu_E(X)$. Donc tous les intervalles de la forme $[a, a+1[$, où $a \in \mathbf{Q}$ ont la même mesure $\mu_E([a, a+1]) = c$. De plus, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\mu_E([a, a+1/n]) = c/n$ pour tout $a \in \mathbf{Q}$ en écrivant $[a, a+1[$ comme l'union disjointe de n copies de l'intervalle $[a, a+1/n[$. Puisque l'ensemble $\mathcal{S}$ des boréliens de la droite réelle est engendré par ces intervalles, on obtient $\mu_E(X) = c\mu(X)$ pour tout $X \in \mathcal{S}$. En posant $X = E^c$, on a $0 = \mu(E \cap E^c) = \mu_E(E^c) = c\mu(E^c)$. Donc, soit $c = 0$ soit $\mu(E^c) = 0$. Puisque $c = 0$ implique que $\mu(E) = 0$, on a montré que l'action de $\mathbf{Q}$ est ergodique.

De plus, puisqu'il est clair que l'action de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{R}$ n'est pas transitive et qu'elle laisse la mesure invariante, et puisque $\mu(\mathbf{R}) = \infty$ et $\mathbf{Q}$ est unimodulaire⁵, on en déduit que $\mathfrak{N}_{0,1}$ est un facteur de type II_∞ .

Le groupe $\mathbf{Q}$ est considéré avec la topologie discrète, et il est évidemment moyennable (il est commutatif). De plus, il agit sur $(\mathbf{R}, \mu)$ par les translations $T_q : x \mapsto x + q$ pour $x \in \mathbf{R}$ et $q \in \mathbf{Q}$ qui sont clairement des transformations non-singulières. Par le Corollaire §3.3.51 on peut alors conclure que $\mathfrak{N}_{0,1}$ est le facteur hyperfini de type II_∞ . ☺

Représentation Standard

§3.3.53 L'un des résultats majeurs relativement récent dans la théorie des algèbres de von Neumann est que toute algèbre de von Neumann admet une représentation standard satisfaisant certaines propriétés.

§3.3.54 THÉORÈME (HAAGERUP [HAA75]).

Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann. Alors il existe un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, une algèbre de von Neumann $\mathfrak{S} \subset \mathcal{L}(\mathbb{H})$, une involution antilinéaire isométrique $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ et un cône $\mathfrak{P}$ clos pour $(\cdot)^*$ tels que :

- $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{S}$ sont isomorphes ;
- $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$;
- $JaJ = a^*$ pour $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$;
- $Ja = a$ pour $a \in \mathfrak{P}$;
- $aJaJ\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ pour tout $a \in \mathfrak{M}$.

Le quadruplet $(\mathfrak{S}, \mathbb{H}, J, \mathfrak{P})$ est la forme standard de l'algèbre $\mathfrak{M}$.

Démonstration. Voir le second volume de Takesaki [Tak03a], Section IX.1, page 142. ☺

§3.3.55 Dans le cas d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ munie d'une trace fidèle, normale et semi-finie, il existe une construction d'une représentation standard relativement simple à comprendre. On définit l'idéal $\mathfrak{n}_\tau = \{x \in \mathfrak{M} \mid \tau(x^*x) < \infty\}$ (on remarque que dans le cas d'une algèbre finie, $\mathfrak{n}_\tau = \mathfrak{M}$). On considère alors la forme $(\cdot, \cdot)$ sur $\mathfrak{M}$ définie par :

$$(x, y) = \tau(y^*x)$$

Il s'agit d'une forme sesquilinéaire par la linéarité de la trace et l'antilinéarité de l'involution. Comme de plus x^*x est un opérateur positif, $\tau(x^*x) \geq 0$. On a donc défini un produit scalaire sur $\mathfrak{n}_\tau$, et on définit alors l'espace de Hilbert $L^2(\mathfrak{M}, \tau)$ comme la complétion de $\mathfrak{n}_\tau$ ($\mathfrak{M}$ dans le cas d'une algèbre finie) muni de la distance induite par la norme $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}$.

§3.3.56 On peut alors montrer que pour tout élément $a \in \mathfrak{M}$ et tout élément $x \in \mathfrak{n}_\tau$:

$$\begin{aligned} \|ax\|_2 &\leq \|a\| \|x\|_2 \\ \|xa\|_2 &\leq \|a\| \|x\|_2 \end{aligned}$$

On note alors π_τ (resp. π'_τ) la représentation de $\mathfrak{M}$ sur $L^2(\mathfrak{M}, \tau)$ par multiplication à gauche (resp. à droite).

5. Un groupe G est unimodulaire lorsque la fonction modulaire δ_G est constante égale à 1. En particulier, tout groupe commutatif est unimodulaire.

§3.3.57 On remarque que l'opération $(\cdot)^*$ est une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_2$. Elle s'étend donc à une isométrie antilinéaire $J : L^2(\mathfrak{M}, \tau) \rightarrow L^2(\mathfrak{M}, \tau)$. On montre alors que :

- π_τ (resp. π'_τ) est une représentation (resp. antireprésentation⁶) fidèle ;
- $\pi_\tau(\mathfrak{M})' = \pi'_\tau(\mathfrak{M})$ et $\pi'_\tau(\mathfrak{M})' = \pi_\tau(\mathfrak{M})$;
- $J\pi_\tau(a)J = \pi'_\tau(a^*)$ pour tout $a \in \mathfrak{M}$.

Sous Algèbres Commutatives Maximales

§3.3.58 Nous commençons par énoncer un théorème utile affirmant que deux sous algèbres commutatives maximales diffuses de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ sont unitairement équivalentes. Nous utiliserons ce résultat afin d'interpréter la promotion dans le cadre de la GdI5 au Chapitre 10. Nous énonçons également un théorème de classification des sous algèbres commutatives maximales de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$.

§3.3.59 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ ne possédant pas de projections minimales (non nulles) — on dit dans ce cas que $\mathfrak{A}$ est diffuse. Alors il existe un unitaire $U : \mathbb{H} \rightarrow L^2([0, 1])$ tel que $U\mathfrak{A}U^* = L^\infty([0, 1])$.

Démonstration. Voir le livre de Sinclair et Smith [SS08]. ☺

§3.3.60 THÉORÈME.

Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$. On est alors dans l'un des cas suivants :

- soit $\mathfrak{A}$ est unitairement équivalente à $L^\infty([0, 1])$ (cas diffus) ;
- soit $\mathfrak{A}$ est unitairement équivalente à $\mathfrak{D}$ une algèbre diagonale (cas discret) ;
- soit $\mathfrak{A}$ est unitairement équivalente à $\mathfrak{D} \oplus L^\infty([0, 1])$, où $\mathfrak{D}$ est une algèbre diagonale (cas mixte) ;

Démonstration. Voir le livre de Sinclair et Smith [SS08]. ☺

§3.3.61 Concernant les sous-algèbres commutatives maximales de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ les choses sont donc claires, et on possède une classification complète de celles-ci. Dans le cas des algèbres de von Neumann de type II_1 , les choses sont bien plus complexes, et de nombreux travaux traitent de ce sujet. Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des sous-algèbres commutatives maximales d'une algèbre $\mathfrak{M}$, celles-ci peuvent être « isomorphes » de trois manières différentes :

- elles peuvent être isomorphes en tant qu'algèbres de von Neumann — c'est la notion la plus faible ;
- il peut exister un automorphisme Φ de $\mathfrak{M}$ tel que $\Phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$; on dit alors que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont conjuguées ;
- il peut exister un unitaire U tel que $U\mathfrak{A}U^* = \mathfrak{B}$ — c'est la notion la plus forte ; on dit dans ce cas que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont unitairement équivalentes.

§3.3.62 Nous présenterons dans un premier temps la classification des sous-algèbres commutatives maximales de Dixmier [Dix54], qui est fondée sur l'algèbre engendrée par le normalisateur. Remarquons que cette classification n'est pas exhaustive ! Nous énoncerons de plus quelques résultats qui nous seront utiles dans le Chapitre 10. Dans la section suivante, nous présenterons l'invariant de Pukansky, un invariant plus précis que les notions de sous-algèbres singulières, semi-régulières et régulières de Dixmier.

§3.3.63 DÉFINITION (NORMALISATEUR).

Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann, et $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre de von Neumann de $\mathfrak{M}$. On notera $N_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ le *normalisateur* de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{M}$, défini par :

$$N_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A}) = \{u \in \mathfrak{M} \mid u \text{ unitaire, } u\mathfrak{A}u^* = \mathfrak{A}\}$$

On notera $\mathcal{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ l'algèbre de von Neumann engendrée par le normalisateur $N_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$.

6. Une antireprésentation est une représentation qui inverse la multiplication : $\pi'_\tau(xy) = \pi'_\tau(y)\pi'_\tau(x)$.

§3.3.64 DÉFINITION (GROUPOÏDE NORMALISANT).

Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann, et $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre de von Neumann de $\mathfrak{M}$. On notera $G_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ le *groupoïde normalisant* de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{M}$ défini par :

$$G_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A}) = \{u \in \mathfrak{M} \mid uu^*u = u, uu^* \in \mathfrak{A}, u^*u \in \mathfrak{A}, u\mathfrak{A}u^* \subset \mathfrak{A}\}$$

On notera $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $G_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$.

§3.3.65 Jacques Dixmier [Dix54] a proposé une classification des sous-algèbres commutatives maximales d'un facteur de type II_1 en fonction de l'algèbre de von Neumann engendrée par son normalisateur. Il faut remarquer que cette classification n'est pas exhaustive (on construit un exemple dans le paragraphe §3.3.86).

§3.3.66 DÉFINITION (CLASSIFICATION DE DIXMIER).

Soit $\mathfrak{M}$ un facteur, et $\mathfrak{P}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{M}$. On distingue alors trois cas :

1. Si $\mathcal{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{M}$, on dit que $\mathfrak{P}$ est une sous-algèbre commutative maximale *régulière* ou *de Cartan*.
2. Si $\mathcal{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{K}$, où $\mathfrak{K}$ est un facteur, on dit que $\mathfrak{P}$ est *semi-régulière*.
3. Si $\mathcal{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ est dite *singulière*.

§3.3.67 Les trois résultats suivants peuvent être trouvés dans la littérature. Les deux premières propositions peuvent être trouvées avec leur preuve, dans un livre dédié aux sous-algèbres commutatives maximales des algèbres de von Neumann finies ([SS08]). La troisième est une généralisation récente [Chi07] d'un résultat qui était déjà connu pour les sous-algèbres commutatives maximales singulières.

§3.3.68 THÉORÈME (DYE, [DYE63]).

Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann avec une trace fidèle σ -faiblement continue, et $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{M}$. Alors l'ensemble $G_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ est contenu dans le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$ engendré par $\mathcal{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$.

§3.3.69 COROLLAIRE.

Sous les hypothèses du théorème précédent, les algèbres de von Neumann $\mathcal{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ et $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ sont égales.

§3.3.70 THÉORÈME (JONES & POPA, [JP82]).

Soit $\mathfrak{M}$ un facteur de type II_1 , et $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ une sous-algèbre commutative maximale. Soit $p, q \in \mathfrak{A}$ des projections de traces égales. Alors, si $\mathcal{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ est un facteur, il existe une isométrie partielle $v_0 \in G_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$ telle que $p = v_0 v_0^*$ et $q = v_0^* v_0$.

§3.3.71 THÉORÈME (CHIFAN, [CHI07]).

Soit $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ des facteurs de type II_1 . Pour $i = 1, 2$, soit $\mathfrak{A}_i$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{M}_i$. Alors :

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2}(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) = \mathcal{N}_{\mathfrak{M}_1}(\mathfrak{A}_1) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{M}_2}(\mathfrak{A}_2)$$

§3.3.72 THÉORÈME (CONNES, FELDMAN ET WEISS [CFW81]).

Soit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ deux sous-algèbres commutatives maximales régulières du facteur hyperfini $\mathfrak{R}$ de type II_1 . Alors $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont unitairement équivalentes.

Invariant de Pukansky

§3.3.73 Pukansky [Puk60] a défini un invariant pour une sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{A}$ d'un facteur de type II_1 séparable, basé sur la décomposition de type I de $(\mathfrak{A} \cup J\mathfrak{A}J)'$, où J est l'isométrie anti-linéaire $Jx = x^*$ sur $L^2(\mathfrak{M})$. Cette algèbre est le commutant d'une algèbre commutative et est donc de type I, et elle se décompose donc en une somme directe de facteurs de type I_n (avec éventuellement $n = \infty$). L'invariant de Pukansky est alors essentiellement l'ensemble des valeurs de n apparaissant dans cette décomposition.

§3.3.74 Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre commutative maximale d'un facteur $\mathfrak{N}$ de type II_1 séparable avec une trace normale et fidèle τ , soit J l'isométrie anti-linéaire $Jx = x^*$ sur $L^2(\mathfrak{N})$ et ξ le vecteur de $L^2(\mathfrak{N})$ correspondant à l'identité de $\mathfrak{N}$. On définit $e_{\mathfrak{A}}$ la projection de $L^2(\mathfrak{N})$ sur $L^2(\mathfrak{A})$. On notera $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ l'algèbre commutative engendrée par $\mathfrak{A} \cup J\mathfrak{A}J$. Le lemme suivant permet de justifier la définition de l'invariant de Pukansky.

§3.3.75 LEMME.

Soit $\mathfrak{N}$ un facteur de type II_1 séparable représenté sur $L^2(\mathfrak{N})$ et $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{N}$. Alors $e_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ et $e_{\mathfrak{A}}$ est une projection centrale dans $\mathfrak{B}'_{\mathfrak{A}}$.

Démonstration. Voir le Chapitre 7 du livre de Sinclair et Smith [SS08]. ☺

§3.3.76 DÉFINITION.

Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre commutative maximale d'un facteur $\mathfrak{N}$ de type II_1 séparable. On définit l'invariant de Pukansky $\text{Puk}(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{N}$ — généralement noté $\text{Puk}(\mathfrak{A})$ lorsqu'il ne peut y avoir de confusion sur le contexte — comme l'ensemble des $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tels que $(1 - e_{\mathfrak{A}})\mathfrak{B}'_{\mathfrak{A}}$ possède une partie de type I_n .

En cas d'ambiguïté, on pourra inclure le facteur $\mathfrak{N}$ dans la notation et on écrira alors $\text{Puk}(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

§3.3.77 En ôtant la projection $e_{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{B}'_{\mathfrak{A}}$, on supprime la partie $\mathfrak{B}'_{\mathfrak{A}}e_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}e_{\mathfrak{A}}$ qui est abélienne pour toute sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{A}$. Cela permet d'obtenir un meilleur invariant puisque son inclusion ajouterait l'entier 1 à tous les invariants de Pukansky, et il serait alors impossible de distinguer les algèbres d'invariants $\{2\}$ de celles d'invariants $\{1, 2\}$.

§3.3.78 L'invariant de Pukansky vérifie que si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont deux sous-algèbres commutatives maximales unitairement équivalentes d'un facteur $\mathfrak{M}$ de type II_1 , alors $\text{Puk}(\mathfrak{A}) = \text{Puk}(\mathfrak{B})$. En revanche, la réciproque n'est pas vraie ! On peut même trouver quatre sous-algèbres $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ de même invariant (égal à $\{1\}$) avec $\mathfrak{A}$ régulière, $\mathfrak{B}$ semi-régulière, $\mathfrak{C}$ singulière, et $\mathfrak{D}$ qui n'est ni singulière, ni semi-régulière, ni régulière ! L'invariant de Pukansky est cependant souvent utile et nous nous servirons de certains résultats dans le Chapitre 10.

§3.3.79 Les quatre théorèmes suivants peuvent se trouver dans le livre de Sinclair et Smith [SS08].

§3.3.80 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{N}$ un facteur de type II_1 et $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{N}$. Si $\mathfrak{A}$ est régulière, alors $\text{Puk}(\mathfrak{A}) = \{1\}$.

§3.3.81 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{N}$ un facteur de type II_1 et $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathcal{L}(L^2(\mathfrak{N}))$;
- $\text{Puk}(\mathfrak{A}) = \{1\}$.

§3.3.82 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{N}$ un facteur de type II_1 et $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{N}$.

- Si $\text{Puk}(\mathfrak{A}) \subset \{2, 3, 4, \dots, \infty\}$, $\mathfrak{A}$ est singulière.
- Si $\mathcal{M}(\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{A}$, alors $1 \in \text{Puk}(\mathfrak{A})$.

§3.3.83 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{B}$) une sous-algèbre commutative maximale d'un facteur $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{N}$) de type II_1 . Alors :

$$\text{Puk}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}) = \text{Puk}(\mathfrak{A}) \cup \text{Puk}(\mathfrak{B}) \cup \text{Puk}(\mathfrak{A})\text{Puk}(\mathfrak{B})$$

où $\text{Puk}(\mathfrak{A})\text{Puk}(\mathfrak{B}) = \{a \times b \mid a \in \text{Puk}(\mathfrak{A}), b \in \text{Puk}(\mathfrak{B})\}$.

§3.3.84 Nous avons énoncé plus haut qu'il était possible de trouver quatre sous-algèbres commutatives maximales $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ du facteur hyperfini $\mathfrak{R}$ de type II_1 telles que toutes soient de même invariant de Pukansky, et telles que $\mathfrak{A}$ soit régulière, $\mathfrak{B}$ soit semi-régulière, $\mathfrak{C}$ soit singulière, et $\mathfrak{D}$ soit hors de la classification de Dixmier (on dira que $\mathfrak{D}$ n'est pas Dixmier-classifiable). Les sous-algèbres régulières sont nécessairement d'invariant de Pukansky $\{1\}$. De plus, il existe

des sous-algèbres commutatives maximales régulières du facteur hyperfini $\mathfrak{R}$ (par exemple en considérant une construction de $\mathfrak{R}$ par un produit croisé [SS08]). Nous avons donc bien notre sous-algèbre $\mathfrak{A}$.

§3.3.85 D'un autre côté, Stuart White [Whi06] a montré que les sous-algèbres commutatives maximales de Tauer ont toute pour invariant de Pukansky le singleton $\{1\}$. Or il existe des sous-algèbres commutatives maximales de Tauer singulières [WS07] et semi-régulières [Whi06] dans le facteur hyperfini. Nous avons donc bien l'existence de deux sous-algèbres commutatives maximales $\mathfrak{B}$ semi-régulière et $\mathfrak{C}$ singulière telles que $\text{Puk}(\mathfrak{B}) = \text{Puk}(\mathfrak{C}) = \{1\}$.

§3.3.86 Or, puisqu'il existe des sous-algèbres commutatives maximales singulières d'invariant de Pukansky égal à $\{1\}$, il existe également des sous-algèbres commutatives maximales ni régulières ni semi-régulières ni singulières dont l'invariant de Pukansky est égal au singleton $\{1\}$. En effet, si $\mathfrak{A}$ est commutative maximale singulière telle que $\text{Puk}(\mathfrak{A}) = \{1\}$, on considère $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{Q}$ où $\mathfrak{Q}$ est une sous-algèbre commutative maximale régulière (donc $\text{Puk}(\mathfrak{Q}) = \{1\}$) de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$. On a alors que $\text{Puk}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{Q}) = \{1\}$ par la Proposition §3.3.83, et de plus, en utilisant la Proposition §3.3.71, on obtient :

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{Q}) = \mathcal{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{A}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{R}$$

Or le centre de $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{R}$ est égal à $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}$ car $\mathfrak{A}$ est commutative et que le commutant d'un produit tensoriel est égal au produit tensoriel des commutants (un résultat dû à Tomita). Donc $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{R}$ n'est pas un facteur, ce qui implique que $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{Q}$ n'est ni semi-régulière ni régulière. Puisque de plus $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{Q}$ est évidemment distincte de $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{R}$, on en déduit que $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{Q}$ n'est pas non plus singulière : elle est donc en dehors de la classification de Dixmier. Comme $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ est isomorphe à $\mathfrak{R}$, il suffit de alors choisir un isomorphisme ϕ pour définir $\mathfrak{D} = \phi(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{Q})$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{R}$ non Dixmier-classifiable telle que $\text{Puk}(\mathfrak{D}) = \{1\}$.

CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE DE L'INTERACTION

Table des matières

4.1 Les premières géométries de l'interaction	66
4.1.1 Premières GdIs : Nilpotence	66
4.1.2 Interprétation des preuves	67
4.1.3 Nilpotence Faible	68
4.1.4 Les additifs	69
4.2 Géométrie de l'interaction hyperfinie	71
4.2.1 La locativité	71
4.2.2 L'équation de rétroaction	72
4.2.3 Déterminant	72
4.2.4 Multiplicatifs	75
4.2.5 Exponentielles	80
4.A GdI5.1	82
4.A.1 Définition	82
4.A.2 Le problème des additifs	82

4.1 Les premières géométries de l'interaction

Premières GdIs : Nilpotence

§4.1.1 Le premier article sur la géométrie de l'interaction [Gir89a] se place déjà dans des algèbres d'opérateurs, qui procurent une généralisation naturelle des permutations par le biais des isométries partielles. En effet, il est nécessaire d'avoir des objets infinis afin de représenter les exponentielles, et il est relativement naturel de généraliser les permutations finies par les permutations d'une base d'un espace de Hilbert de dimension infinie. Ceci revient en fait à considérer les isométries partielles qui normalisent une sous-algèbre commutative fixée.

§4.1.2 On commence donc par fixer un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ de dimension infinie (dénombrable), et une sous-algèbre maximale commutative $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(\mathbb{H})$. On supposera que $\mathbb{H} = l^2(\mathbb{N})$ et que $\mathfrak{A}$ est l'algèbre maximale commutative des opérateurs diagonaux dans la base $(\delta_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$. On peut alors définir des opérateurs¹ $d, g \in G_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{A})$ tels que $dd^* + gg^* = 1$ et $d^*d = g^*g = 1$. On choisira ici $d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Si π est une projection dans $\mathfrak{A}$ il est immédiat que $d\pi d^*$ (respectivement $g\pi g^*$) est une projection dans $\mathfrak{A}$, donc $d\mathfrak{A}d^* \subset \mathfrak{A}$ (respectivement $g\mathfrak{A}g^* \subset \mathfrak{A}$) puisque $\mathfrak{A}$ est engendrée par ses projections. De plus, d et g sont des isométries partielles et les projections dd^* et gg^* sont dans $\mathfrak{A}$, donc d et g sont bien des éléments de $G_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{A})$.

Si $u \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$, on notera $d(u)$ (resp. $g(u)$) l'opérateur dud^* (resp. gug^*).

§4.1.3 On se restreindra dans la suite aux éléments de $G(\mathfrak{A})$. On définit maintenant une notion d'orthogonalité basée sur la nilpotence.

§4.1.4 DÉFINITION.

Deux éléments u, v de $G(\mathfrak{A})$ sont orthogonaux — noté $u \perp v$ — lorsque uv est nilpotent, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier n tel que $(uv)^n = 0$.

Cette notion d'orthogonalité permet de définir les types comme des ensembles clos par bi-orthogonal.

§4.1.5 DÉFINITION (TYPES).

Un *type* est un ensemble d'éléments de $G(\mathfrak{A})$ clos par bi-orthogonal, c'est-à-dire un ensemble $T \subset G(\mathfrak{A})$ tel que $T^{\perp\perp} = T$.

La construction du tenseur se fait à l'aide des opérateurs d et g qui *internalisent* la somme directe. En effet, l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$ vérifie $\mathbb{H} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

§4.1.6 DÉFINITION.

Si A, B sont des types, le produit tensoriel de A et B est défini par :

$$A \otimes B = \{d(u) + g(v) \mid u \in A, v \in B\}^{\perp\perp}$$

On notera $u \odot v = d(u) + g(v)$. Par les Propositions §10.2.20 et §10.2.21 on montre que si u, v sont dans le groupoïde normalisant $G_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{A})$ alors $u \odot v \in G_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{A})$.

On doit également définir l'implication linéaire. Celle-ci est définie à travers la formule d'exécution :

§4.1.7 DÉFINITION.

Soit u, v des éléments de $G(\mathfrak{A})$ tels que $u \perp d(v)$. L'exécution de u et $d(v)$, que l'on notera $u :: d(v)$, est définie par :

$$u :: d(v) = (1 - dd^*)(1 - ud(v))^{-1}(1 - dd^*)$$

Comme $u \perp d(v)$, l'inverse de $1 - ud(v)$ existe toujours et est défini par la série $\sum_{i=0}^{\infty} (ud(v))^i$. On peut montrer que² si u et $d(v)$ sont dans $G_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{A})$, alors $u :: d(v) \in G_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{A})$.

1. On rappelle que $G_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{A})$ est le groupoïde normalisant de $\mathfrak{A}$ (Définition §3.3.64).

2. Nous ne faisons pas ici cette démonstration, mais celle-ci est presque similaire à la preuve de la Proposition §10.2.24.

La propriété importante qui permet de s'assurer que l'on peut interpréter les connecteurs multiplicatifs de la logique linéaire est l'*adjonction*.

§4.1.8 PROPOSITION (ADJONCTION).

Si u, v, w sont des éléments de $G(\mathfrak{A})$, alors :

$$f \perp u \odot v \Leftrightarrow (f \perp d(u)) \wedge (f :: d(u) \perp g(v))$$

§4.1.9 THÉORÈME.

Si A, B sont des types, on considère l'ensemble $A \multimap B$ défini par :

$$A \multimap B = \{f \in G(\mathfrak{A}) \mid \forall u \in A, \exists v \in B, f :: d(u) = g(v)\}$$

Cet ensemble est un type, et vérifie :

$$A \multimap B = (A \otimes B^\perp)^\perp$$

Démonstration. Soit $f \in A \multimap B$, $u \in A$ et $v' \in B^\perp$. Alors $f :: d(u) = g(v)$ où v est un élément de B , donc $f \perp d(u)$ et $f :: d(u) \perp g(v')$. Donc $f \perp u \odot v'$. On a donc $f \in (A \otimes B^\perp)^\perp$.

Inversement, si $f \in (A \otimes B^\perp)^\perp$, alors $f \perp u \odot v'$ pour tout $u \in A, v' \in B^\perp$, et donc $f :: d(u)$ est défini et égal à $g(v)$ pour v dans B , donc $f \in A \multimap B$.

On en déduit que $A \multimap B = (A \otimes B^\perp)^\perp$, ce qui implique que $A \multimap B$ est un type. $\odot$

§4.1.10 Pour définir des exponentielles, on utilise une internalisation du produit tensoriel. En effet, puisque $\mathbb{H}$ est de dimension infinie, il vérifie $\mathbb{H} \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$. On choisit donc un tel isomorphisme β et une internalisation de l'associativité t . On peut par exemple définir la bijection $\beta : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ par $(n, m) \mapsto 2^n(2m + 1) - 1$. Cette bijection β induit un unitaire $u_\beta : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ en définissant $(\delta_{i,n}, \delta_{i,m})_{n,m \in \mathbf{N}} \mapsto (\delta_{i, \beta(m,n)})$ sur les éléments de la base. On peut alors définir une internalisation du produit tensoriel : si u, v sont des éléments de $G(\mathfrak{A})$, on définit $u \bar{\otimes} v = u_\beta(u \otimes v)u_\beta^*$. Naturellement, $(u \bar{\otimes} v) \bar{\otimes} w = u_\beta((u \bar{\otimes} v) \otimes w)u_\beta^* = u_\beta((u_\beta(u \otimes v)u_\beta^*) \otimes w)u_\beta^*$ n'est pas égal à $u \bar{\otimes} (v \bar{\otimes} w) = u_\beta(u \otimes (u_\beta(v \otimes w)u_\beta^*))u_\beta^*$, mais il existe un unitaire t qui internalise l'associativité, l'opérateur induit par la fonction :

$$\begin{aligned} \gamma : \quad \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N} \\ \beta(\beta(p, q), r) &\mapsto \beta(p, \beta(q, r)) \end{aligned}$$

§4.1.11 DÉFINITION.

Soit $u \in G(A)$. On définit $!u$ comme l'internalisation de $1 \otimes u$, c'est-à-dire comme $1 \bar{\otimes} u$.

Le fait de définir l'exponentielle comme $1 \bar{\otimes} u$ revient à remplacer u par un nombre dénombrable de copies de lui-même. En effet, $1 \otimes u \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ est égal à $\sum_{i \in \mathbf{N}} e_i \otimes u$, où (e_i) est une base de $\mathbb{H}$.

Interprétation des preuves

§4.1.12 Girard définit l'interprétation des preuves comme des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathcal{L}(l^2(\mathbf{N})))$, où n est le nombre de formules dans le séquent conclusion (en comptant les formules coupées qui apparaissent dans les séquents). On se contentera ici de présenter l'interprétation de MLL. La figure 4.1 présente les règles de formation des dérivations dans ce système. Les formules sont celles de la logique linéaire, et les séquents sont de la forme $\vdash [\Delta], \Gamma$ où $\Delta = A_1, A_1^\perp, A_2, A_2^\perp, \dots, A_k, A_k^\perp$ est l'ensemble des couples de formules coupées. Girard définit alors l'interprétation d'une preuve par un couple $(\pi^\bullet, \sigma_\pi)$, où $\pi^\bullet$ est une isométrie partielle dans $\mathcal{M}_n(\mathcal{L}(l^2(\mathbf{N})))$ (plus précisément dans $\mathcal{M}_n(G_{\mathcal{L}(l^2(\mathbf{N}))}(\mathfrak{A}))$) représentant la preuve π , et σ_π est une symétrie partielle dans $\mathcal{M}_n(\mathcal{L}(l^2(\mathbf{N})))$ (plus précisément dans $\mathcal{M}_n(G_{\mathcal{L}(l^2(\mathbf{N}))}(\mathfrak{A}))$) représentant l'ensemble des coupures effectuées dans π .

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash \square, A, A^\perp} \text{Ax} \\
\vdash [\Theta], \Gamma, A, B \\
\hline
\vdash [\Theta], \Gamma, A \wp B \quad \wp
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\frac{\vdash [\Theta_1], \Delta, A \quad \vdash [\Theta_2], \Gamma, A^\perp}{\vdash [\Theta_1, \Theta_2, A, A^\perp], \Gamma, \Delta} \text{Cut} \\
\frac{\vdash [\Theta_1], \Gamma, A \quad \vdash [\Theta_2], \Delta, B}{\vdash [\Theta_1, \Theta_2], \Gamma, \Delta, A \otimes B} \otimes
\end{array}$$

FIGURE 4.1 – Calcul des séquents avec coupures explicites

- §4.1.13 Contrairement à ce que fait Girard, nous allons définir l'interprétation directement dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{N}))$ en internalisant l'algèbre de matrices $\mathfrak{M}_n(\mathcal{L}(L^2(\mathbf{N})))$. On représente donc un séquent par le $\wp$ des formules le composant. Les deux projections dd^* et gg^* sont équivalentes au sens de Murray et von Neumann : l'isométrie partielle $a = gd^*$ est telle que $aa^* = (gd^*)(gd^*)^* = gd^*dg^* = gg^*$ et $a^*a = dd^*$. On va donc utiliser celle-ci pour représenter les axiomes.
- §4.1.14 Soit $\vdash [\Delta], \Gamma$ un séquent. Chaque formule A dans $\Delta \cup \Gamma$ possède une *adresse*, c'est-à-dire une projection sur le sous-espace correspondant à A . Si A et $A^\perp$ sont deux formules aux adresses p_1, p_2 respectivement, on peut définir une symétrie partielle entre ces adresses (construite à l'aide des isométries partielles d et g) que l'on notera $\tau(p_1, p_2)$.
- §4.1.15 DÉFINITION (REPRÉSENTATION DES PREUVES).
On définit la représentation $(\pi^\bullet, \sigma_\pi)$ d'une preuve π en calcul des séquents inductivement :
- Si π est une règle axiome, on définit $\pi^\bullet = a + a^*$ et $\sigma_\pi = 0$;
 - Si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par l'application d'une règle $\otimes$, on définit $\pi^\bullet = \pi_1^\bullet \odot \pi_2^\bullet$ et $\sigma_\pi = \bar{d}(\sigma_1) + \bar{g}(\sigma_2)$;
 - Si π est obtenue à partir de π_1 par l'application d'une règle $\wp$, on définit $\pi^\bullet = \pi_1^\bullet$ et $\sigma_\pi = \sigma_{\pi_1}$;
 - Si π est obtenue à partir des preuves π_1 et π_2 par l'application d'une règle Cut entre deux formules aux adresses p_1, p_2 , on définit $\pi^\bullet = \pi_1^\bullet \odot \pi_2^\bullet$ et $\sigma_\pi = \bar{d}(\sigma_1) + \bar{g}(\sigma_2) + \tau(p_1, p_2)$.
- §4.1.16 Il est alors possible de montrer que si π est une preuve contenant des coupures et π' est la preuve sans coupure obtenue en appliquant la procédure d'élimination des coupures sur π , les opérateurs $\pi^\bullet$ et σ_π sont orthogonaux et le résultat de l'exécution $Ex(\pi^\bullet, \sigma_\pi) = \sum_{i=0}^{\infty} (\pi^\bullet \sigma_\pi)^i$ est égal à $(\pi')^\bullet$.

Nilpotence Faible

- §4.1.17 La GdI que nous venons de présenter partiellement permet d'interpréter le système F . Girard a ensuite voulu étendre celle-ci afin d'interpréter le lambda-calcul pur. La différence principale, qui est également la plus grande difficulté, consiste à montrer que la formule d'exécution $Ex(u, \sigma)$ est bien définie lorsque $u\sigma$ est *faiblement nilpotent*.
- §4.1.18 DÉFINITION.
Un opérateur u est dit *faiblement nilpotent* si u^n tend faiblement vers 0.
- §4.1.19 Dans la section précédente, la nilpotence de l'opérateur $u\sigma$ permettait d'assurer la bonne définition de la série $\sum_{i=0}^{\infty} (u\sigma)^i$, et donc de la formule d'exécution. Le cas de la faible nilpotence est plus délicat. En effet si $u\sigma$ est faiblement nilpotent l'opérateur $1 - u\sigma$ n'est en général pas inversible. Girard montre [Gir88b] que celui-ci admet un inverse non borné ρ défini sur un sous-espace dense de $\mathbb{H}$. De plus, puisque les opérateurs choisis sont tous dans le normalisateur d'une même sous-algèbre maximale commutative, les termes $(u\sigma)^k$ sont des isométries partielles de domaines et co-domaines disjoints et on peut alors montrer que la restriction de ρ au sous-espace $(1 - \sigma^2)\mathbb{H}$ est un opérateur borné. Ce qui donne la proposition suivante :
- §4.1.20 PROPOSITION (GIRARD [GIR88B]).
Si $u\sigma$ est faiblement nilpotent, l'exécution $Ex(u, \sigma)$ est bien définie.

Les additifs

- §4.1.21 Le traitement des additifs n'apparaît que plus tard [Gir95a], avec l'introduction de la notion de dialecte. Cette notion permet de rendre privée une partie de l'information contenue dans un opérateur. On ne considèrera plus des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, mais plutôt des opérateurs agissant sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, où la première copie de $\mathbb{H}$ est « publique », tandis que la seconde est « privée ». Ainsi, lorsque l'on souhaitera composer deux tels opérateurs, il faudra considérer que leurs dialectes (tous deux égaux à $\mathbb{H}$) sont disjoints : l'action d'un opérateur sur le dialecte d'un autre sera nécessairement l'identité. Le fait de forcer un opérateur à agir comme l'identité sur le dialecte d'un autre se traduit par l'utilisation du produit tensoriel $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$: si u, v sont des opérateurs sur $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, on va les étendre à des opérateurs $u^\dagger, v^\ddagger$ sur $\mathbb{H} \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H})$, c'est-à-dire des opérateurs possédant deux dialectes (celui de u et celui de v) mais n'agissant que sur l'un d'entre eux (on les étend par l'identité sur le dialecte qui n'est pas le leur, par exemple $u^\dagger = u \otimes 1$). Par une internalisation du produit tensoriel, on peut alors considérer que le couple formé des deux dialectes n'est en réalité qu'un seul dialecte : l'opérateur $u^\dagger v^\ddagger$ peut être considéré comme agissant sur $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$.
- §4.1.22 L'article *Geometry of Interaction III : Accomodating the Additives* [Gir95a] interprète les preuves comme des opérateurs dans une algèbre stellaire, tout comme la première version présentée plus haut, mais cette algèbre stellaire est décrite comme une algèbre d'unification. Pour des raisons d'homogénéité, nous allons donc nous éloigner de cette approche pour présenter cette extension aux additifs. La présentation que nous ferons ici de cette construction — que nous nommerons GdI3 — est une variante de celle que l'on peut trouver dans la thèse d'Étienne Duchesne [Duc09].
- §4.1.23 On se fixe comme auparavant l'espace de Hilbert $\mathbb{H} = l^2(\mathbf{N})$, ainsi que la sous-algèbre maximale commutative $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{L}(l^2(\mathbf{N}))$ définie comme l'ensemble des opérateurs diagonaux dans la base $(\delta_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$. On considèrera des sommes (disjointes) d'opérateurs de la forme $u \otimes p$ — où p est une projection et u une isométrie partielle — dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, qui est une sous-algèbre maximale commutative de $\mathcal{L}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H})$.
- §4.1.24 DÉFINITION.
On dira que u est un opérateur de GdI lorsque $u = \sum_{i \in I} u_i \otimes p_i$, où pour tout $i \in I$, u_i est une isométrie partielle dans $G(\mathfrak{A})$, p_i est une projection dans $\mathfrak{A}$. De plus, on demandera que $\sum_{i \in I} p_i \sim 1$ et $p_i \sim p_j$ (pour tous i, j) au sens de Murray et von Neumann.
- §4.1.25 REMARQUE. Si u est un opérateur de GdI, alors $u \in G_{\mathcal{L}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H})}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})$.
- §4.1.26 DÉFINITION.
Soit $u = \sum_{i \in I} u_i \otimes p_i$ et $v = \sum_{j \in J} v_j \otimes q_j$ deux opérateurs de GdI. On définit $u^\dagger$ comme l'opérateur $\sum_{i \in I} u_i \otimes (p_i \bar{\otimes} 1)$. De même, on définit $v^\ddagger$ comme l'opérateur $\sum_{j \in J} v_j \otimes (1 \bar{\otimes} q_j)$.
- §4.1.27 DÉFINITION.
Si u et v sont deux opérateurs de GdI, on dira qu'ils sont orthogonaux lorsque $u^\dagger v^\ddagger$ est nilpotent. On dira que u et v sont faiblement orthogonaux lorsque $u^\dagger v^\ddagger$ est faiblement nilpotent.
- §4.1.28 Nous allons utiliser à nouveau les isométries partielles d, g introduites au début de ce chapitre. Cependant, d et g sont des opérateurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ tandis que les opérateurs de GdI sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H})$. Il est donc nécessaire d'étendre ceux-ci à des opérateurs de $\mathcal{L}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H})$ pour tenir compte de l'introduction des dialectes. On notera par conséquent $\hat{d}$ (respectivement $\hat{g}$) l'opérateur $d \otimes 1$ (respectivement $g \otimes 1$) et l'on écrira $\bar{d}(u)$ (respectivement $\bar{g}(u)$) l'opérateur $\hat{d} u \hat{d}^*$ (respectivement $\hat{g} u \hat{g}^*$).
- §4.1.29 DÉFINITION.

Soit u, v deux opérateurs de GdI. Alors :

$$\begin{aligned}\bar{d}(u^\dagger) &= \sum_{i \in I} d(u_i) \otimes (p_i \bar{\otimes} 1) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d(u_i) \otimes (p_i \bar{\otimes} q_j) \\ \bar{g}(v^\ddagger) &= \sum_{j \in J} g(v_j) \otimes (1 \bar{\otimes} q_j) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} g(v_j) \otimes (p_i \bar{\otimes} q_j)\end{aligned}$$

L'opérateur $u \odot v = \bar{d}(u^\dagger) + \bar{g}(v^\ddagger)$ est donc un opérateur de GdI, égal à :

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (d(u_i) + g(v_j)) \otimes (p_i \bar{\otimes} q_j)$$

§4.1.30 DÉFINITION.

Soit A, B deux types, on définit leur tenseur par :

$$A \otimes B = \{u \odot v \mid u \in A, v \in B\}^{\perp\perp}$$

§4.1.31 DÉFINITION.

Soit u, v des opérateurs de GdI orthogonaux. On définit l'exécution de u et $\bar{d}(v)$ comme l'opérateur de GdI $u :: \bar{d}(v) = (1 - \hat{d}\hat{d}^*) \sum_{i \geq 1} (u^\dagger \bar{d}(v^\ddagger))^i u (1 - \hat{d}\hat{d}^*)$.

§4.1.32 Le fait que ce soit un opérateur de GdI vient du calcul suivant :

$$\begin{aligned}u :: \bar{d}(v) &= (1 - \hat{d}\hat{d}^*) \sum_{i \geq 1} (u^\dagger \bar{d}(v^\ddagger))^i u (1 - \hat{d}\hat{d}^*) \\ &= (1 - \hat{d}\hat{d}^*) \sum_{i \geq 1} \left(\left(\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m u_k \otimes (p_k \bar{\otimes} q_l) \right) \left(\sum_{k'=0}^n \sum_{l'=0}^m d(v_{l'}) \otimes (p_{k'} \bar{\otimes} q_{l'}) \right) \right)^i u (1 - \hat{d}\hat{d}^*) \\ &= (1 - \hat{d}\hat{d}^*) \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m (u_k v_l) \otimes (p_k \bar{\otimes} q_l) \right)^i \left(\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m u_k \otimes (p_k \bar{\otimes} q_l) \right) (1 - \hat{d}\hat{d}^*) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left((1 - \hat{d}\hat{d}^*) \sum_{i \geq 1} (u_k d(v_l))^i u_k (1 - p p^*) \right) \otimes (p_k \bar{\otimes} q_l)\end{aligned}$$

§4.1.33 PROPOSITION.

Soit u, v des opérateurs de GdI orthogonaux. Alors :

$$u \perp (v \odot w) \Leftrightarrow (u \perp \bar{d}(v^\ddagger)) \wedge (u :: \bar{d}(v^\ddagger)) \perp \bar{g}(w))$$

§4.1.34 THÉORÈME.

Soit A, B deux types. Alors

$$A \multimap B = \{f \mid \forall u \in A, \exists v \in B, f :: \bar{d}(u) = \bar{g}(v)\}$$

est un type et $A \multimap B = (A \otimes B^\perp)^\perp$.

§4.1.35 DÉFINITION.

Soit u, v deux opérateurs de GdI. On définit

$$u \& v = (1 \otimes p)u(1 \otimes p)^* + (1 \otimes q)v(1 \otimes q)^*$$

Si A, B sont deux types, on définit

$$A \& B = \{u \& v \mid u \in A, v \in B\}^{\perp\perp}$$

§4.1.36 DÉFINITION.

Soit u, v des opérateurs de GdI. On dit que u est un variant de v — noté $u \sim v$ — lorsqu'il existe une isométrie partielle $w \in G(\mathfrak{A})$ telle que $u = (1 \otimes w)v(1 \otimes w)^*$.

§4.1.37 PROPOSITION.

Soit u, v, w des opérateurs de GdI tels que $u \sim v$. Alors $u \perp w$ si et seulement si $v \perp w$. De plus, $u :: w \sim v :: w$.

4.2 Géométrie de l'interaction hyperfinie

La locativité

§4.2.1 Entre les constructions de géométrie de l'interaction présentées ci-dessus et la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini, Girard a introduit la *ludique*. Si l'approche de la ludique semble a priori éloignée de celle de la géométrie de l'interaction, il se trouve que dans un certain sens la construction est parfaitement similaire. En effet, seuls les points de départ de ces deux constructions diffèrent. Là où la géométrie de l'interaction est construite autour de l'abstraction des réseaux de preuve, la ludique est construite autour d'une abstraction des dérivations en calcul des séquents (pour MALL). On peut montrer qu'une formule A est prouvable dans MALL si et seulement si une formule $A^\sharp$ est prouvable dans un système MALL_{foc} . Cette formule $A^\sharp$ est une forme normale de A obtenue en appliquant les isomorphismes de distributivité (voir le Chapitre 2, Section 2.2). Le système MALL_{foc} , quant à lui, utilise le fait que tout séquent prouvable possède une preuve *focalisée*, c'est-à-dire une preuve alternant entre une suite de règles réversibles (négatives) de longueur maximale, et une suite de règles non réversibles (positives) introduisant les connecteurs positifs d'une formule choisie (d'où le terme de *focalisation*) de longueur maximale. Ce calcul des séquents possède donc deux schémas de règles, un schéma négatif et un schéma positif — chacun représentant les suites possibles de règles négatives ou positives, et une règle d'axiome.

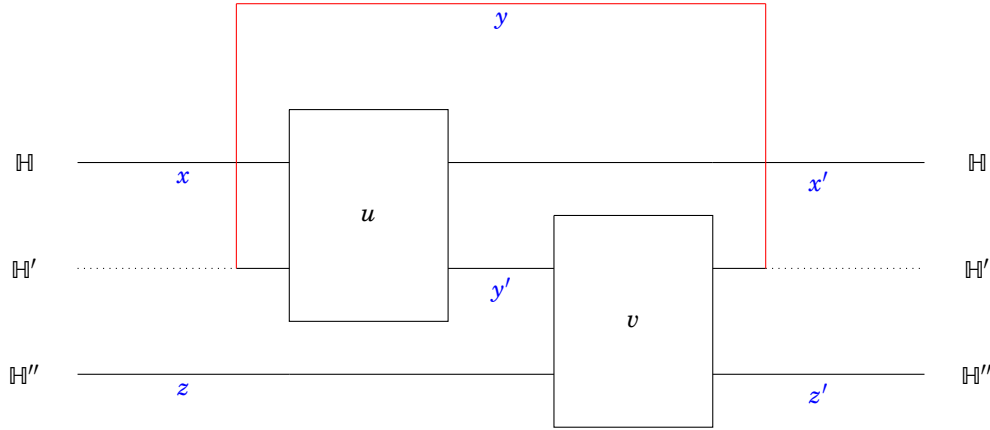
§4.2.2 La ludique est alors une abstraction de ce calcul des séquents : premièrement on remplace la règle axiome par une règle $\boxtimes$ comme celle introduite au début du Chapitre 2. La différence entre la règle $\boxtimes$ de la ludique et celle que nous avons présentée est que la règle de la ludique ne peut introduire des séquents de la forme $\vdash A, A^\perp$ et ne correspond donc jamais à l'application d'un axiome. Ceci est rendu possible en acceptant les arbres de dérivation infinis : ainsi, un séquent correct — comme $A \vdash A$ — pourra être introduit par une η -expansion infinie. La seconde abstraction consiste à remplacer les formules par de simples adresses — des suites finies d'entiers. On peut remarquer que nous avons déjà introduit une approche similaire. En effet, les constructions présentées dans la Section 2.4 du Chapitre 2 utilisent également des entiers en remplacement des atomes des structures de preuve. Nous avons également rencontré la notion d'adresse dans la présentation que nous avons faite de l'interprétation des preuves dans la première GdI (Section 4.1.2).

§4.2.3 Nous ne rentrerons pas dans les détails de la ludique ici, mais nous insisterons sur cet aspect *locatif*. Si la géométrie de l'interaction était déjà locative dans ses premières versions — une adresse étant donnée par une suite de d et g — ce n'est qu'après la ludique que celle-ci devient réellement explicite. En particulier, dans les premières GdI, le produit tensoriel était toujours défini car il contenait les *délocalisations* nécessaires : les conjuguaisons par d et par g . Cela permet en particulier de considérer des opérateurs agissant sur le même espace : l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{N})$. Dans la GdI5, les opérateurs considérés seront des éléments d'une algèbre $\mathfrak{R}_{0,1}$ de type II_∞ , mais agissant uniquement sur un sous-espace « fini » (du point de vue de l'algèbre). Ainsi, les objets considérés seront la donnée d'une projection finie $p \in \mathfrak{R}_{0,1}$ — le lieu — et d'un opérateur u tel que $pup = u$. Une conséquence de la locativité est que certaines opérations sont définies seulement partiellement — comme le tenseur, mais nous montrerons qu'il est malgré tout possible d'obtenir des constructions totales lorsque l'on travaille à *délocalisation près* (on obtiendra ainsi des modèles catégoriques).

L'équation de rétroaction

§4.2.4 L'équation de rétroaction est la contrepartie — au niveau des opérateurs — de la procédure d'élimination des coupures. Ainsi une solution de l'équation de rétroaction est l'équivalent de la forme normale d'un réseau contenant une coupure. Cette équation peut s'écrire comme suit : si u, v sont des opérateurs sur les espaces de Hilbert $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}'$ et $\mathbb{H}' \oplus \mathbb{H}''$ respectivement, une *solution de l'équation de rétroaction* est un opérateur w sur $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}''$ tel que $w(x \oplus z) = x' \oplus z'$ dès lors qu'il existe $y, y' \in \mathbb{H}'$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} u(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ v(y' \oplus z) &= y \oplus z' \end{aligned}$$



§4.2.5 On note p, p', p'' les projections sur les espaces $\mathbb{H}, \mathbb{H}', \mathbb{H}''$ respectivement. La formule d'exécution $u :: v = (p + p''v) \sum_{i \geq 0} (uv)^i (up + p'')$, lorsqu'elle est définie, donne une solution à l'équation de rétroaction entre u et v . De manière plus générale, la formule $(p + p''v)(1 - uv)^{-1}(up + p'')$, lorsqu'elle est définie, donne une solution à l'équation de rétroaction.

§4.2.6 Girard a étudié, dans son article *Geometry of Interaction IV : the Feedback Equation* [Gir06] une extension de cette solution. En effet, il a montré que dès lors que u, v sont des hermitiens de norme au plus 1, la solution $(1 - uv)^{-1}$ de l'équation de rétroaction définit une sorte d'application fonctionnelle, et que celle-ci peut être étendue de manière à être définie pour tout couple d'opérateurs hermitiens de norme au plus 1. De plus, cette extension est l'unique extension préservant l'associativité et satisfaisant certaines propriétés de continuité.

Déterminant

§4.2.7 La nouvelle version de la Géométrie de l'Interaction, celle qui a été principalement étudiée dans cette thèse, n'utilise plus la notion d'orthogonalité définie par la nilpotence mais utilise une notion définie à partir du déterminant. Nous allons essayer de justifier ce passage au déterminant, et pour cela nous allons considérer G, H, F des matrices carrées de dimensions respectives $n \times n$, $m \times m$ et $(n + m) \times (n + m)$. On peut alors décomposer par blocs la matrice F ainsi :

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

où F_{11} (respectivement F_{22}) est une matrice carrée de dimension $n \times n$ (respectivement $m \times m$). On notera de plus $G \oplus H$ la matrice carrée de dimension $(n + m) \times (n + m)$ définie par :

$$G \oplus H = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

Girard a alors remarqué que dans le cas où la matrice $1 - F_{11}G$ est inversible (1 est ici la matrice identité de dimension $n \times n$), le calcul du déterminant de $1 - F(G \oplus H)$ faisait apparaître la formule d'exécution $Ex(F, G)$:

$$\begin{aligned}
 & \det(1 - F(G \oplus H)) \\
 &= \begin{vmatrix} 1 - F_{11}G & -F_{12}H \\ -F_{21}G & 1 - F_{22}H \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 - F_{11}G & -F_{12}H + (1 - F_{11}G)C \\ -F_{21}G & 1 - F_{22}H - F_{21}GC \end{vmatrix} \quad (C = (1 - F_{11}G)^{-1}F_{12}H) \\
 &= \begin{vmatrix} 1 - F_{11}G & 0 \\ -F_{21}G & 1 - Ex(F, G).H \end{vmatrix} \\
 &= \det(1 - F_{11}G) \det(1 - Ex(F, G).H)
 \end{aligned}$$

- §4.2.8 Cependant, afin d'interpréter les connecteur exponentiels, il est nécessaire de travailler avec des opérateurs agissant sur des espaces de dimension infinie. C'est pourquoi Girard travaille avec les algèbres de von Neumann de type II. En effet, l'existence de la trace dans les facteurs de type II_1 permettent de définir une généralisation du déterminant.
- §4.2.9 Cette nouvelle version de la Géométrie de l'Interaction considère donc des opérateurs dans une algèbre particulière : le facteur hyperfini de type II_∞ . En réalité les opérateurs considérés sont des opérateurs appartenant à une sous-algèbre $p\mathfrak{A}_{0,1}p$, où p est une projection finie. On travaille donc avec des opérateurs du facteur hyperfini de type II_1 : l'algèbre de type II_∞ permet simplement de s'assurer que suffisamment de lieux sont disponibles.
- §4.2.10 Dans un facteur de type II_1 , il existe une trace. Il est possible de définir alors une généralisation du déterminant grâce à l'identité $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$, qui est vérifiée en dimension finie pour toute matrice A .
- §4.2.11 En effet, si A est une matrice à coefficients complexes, alors on peut la supposer sous forme triangulaire supérieure. Le déterminant de $\exp(A)$ est donc le produit des exponentielles des valeurs propres de A : $\det(\exp(A)) = \prod_i \exp(\lambda_i)$ et donc $\det(\exp(A)) = \exp(\sum_i \lambda_i)$. On a donc bien $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$.
- §4.2.12 Dans le cas d'un facteur de type II_1 , muni d'une trace normalisée Tr , on peut alors définir, pour tout opérateur A inversible :

$$\det(A) = e^{Tr(\log(|A|))}$$

Cette généralisation du déterminant a été introduite par Fuglede et Kadison [FK52], qui montrent que de nombreuses propriétés sont satisfaites par ce dernier. Parmi ces propriétés, celles que nous utiliserons par la suite sont :

- $\det$ est multiplicatif : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
- pour tout A , $\det(A) < \text{rad}(A)$.

- §4.2.13 Dans la GdI5, Girard utilise une généralisation de la trace : les pseudo-traces. Une *pseudo-trace* est une forme linéaire hermitienne ($\alpha(u) = \overline{\alpha(u^*)}$), traciale ($\alpha(uv) = \alpha(vu)$), fidèle et σ -faiblement continue.
- §4.2.14 DÉFINITION.
Si α est une pseudo-trace sur $\mathfrak{A}$, et tr une trace sur $\mathfrak{R}$, on peut définir, pour tout $A \in \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{A}$ inversible :

$$\det_{\text{tr} \otimes \alpha}(A) = e^{\text{tr} \otimes \alpha(\log(|A|))}$$

- §4.2.15 PROPOSITION.

Si ϕ est un $*$ -isomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, alors pour tout élément inversible $A \in \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{A}$:

$$\det_{\text{tr} \otimes (\alpha \circ \phi^{-1})}(\text{Id} \otimes \phi(A)) = \det_{\text{tr} \otimes \alpha}(A)$$

Démonstration. Soit A inversible dans $\mathfrak{A}_{0,1} \otimes \mathfrak{A}$. Alors, en utilisant la définition du déterminant et le fait que $\text{Id} \otimes \phi$ commute au calcul fonctionnel, on a :

$$\begin{aligned} \det_{\text{tr} \otimes (\alpha \circ \phi^{-1})}(\text{Id} \otimes \phi(A)) &= \exp(\text{tr} \otimes (\alpha \circ \phi^{-1})(\log(|\text{Id} \otimes \phi(A)|))) \\ &= \exp(\text{tr} \otimes (\alpha \circ \phi^{-1})(\text{Id} \otimes \phi(\log(|A|)))) \\ &= \exp(\text{tr} \otimes \alpha(\log(|A|))) \end{aligned}$$

Donc $\det_{\text{tr} \otimes (\alpha \circ \phi^{-1})}(\text{Id} \otimes \phi(A)) = \det_{\text{tr} \otimes \alpha}(A)$. $\odot$

§4.2.16 LEMME.

Soit B un opérateur, u un unitaire et f une fonction continue sur $\text{Spec}(B)$. Alors $f(uBu^*) = uf(B)u^*$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour les polynômes par définition du calcul fonctionnel continu. Or, si $p = x^k$, $k \geq 2$, on a $(uBu^*)^k = uB(u^*uB)^{k-1}u^* = uB^ku^*$. Pour le cas $k = 0$, on a $1 = uu^*$ car u est unitaire. Le cas $k = 1$ est trivial. On déduit donc de cela que, si $p = \sum_{i=0}^k a_i x^i$, alors $p(B) = \sum_{i=0}^k a_i uB^i u^* = u(\sum_{i=0}^k a_i B^i)u^*$. $\odot$

§4.2.17 PROPOSITION.

Soit B un opérateur et u un unitaire. Alors :

$$\det(1 - uB) = \det(1 - Bu)$$

Démonstration. Si u est un unitaire, on utilise le lemme précédent et la propriété de la trace pour avoir :

$$\begin{aligned} \det(1 - uB) &= \exp(\text{tr}(\log(|1 - uB|))) \\ &= \exp(\text{tr}(\log(|uu^* - uBu u^*|))) \\ &= \exp(\text{tr}(\log(|u(1 - Bu)u^*|))) \\ &= \exp(\text{tr}(\log(u|1 - Bu|u^*))) \\ &= \exp(\text{tr}(\log(|1 - Bu|u^*u))) \\ &= \exp(\text{tr}(\log(|1 - Bu|))) \\ &= \det(1 - Bu) \end{aligned}$$

Donc $\det(1 - uB) = \det(1 - Bu)$. $\odot$

§4.2.18 LEMME.

Si A est nilpotent, alors $\text{rad}(A) = 0$.

Démonstration. On a $\text{rad}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Or, si A est nilpotent de degré k , $\|A^n\| = 0$ pour $n \geq k$. D'où $\text{rad}(A) = 0$. $\odot$

§4.2.19 LEMME.

Si A est nilpotent, alors $P(A) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A^i$ est nilpotent.

Démonstration. Le degré minimal de A dans $P(A)^i$ est égal à A^i . Donc $P(A)^i = 0$ pour $i \geq k$. $\odot$

§4.2.20 PROPOSITION.

Si A est nilpotent, alors $\det(1 + A) = 1$.

Démonstration. On notera k le degré de nilpotence de A . Comme A est nilpotent, $\text{rad}(A) = 0$. Soit $\lambda \in \text{Spec}(1 + A)$. Par définition, $\lambda - 1 - A$ est non-inversible, ce qui signifie que $(\lambda - 1) - A$ est non-inversible, c'est-à-dire $\lambda - 1 \in \text{Spec}(A)$. Cela implique que $\lambda = 1$ puisque le spectre de A est réduit à $\{0\}$. On en déduit que $\text{rad}(1 + A) \leq 1$ et donc que $\det(1 + A) \leq 1$.

De plus, $(1 + A)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-A)^i = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-A)^i$. Par le lemme précédent, on sait que $B = \sum_{i=1}^{k-1} (-A)^i$ est nilpotent, et donc $\det(1 + B) \leq 1$ par le même raisonnement que précédemment. Comme $\det(1 + B) = \det((1 + A)^{-1}) = (\det(1 + A))^{-1}$, on en déduit que $\det(1 + A) = 1$. $\odot$

§4.2.21 PROPOSITION (GIRARD [GIR11A]).

Soit u, v, w trois opérateurs dans le facteur hyperfini de type II_1 , et $u :: v$ la solution de l'équation de rétroaction définie par u et v . Alors :

$$\det(1 - u(v + w)) = \det(1 - uv) \det(1 - (u :: v)w)$$

Multiplicatifs

§4.2.22 La version de la Géométrie de l'interaction hyperfinie présentée dans le reste de cette section n'est pas la version apparaissant dans l'article de Girard [Gir11a] (une courte présentation de celle-ci se trouve à la fin de ce chapitre). Lorsqu'il faudra distinguer les deux versions de la GdI hyperfinie, nous distinguerons la GdI5.1 — celle de l'article [Gir11a] — et la GdI5.2 présentée ici. Notons que nous utiliserons également une troisième version de la GdI hyperfinie dans le Chapitre 10 qui correspond à une version antérieure à la GdI5.1 qui n'a finalement pas été publiée et sera par conséquent nommée GdI5.0.

§4.2.23 DÉFINITION.

Un projet hyperfini est un 5-uplet $a = (p, \alpha, \mathfrak{A}, \alpha, A)$, où :

- p est une projection dans $\mathfrak{R}_{0,1}$, le support de a ;
- $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, la mise de a ;
- $\mathfrak{A}$ est une algèbre de von Neumann finie de type I, l'idiome de a ;
- α est une pseudo-trace : α est une forme hermitienne ($\overline{\alpha(a)} = \alpha(a^*)$), traciale ($\alpha(ab) = \alpha(ba)$), et continue pour la topologie σ -faible ;
- $A \in p\mathfrak{R}_{0,1}p \otimes \mathfrak{A}$ est un hermitien de norme au plus 1.

On utilisera la notation introduite par Girard, et on écrira $a = a \cdot + \cdot \alpha + A$. Lorsque l'idiome est égal à $\mathbf{C}$, on notera $1_{\mathbf{C}}$ la « trace » $x \mapsto x$.

§4.2.24 En anticipant sur la définition des graphes tranchés (Chapitre 5, Section 5.3.2), on peut remarquer qu'une algèbre finie de type I peut toujours s'écrire comme $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{M}_{k_i}(\mathbf{C})$, où I est un ensemble fini, et les k_i sont des entiers naturels. On peut alors montrer qu'une pseudo-trace peut se décomposer sous la forme $\alpha = \bigoplus_{i \in I} \alpha_i \text{tr}_{k_i}$, où tr_{k_i} est la trace normalisée ($\text{tr}_{k_i}(1) = 1$) sur l'algèbre de matrices $\mathfrak{M}_{k_i}(\mathbf{C})$ et les α_i sont des réels.

§4.2.25 LEMME.

Soit $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_k(\mathbf{C})$ une algèbre de matrices, et α une pseudo-trace sur $\mathfrak{A}$. Alors il existe un réel λ tel que $\alpha = \lambda \text{tr}$ où tr est la trace (normalisée de manière à ce que $\text{tr}(1) = 1$) sur $\mathfrak{A}$.

Démonstration. Fixons $\pi_1, \dots, \pi_k$ un ensemble de projections minimales de $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_k(\mathbf{C})$ tel que $\sum_{j=1}^k \pi_j = 1$. Alors comme les projections π_j sont toutes équivalentes au sens de Murray et von Neumann, on peut trouver pour tout $1 \leq j \leq k$ une isométrie partielle u_j telle que $u_j u_j^* = \pi_j$ et $u_j^* u_j = \pi_1$. En utilisant le fait que α soit traciale, on obtient alors :

$$\alpha(\pi_j) = \alpha(u_j u_j^*) = \alpha(u_j^* u_j) = \alpha(\pi_1)$$

On pose donc $\lambda = k \times \alpha(\pi_1)$.

On montre que l'on a $\alpha(p) = \lambda \text{tr}(p)$ pour toute projection p dans $\mathfrak{M}_k(\mathbf{C})$. Si p est une telle projection, alors il existe une isométrie partielle w entre p et une somme partielle $\sum_{j=1}^m \pi_j$ pour un entier j . La tracialité de α et de tr impliquent alors respectivement que $\alpha(p) = \alpha(\sum_{j=1}^m \pi_j)$ et que $\text{tr}(p) = \text{tr}(\sum_{j=1}^m \pi_j)$. On en déduit donc :

$$\alpha(p) = \alpha\left(\sum_{j=1}^m \pi_j\right) = \sum_{j=1}^m \alpha(\pi_j) = \sum_{j=1}^m \lambda \text{tr}(\pi_j) = \lambda \text{tr}\left(\sum_{j=1}^m \pi_j\right) = \lambda \text{tr}(p)$$

Les deux formes α et λtr sont donc égales sur l'ensemble des projections et continues : elles sont donc égales puisque l'ensemble des projections engendrent toute l'algèbre. Il reste à montrer que λ est réel. Ceci est une conséquence immédiate du fait que $\overline{\alpha(a)} = \alpha(a^*)$: si a est auto-adjoint, alors $\alpha(a) \in \mathbf{R}$; en particulier une projection π_1 est autoadjointe et $\text{tr}(\pi_1) = 1/k$ est dans $\mathbf{R}$, et donc $\lambda = \alpha(\pi_1)/\text{tr}(\pi_1)$ est nécessairement un nombre réel. ☺

§4.2.26 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{A} = \bigoplus_{i=1}^l \mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C})$ une somme directe d'algèbres de matrices, et α une pseudo-trace sur $\mathfrak{A}$. Alors il existe une famille $(\lambda_i)_{i=1}^l$ de réels telle que $\alpha = \bigoplus_{i=1}^l \lambda_i \text{tr}_{\mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C})}$.

Démonstration. On note p_i ($i = 1, \dots, l$) la projection de $\mathfrak{A}$ sur l'algèbre $\mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C})$. Si $a \in \mathfrak{A}$, on a $a = \bigoplus_{i=1}^l a_i$, d'où on obtient que $\alpha(a) = \sum_{i=1}^l \alpha(a_i)$. On note donc α_i la restriction de α à l'algèbre $\mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $\alpha_i = \alpha(p_i \iota(x) p_i)$ où $\iota : \mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{A}$ est l'injection canonique. Comme α est une pseudo-trace, α_i est également une pseudo-trace sur $\mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C})$ et l'on peut donc utiliser le lemme précédent pour trouver un réel λ_i tel que $\alpha_i = \lambda_i \text{tr}_{\mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C})}$. Finalement, pour tout $a \in \mathfrak{A}$, on a :

$$\alpha(a) = \sum_{i=1}^l \alpha(a_i) = \sum_{i=1}^l \alpha_i(a_i) = \sum_{i=1}^l \lambda_i \text{tr}_{\mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C})}(a_i) = \left(\bigoplus_{i=1}^l \lambda_i \text{tr}_{\mathfrak{M}_{k_i}(\mathbb{C})} \right)(a)$$

On a donc montré le résultat voulu. $\odot$

§4.2.27 REMARQUE. On a choisi ici de présenter une version de la GdI5 légèrement différente de celle présentée dans l'article de Girard. La différence entre la version de l'article (GdI5.1) et celle-ci (GdI5.2) est que nous n'imposons pas qu'un projet $a = a \cdot + \cdot \alpha + A$ satisfasse $\alpha(1_{\mathfrak{A}}) \neq 0$. Cette version est suggérée par Girard dans la *syntaxe transcendantale* [Gir11b] et elle permet d'éviter l'introduction de conduites négatives et positives (GdI5.1), qui sont remplacées par une seule morphologie : les dichologies.

§4.2.28 Si $A \in \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{A}$ et $B \in \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{B}$, on notera $A^{\dagger \mathfrak{B}}$ et $B^{\ddagger \mathfrak{A}}$ (on écrira souvent abusivement $A^{\dagger}$ et $B^{\ddagger}$ pour simplifier les notations) les opérateurs de $\mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ définis par :

$$\begin{aligned} A^{\dagger \mathfrak{B}} &= A \otimes 1_{\mathfrak{B}} \\ B^{\ddagger \mathfrak{A}} &= (\text{Id}_{\mathfrak{R}_{0,1}} \otimes \tau)(B \otimes 1_{\mathfrak{A}}) \end{aligned}$$

où τ est l'isomorphisme $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

§4.2.29 DÉFINITION.

Soit $a = a \cdot + \cdot \alpha + A$ et $b = b \cdot + \cdot \beta + B$ deux projets hyperfinis. Alors $a \perp b$ si :

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle = a\beta(1_{\mathfrak{B}}) + \alpha(A_{\mathfrak{A}})b - \log(\det(1 - A^{\dagger} B^{\ddagger})) \neq 0, \infty$$

Si A est un ensemble de projets, on notera $A^{\perp} = \{b \mid \forall a \in A, a \perp b\}$ et $A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp}$.

§4.2.30 DÉFINITION.

Soit p une projection finie de $\mathfrak{R}_{0,1}$. Une *conduite* de support p est un ensemble $\mathbf{A}$ de projets de support p tel que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp}$.

§4.2.31 DÉFINITION.

Si a, b sont des projets hyperfinis de supports disjoints, alors le tenseur de a et b est défini comme le projet hyperfini de support $p_a + p_b$: $a \otimes b = a\beta(1_{\mathfrak{B}}) + \alpha(1_{\mathfrak{A}})b \cdot + \cdot \alpha \otimes \beta + A^{\dagger} + B^{\ddagger}$.

§4.2.32 DÉFINITION.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des conduites de supports disjoints, leur tenseur est défini comme la conduite :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \{a \otimes b \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}^{\perp\perp}$$

§4.2.33 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux conduites de supports disjoints. Alors :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^{\perp})^{\perp} = \{f \mid \forall a \in \mathbf{A}, f \cdot :: a \in \mathbf{B}\}$$

§4.2.34 DÉFINITION.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des conduites de supports disjoints, on définit :

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = \{f \mid \forall a \in \mathbf{A}, f \cdot :: a \in \mathbf{B}\}$$

§4.2.35 THÉORÈME.

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^{\perp})^{\perp}$$

Les additifs

§4.2.36 LEMME (VARIANTS).

Soit a un projet hyperfini dans une conduite $\mathbf{A}$, et $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ un $*$ -isomorphisme. Alors le projet hyperfini $a^\phi = a \cdot + \cdot a \circ \phi^{-1} + \text{Id} \otimes \phi(A)$ est dans $\mathbf{A}$. On dira que a^ϕ est un variant de a .

Démonstration. Soit c un projet hyperfini de même support que a . Alors :

$$\begin{aligned} \ll a^\phi, c \gg &= a\gamma(1_{\mathfrak{C}}) + a \circ \phi^{-1}(1_{\mathfrak{B}})c - \log(\det(1 - (\text{Id} \otimes \phi(A))^{\dagger} C^{\ddagger \mathfrak{B}})) \\ &= a\gamma(1_{\mathfrak{C}}) + a(1_{\mathfrak{A}})c - \log(\det(1 - \text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger} C^{\ddagger \phi(\mathfrak{A})})) \\ &= a\gamma(1_{\mathfrak{C}}) + a(1_{\mathfrak{A}})c - \log(\det(1 - \text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger} C^{\ddagger \mathfrak{A}}))) \end{aligned}$$

Finalement, comme $\det(1 - A) = \det(1 - \psi(A))$ pour tout isomorphisme ψ , on obtient $\ll a^\phi, c \gg = \ll a, c \gg$. On en déduit que pour tout $c \in \mathbf{A}^{\perp}$, $a^\phi \perp c$, donc $a^\phi \in \mathbf{A}$. $\odot$

§4.2.37 DÉFINITION.

Soit a, b des projets hyperfinis de même support p , et $\lambda \in \mathbf{R}$. On définit $a + \lambda b$ comme le projet hyperfini $a + \lambda b \cdot + \cdot a \oplus \lambda \beta + A \oplus B$, d'idiome $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ et de support p .

§4.2.38 DÉFINITION.

Une conduite a la propriété d'*inflation* lorsque pour tout $a \in \mathbf{A}$, et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le projet hyperfini $a + \lambda o$ appartient à $\mathbf{A}$, où o est le projet $0 \cdot + \cdot 1_{\mathfrak{C}} + 0$ dont le support est égal à celui de a .

§4.2.39 La proposition suivante montre que cette définition est équivalente à celle utilisée par Girard [Gir11a].

§4.2.40 PROPOSITION.

Si $\mathbf{A}$ a la propriété d'inflation, alors pour tout élément $a = (p, a, \mathfrak{A}, \alpha, A)$ dans $\mathbf{A}$, pour toute algèbre de von Neumann finie et tout $*$ -morphisme injectif $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, le projet hyperfini $a^\phi = (p, a, \mathfrak{B}, \beta, \text{Id} \otimes \phi(A))$ tel que $\beta \circ \phi = \alpha$ est un élément de $\mathbf{A}$.

Démonstration. Soit p la projection image de l'identité par ϕ . Alors $\text{Id} \otimes \phi(A) = p \text{Id} \otimes \phi(A) p$. De plus,

$$\beta(1_{\mathfrak{B}}) = \beta(p + (1_{\mathfrak{B}} - p)) = \beta(p) + \beta(1_{\mathfrak{B}} - p) = \beta(\phi(1_{\mathfrak{A}})) + \beta(1_{\mathfrak{B}} - p) = \alpha_{1_{\mathfrak{A}}} + \beta(1 - p)$$

Soit $c \in \mathbf{A}^{\perp}$. On remarque que

$$\begin{aligned} \det(1 - \text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger}) C^{\ddagger \mathfrak{B}}) &= \det(1 - (1 \otimes p \otimes 1) \text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger}) (1 \otimes p \otimes 1) C^{\ddagger \mathfrak{B}}) \\ &= \det(1 - \text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger}) (1 \otimes p \otimes 1) C^{\ddagger \mathfrak{B}} (1 \otimes p \otimes 1)) \\ &= \det(1 - \text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger}) C^{\ddagger p \mathfrak{B} p}) \\ &= \det(1 - \text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger}) C^{\ddagger \phi(\mathfrak{A})}) \\ &= \det(1 - \text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger}) C^{\ddagger \mathfrak{A}}) \\ &= \det(1 - A^{\dagger} C^{\ddagger \mathfrak{A}}) \end{aligned}$$

On calcule $\ll c, a^\phi \gg$:

$$\begin{aligned} \ll c, a^\phi \gg &= c\beta(1_{\mathfrak{B}}) + a\gamma(1_{\mathfrak{C}}) - \log(\det(1 - (\text{Id} \otimes \phi(A))^{\dagger} C^{\ddagger \mathfrak{B}})) \\ &= c(\alpha(1_{\mathfrak{A}}) + \lambda) + a\gamma(1_{\mathfrak{C}}) - \log(\det(1 - (\text{Id} \otimes \phi \otimes \text{Id}(A^{\dagger})) C^{\ddagger \mathfrak{B}})) \\ &= c(\alpha(1_{\mathfrak{A}}) + \lambda) + a\gamma(1_{\mathfrak{C}}) - \log(\det(1 - A^{\dagger} C^{\ddagger \mathfrak{A}})) \\ &= c(\alpha(1_{\mathfrak{A}}) + \lambda) + a\gamma(1_{\mathfrak{C}}) - \log(\det(1 - (A \oplus 0)^{\dagger} C^{\ddagger \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{C}})) \\ &= \ll c, a + \lambda o \gg \end{aligned}$$

On a donc montré que $\ll c, a^\phi \gg = \ll c, a + \lambda o \gg$. Comme $\mathbf{A}$ a la propriété d'inflation, et que $a \in \mathbf{A}$, on a $\ll c, a + \lambda o \gg \neq 0, \infty$ pour tout $c \in \mathbf{A}^{\perp}$, d'où $a^\phi \perp c$ pour tout $c \in \mathbf{A}^{\perp}$. Finalement, on a montré que $a^\phi \in \mathbf{A}$. $\odot$

§4.2.41 DÉFINITION.

Une *dichologie* est une conduite $\mathbf{A}$ telle que :

- $\mathbf{A}$ a la propriété d'inflation ;
- $\mathbf{A}^\perp$ a la propriété d'inflation ;

Une dichologie $\mathbf{A}$ est *propre* lorsque $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ sont non vides.

§4.2.42 DÉFINITION.

Soit α un projet hyperfini de support p , et q une projection telle que $pq = 0$. On définit α_{p+q} comme le projet hyperfini $\alpha \cdot + \cdot \alpha + (A + 0)$ de support $p + q$.

Si $\mathbf{A}$ est une conduite de support p , on définit $\mathbf{A}_{p+q} = \{\alpha_{p+q} \mid \alpha \in \mathbf{A}\}^{\perp\perp}$.

§4.2.43 DÉFINITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux conduites de supports respectifs p, q avec $pq = 0$. On définit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \& \mathbf{B} &= ((\mathbf{A}^\perp)_{p+q})^\perp \cap ((\mathbf{B}^\perp)_{p+q})^\perp \\ \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} &= ((\mathbf{A}_{p+q})^{\perp\perp} \cup (\mathbf{B}_{p+q})^{\perp\perp})^{\perp\perp} \end{aligned}$$

§4.2.44 PROPOSITION.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des dichologies de supports disjoints, alors $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ et $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ sont des dichologies.

§4.2.45 DÉFINITION.

Étant donné deux projets $\alpha = a \cdot + \cdot \alpha + A$ et $\mathfrak{b} = b \cdot + \cdot \beta + B$, on définit le projet $\alpha + \mathfrak{b}$:

$$\alpha + \mathfrak{b} = a + b \cdot + \cdot \alpha \oplus \beta + A \oplus 0 + 0 \oplus B$$

§4.2.46 LEMME.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des dichologies propres, alors $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{\alpha_{p+q} + \mathfrak{b}_{p+q} \mid \alpha \in \mathbf{A}, \mathfrak{b} \in \mathbf{B}\}$ est tel que $\mathbf{A} + \mathbf{B} \subset \mathbf{A} \& \mathbf{B}$.

§4.2.47 Cependant, l'équivalent de la proposition 16 de l'article de Girard se trouve être fausse.

Proposition 16.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des dichologies de supports respectifs p, q , alors :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\perp = \mathbf{A}_{p+q} \cup \mathbf{B}_{p+q}$$

§4.2.48 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des dichologies propres. Il existe un projet hyperfini $\mathfrak{f} \in (\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp$ tel que $\mathfrak{f} \notin \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $p \preceq q$. Il existe donc une projection $p' \leq q$ telle que $p' \sim p$. Soit u une isométrie partielle telle que $uu^* = p$ et $u^*u = p'$. Soit $\alpha \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{c} = \alpha_{p+q} + \mathfrak{o}_u$ où $\mathfrak{o}_u = 0 \cdot + \cdot 1_{\mathbf{C}} + (u + u^*)$.

On va montrer que le projet hyperfini $\mathfrak{c}$ possède les propriétés voulues. On commence par montrer que $\mathfrak{c} \in (\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp$, puis on montre que $\mathfrak{c} \notin \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$.

On montre que $\mathfrak{c} \in (\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp$.

Soit $\mathfrak{d} = \alpha'_{p+q} + \mathfrak{b}'_{p+q} \in \mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle\rangle &= \langle\langle \alpha_{p+q} + \mathfrak{o}_u, \alpha'_{p+q} + \mathfrak{b}'_{p+q} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \alpha_{p+q}, \alpha'_{p+q} \rangle\rangle + \langle\langle \alpha_{p+q}, \mathfrak{b}'_{p+q} \rangle\rangle + \langle\langle \mathfrak{o}_u, \alpha'_{p+q} \rangle\rangle + \langle\langle \mathfrak{o}_u, \mathfrak{b}'_{p+q} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \alpha, \alpha' \rangle\rangle + \langle\langle \mathfrak{o}_u, \alpha'_{p+q} \rangle\rangle + \langle\langle \mathfrak{o}_u, \mathfrak{b}'_{p+q} \rangle\rangle \end{aligned}$$

Or, comme $u^* = u^*uu^* = p'u^*$, $A' = A'p$ et $pp' = 0$, on a :

$$\begin{aligned} -\log(\det(1 - A'(u + u^*))) &= -\log(\det(1 - A'u - A'u^*)) \\ &= -\log(\det(1 - A'u - A'pp'u^*)) \\ &= -\log(\det(1 - A'u)) \end{aligned}$$

Or, puisque $u = uu^*u = up'$ et $A' = pA'$, on a $A'uA'u = A'up'pA'u = 0$, c'est-à-dire que $A'u$ est nilpotent. En utilisant la Proposition §4.2.19, on a alors :

$$-\log(\det(1 - A'u)) = 0$$

Et donc $\ll o_u, a'_{p+q} \gg = 0$ puisque toutes les mises sont nulles. On montre de même que $\ll o_u, b'_{p+q} \gg = 0$ puisque $uB = puBq$ et donc $(uB)^2 = 0$:

$$\begin{aligned} -\log(\det(1 - (u + u^*)B)) &= -\log(\det(1 - uB - u^*B)) \\ &= -\log(\det(1 - uB - u^*pB)) \\ &= -\log(\det(1 - uB)) \\ &= -\log(1) \end{aligned}$$

On a donc montré que $\ll c, d \gg = \ll a, a' \gg$, c'est-à-dire $c \in (\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp$.

On montre que $c \notin \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$.

Pour cela, on trouve un élément t de $(\mathbf{A}_{p+q})^\perp \cap (\mathbf{B}_{p+q})^\perp$ tel que $c \not\prec t$. Soit $b' \in \mathbf{B}$, $a' \in \mathbf{A}$, $\lambda \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ avec $|\lambda| < 1$ et $o_{\lambda u} = 0 \cdot + \cdot 1_{\mathbf{C}} + \lambda(u + u^*)$. On va alors montrer qu'il existe un réel μ tel que $t = b'_{p+q} + a'_{p+q} + \mu o_{\lambda u}$ vérifie $t \in (\mathbf{A}_{p+q})^\perp$, $t \in (\mathbf{B}_{p+q})^\perp$ et $t \not\prec c$. Soit $b \in \mathbf{B}$, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} \ll t, b_{p+q} \gg &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q} + \mu o_{\lambda u}, b_{p+q} \gg \\ &= \ll b'_{p+q}, b_{p+q} \gg + \ll a'_{p+q}, b_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, b_{p+q} \gg \\ &= \ll b, b' \gg + \ll a'_{p+q}, b_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, b_{p+q} \gg \end{aligned}$$

Or, puisque $A'B = 0$, on a $\ll a'_{p+q}, b_{p+q} \gg = 0$. De plus, on a, comme auparavant :

$$\begin{aligned} \ll o_{\lambda u}, b_{p+q} \gg &= -\log(\det(1 - \lambda(u + u^*)B)) \\ &= -\log(\det(1 - \lambda uB + \lambda u^*pB)) \\ &= -\log(\det(1 - \lambda uB)) \\ &= -\log(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\ll t, b_{p+q} \gg = \ll b, b' \gg$, ce qui montre que $t \in (\mathbf{B}_{p+q})^\perp$.

Soit $a \in \mathbf{A}$, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} \ll t, a_{p+q} \gg &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q} + \mu o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg \\ &= \ll b'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \ll a'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg \\ &= \ll a, a' \gg + \ll b'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg \end{aligned}$$

Or, puisque $AB' = 0$, on a $\ll b'_{p+q}, a_{p+q} \gg = 0$. De plus, on a, comme auparavant :

$$\begin{aligned} \ll o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg &= -\log(\det(1 - \lambda(u + u^*)A)) \\ &= -\log(\det(1 - \lambda up'A + \lambda u^*A)) \\ &= -\log(\det(1 - \lambda u^*A)) \\ &= -\log(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\ll t, a_{p+q} \gg = \ll a, a' \gg$, ce qui montre que $t \in (\mathbf{A}_{p+q})^\perp$.

Donc $t \in (\mathbf{A}_{p+q})^\perp \cap (\mathbf{B}_{p+q})^\perp$. Or :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})^\perp &= (\mathbf{A}_{p+q} \cup \mathbf{B}_{p+q})^{\perp \perp \perp} \\ &= (\mathbf{A}_{p+q} \cup \mathbf{B}_{p+q})^\perp \\ &= (\mathbf{A}_{p+q})^\perp \cap (\mathbf{B}_{p+q})^\perp \end{aligned}$$

On calcule maintenant $\ll t, c \gg$:

$$\begin{aligned} \ll t, c \gg &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q} + \mu o_{\lambda u}, a_{p+q} + o_u \gg \\ &= \ll b'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \ll b'_{p+q}, o_u \gg + \ll a'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \dots \\ &\quad \dots + \ll a'_{p+q}, o_u \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, o_u \gg \end{aligned}$$

On a $\ll b'_{p+q}, a_{p+q} \gg = 0$. De plus, $\ll b'_{p+q}, o_u \gg$, $\ll a'_{p+q}, o_u \gg$ et $\ll o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg$ sont aussi égaux à zéro (le raisonnement est maintenant classique : l'un des deux termes u, u^* disparaît, puis on utilise la Proposition §4.2.19). On obtient donc :

$$\begin{aligned} \ll t, c \gg &= \ll a'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, o_u \gg \\ &= \ll a', a \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, o_u \gg \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \ll o_{\lambda u}, o_u \gg &= -\log(\det(1 - \lambda(u + u^*)(u + u^*))) \\ &= -2\text{tr}(p)\log(1 - \lambda) \end{aligned}$$

On peut alors poser $\mu = \frac{\ll a, a' \gg}{2\text{tr}(p)\log(1-\lambda)}$ et dans ce cas, $\ll t, c \gg = 0$.

Finalement, on a montré que $c \in (\mathbf{A}^{\perp} + \mathbf{B}^{\perp})^{\perp}$ et $c \notin (\mathbf{A}_{p+q} \cap \mathbf{B}_{p+q})^{\perp\perp}$ — c'est-à-dire que $c \notin \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$. ☺

§4.2.49 En particulier, l'ensemble $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ n'est pas une *éthique complète* pour $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ puisqu'il ne s'agit pas d'une éthique : $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp\perp} \neq \mathbf{A} \& \mathbf{B}$. Par contre, on montrera³ dans le Chapitre 7 que tout élément de $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ est observationnellement équivalent à un élément de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. De même, on montrera que tout élément de $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ est observationnellement équivalent soit à un élément de la forme a_{p+q} ($a \in \mathbf{A}$) soit à un élément de la forme b_{p+q} ($b \in \mathbf{B}$).

§4.2.50 Le fait que l'ensemble $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ n'engendre pas la conduite $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ implique que certaines démonstrations de l'article de Girard [Gir11a] doivent être reprises, comme la distributivité et le fait que tout élément dans $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ est observationnellement équivalent à un élément de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Nous ne présentons pas ici les démonstrations alternatives : celles-ci sont obtenues par une simple adaptation des preuves des propositions équivalentes se trouvant dans le Chapitre 7.

Exponentielles

§4.2.51 Les exponentielles sont définies par une opération de pérennisation, qui est un isomorphisme de $\mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}_{0,1}$. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 8 pour une explication de la raison d'être de cette définition. Nous nous contenterons dans ce chapitre d'expliquer succinctement la pérennisation particulière définie dans l'article de Girard [Gir11a].

§4.2.52 DÉFINITION.

Une pérennisation est un morphisme injectif $\Phi : \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_{0,1}$.

§4.2.53 DÉFINITION.

Un projet $a = a \cdot + \cdot a + A$ est *équilibré* lorsque $a = 0$, $\mathfrak{A}$ est un facteur de type I, et a est la trace normalisée sur $\mathfrak{A}$. Si a est équilibré d'idiome $\mathfrak{M}_k(\mathbf{C})$, et $\theta : \mathfrak{M}_k(\mathbf{C}) \rightarrow \mathfrak{R}$ est un $*$ -isomorphisme préservant la trace, on notera abusivement a^θ comme le « projet⁴ » $a \cdot + \cdot \text{tr} + \text{Id} \otimes \theta(A)$, où tr est la trace normalisée sur $\mathfrak{A}$.

§4.2.54 DÉFINITION.

Si $\mathbf{A}$ est une dichologie et Φ une pérennisation, on définit $\sharp_\Phi \mathbf{A}$ comme l'ensemble :

$$\sharp_\Phi \mathbf{A} = \{!_\Phi a^\theta = 0 \cdot + \cdot 1_{\mathbf{C}} + \Phi(\text{Id} \otimes \theta(A)) \mid a \in \mathbf{A} \text{ équilibré}, \theta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{R} \text{ } * \text{-iso. préservant la trace}\}$$

On peut alors définir les conduites $!_\Phi \mathbf{A} = (\sharp_\Phi \mathbf{A})^{\perp\perp}$ et $?_\Phi \mathbf{A} = (\sharp_\Phi \mathbf{A}^{\perp})^{\perp}$.

3. Le résultat est montré dans le cadre des graphes d'interaction, mais la démonstration n'utilise que des propriétés de la fonction de quantification $\ll \cdot, \cdot \gg$ qui sont satisfaites en GdI5.

4. Il ne s'agit pas réellement d'un projet puisque son idiome n'est pas une algèbre de type I.

- §4.2.55 Le morphisme utilisé dans la géométrie de l'interaction hyperfinie est défini à partir d'un groupe. Ce groupe est particulier : il s'agit d'un groupe I.C.C. moyennable (voir Section 3.3.2 du Chapitre 3) contenant le monoïde libre à deux éléments. À première vue, l'existence même d'un tel groupe peut paraître étrange : l'exemple typique d'un groupe non-moyennable est le groupe libre à au moins deux éléments. Cependant, Girard montre qu'il est possible de construire un tel groupe.
- §4.2.56 On notera $\mathbf{Z}^{\mathbb{Z}}$ le groupe des fonctions $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ presque partout nulles (muni de la somme point par point). On peut alors faire agir le groupe $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}^{\mathbb{Z}}$ par translation : on définit $\alpha : \mathbf{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{Z}^{\mathbb{Z}})$ par $\alpha(p) : (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_{n+p})_{n \in \mathbf{Z}}$. On notera maintenant $\mathfrak{G}$ le produit semi-direct de $\mathbf{Z}^{\mathbb{Z}}$ par $\mathbf{Z}$ suivant l'action α . Les éléments de $\mathfrak{G}$ sont les couples $((x_n)_{n \in \mathbf{Z}}, p)$ d'un élément de $\mathbf{Z}^{\mathbb{Z}}$ et d'un élément de $\mathbf{Z}$, et la loi de composition est définie par :

$$((x_n)_{n \in \mathbf{Z}}, p) \cdot ((y_n)_{n \in \mathbf{Z}}, q) = ((x_n)_{n \in \mathbf{Z}} + (\alpha(p)((y_n)))_{n \in \mathbf{Z}}, p + q) = ((x_n + y_{n+p})_{n \in \mathbf{Z}}, p + q)$$

Comme produit semi-direct de groupes moyennables, $\mathfrak{G}$ est un groupe moyennable. De plus, il est I.C.C. puisque, si $x = ((x_n), p)$ est différent de $((0), 0)$, la classe de conjugaison de x contient au moins les éléments $((\delta_{n,0}, k)^{-1} x (\delta_{n,0}, k))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Or $((\delta_{n,0}, k)^{-1} = ((-\delta_{n,-k}), -k)$, et alors $((\delta_{n,0}, k)^{-1} x (\delta_{n,0}, k)) = ((x_{n-k} + \delta_{n,p} - \delta_{n,-k}))_{n \in \mathbf{Z}}, p)$. Donc la classe de conjugaison de x est nécessairement infinie car ces éléments sont deux à deux distincts.

- §4.2.57 De plus, il est possible de trouver une copie du monoïde libre dans $\mathfrak{G}$. On définit $\mathbf{a} = ((\delta_{n,0})_n, 0)$ et $\mathbf{b} = ((0)_n, 1)$. Alors on peut calculer que $((a_k)_k, p)\mathbf{b} = ((a_k)_k, p + 1)$ et $((a_k)_k, p)\mathbf{a} = ((a_k + \delta_{k,0})_k, p)$, ce qui permet de montrer que :

$$\mathbf{a}^{p_k} \mathbf{b}^{q_k} \mathbf{a}^{p_{k-1}} \mathbf{b}^{q_{k-1}} \dots \mathbf{a}^{p_1} \mathbf{b}^{q_1} = ((\bar{p}_n)_n, \sum_{i=1}^k q_i)$$

où $\bar{p}_n = p_i$ lorsque $n = \sum_{j=1}^i q_j$, et $\bar{p}_n = 0$ sinon. Ceci montre bien que le monoïde engendré par $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est libre.

Par exemple, le mot $\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^1 \mathbf{a}^{48} \mathbf{b}^2$ est égal à $((x_n), 3)$ où (x_n) est la suite définie par $x_2 = 48$, $x_3 = 2$ et $x_n = 0$ pour $n \neq 2, 3$.

Finalement, on a montré que :

- §4.2.58 PROPOSITION (GIRARD [GIR11A]).
Le groupe $\mathbf{Z}^{\mathbb{Z}} \rtimes \mathbf{Z}$ est I.C.C. moyennable et contient une copie du monoïde libre à deux éléments.
- §4.2.59 La pérennisation Ω utilisée par Girard est alors défini comme suit. Si A est un opérateur dans $\mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{R}$, on utilise l'isomorphisme entre $\mathfrak{R}$ et $\otimes_{\omega \in \mathbf{1M}} \mathfrak{R}$ pour obtenir un opérateur dans $\mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{R}^M$. Cet opérateur définit un élément de $\mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{R}^{\mathfrak{G}} \rtimes \mathfrak{G}$. Comme $\mathfrak{R}^{\mathfrak{G}} \rtimes \mathfrak{G}$ est isomorphe à $\mathfrak{R}$, il existe un isomorphisme de $\mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{R}^{\mathfrak{G}} \rtimes \mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{R}_{0,1}$. Le résultat de ces opérations est noté $\Omega(A)$.
- §4.2.60 En réalité, l'intérêt de cette construction se cache dans le fait qu'il ne s'agit pas d'un isomorphisme mais d'un morphisme injectif. C'est le fait de coder l'opérateur sur une partie seulement de l'idiome qui va permettre de simuler l'interaction dialectale des opérateurs et définir la promotion. La construction des exponentielles du Chapitre 8 permet de mieux comprendre en quoi le fait que ce soit une injection permet d'interpréter la promotion fonctorielle.
- §4.2.61 PROPOSITION (GIRARD (GDI5.1) [GIR11A]).
Pour toutes conduites négatives $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, on a :

$$!_{\Omega} \mathbf{A} \otimes !_{\Omega} \mathbf{B} = !_{\Omega} (\mathbf{A} \& \mathbf{B})$$

- §4.2.62 PROPOSITION (GIRARD [GIR11A]).
Il est possible d'implémenter la promotion fonctorielle.

4.A GdI5.1

Définition

§4.A.1 DÉFINITION.

Un *projet* de la GdI5.1 est un projet au sens de la Définition §4.2.23 vérifiant de plus que $\alpha(1_{\mathfrak{A}}) \neq 0$.

§4.A.2 Les définitions d'orthogonalité, de produit tensoriel, d'exécution sont les mêmes que celles présentées plus haut. Cependant, la notion de dichologie est remplacée par les notions de conduites positives et négatives.

§4.A.3 DÉFINITION (CONDUITES NÉGATIVES/POSITIVES).

Une conduite $\mathbf{A}$ est *négative* lorsque :

- $a \cdot + \cdot \alpha + A \in \mathbf{A}$ implique $a = 0$;
- $a \in \mathbf{A}$ implique $a^\phi \in \mathbf{A}$ pour tout morphisme injectif ϕ (pas nécessairement unital) ;

Une conduite $\mathbf{B}$ est *positive* lorsque :

- $a \cdot + \cdot \alpha + A \in \mathbf{A}$ avec $a \neq 0$ implique $b \cdot + \cdot \alpha + A \in \mathbf{A}$ pour tout $b \neq 0$;
- pour tout $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot + \cdot 1_{\mathbf{C}} + 0 \in \mathbf{B}$.

§4.A.4 On peut alors définir les connecteurs additifs : le $\&$ entre conduites négatives, et le $\oplus$ entre conduites positives. Si a, b sont des éléments dans les conduites négatives $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ tels que $\alpha(1_{\mathfrak{A}}) + \beta(1_{\mathfrak{B}}) \neq 0$, on notera $a + b$ l'élément noté $a \& b$ par Girard, à savoir le projet $0 \cdot + \cdot \alpha \oplus \beta + A \oplus 0 + 0 \oplus B$ dont l'idiome est $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$.

Le problème des additifs

§4.A.5 Contrairement à ce que nous avons démontré (Proposition §4.2.48), Girard énonce (Proposition 16) dans son article que l'ensemble des éléments de la forme $a + b$ avec $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}$ engendre la conduite $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$. Il est alors naturel de se demander pourquoi la construction des additifs dans la GdI5.2 possède des propriétés plus faibles que celle présentée dans l'article de Girard. En réalité, la Proposition 16 en question se trouve être erronée. Nous allons donner la démonstration de ce fait ci-dessous.

§4.A.6 LEMME (LEMME (GdI5.1)).

Soit $\mathbf{A}$ une conduite négative, $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{A}^\perp$. Alors seulement deux cas se présentent :

- soit la mise b de b est nulle ;
- soit l'interaction $-\log(\det(1 - A^\dagger B^\ddagger))$ est nulle.

Démonstration. Supposons que la mise b de b est non nulle et que $\lambda = -\log(\det(1 - A^\dagger B^\ddagger))$ est également non nul. Alors $\langle\langle a, b \rangle\rangle = b\alpha(1_{\mathfrak{A}}) - \log(\det(1 - A^\dagger B^\ddagger))$. Comme $\alpha(1_{\mathfrak{A}})$ est non nul, on en déduit que le réel $\lambda/\alpha(1_{\mathfrak{A}})$ est non nul. En utilisant l'une des deux propriétés définissant les conduites positives, on en déduit que $b' = -\lambda/\alpha(1_{\mathfrak{A}}) \cdot + \cdot \beta + B$ est un élément de $\mathbf{A}^\perp$. Or $\langle\langle a, b' \rangle\rangle = 0$, ce qui est une contradiction. On en déduit que soit $a = 0$, soit $\lambda = 0$. $\odot$

§4.A.7 LEMME (LEMME (GdI5.1)).

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des conduites négatives, on a $\mathbf{A} + \mathbf{B} \subset \mathbf{A} \& \mathbf{B}$.

Démonstration. Comme $\mathbf{A} \& \mathbf{B} = (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})^\perp = (\mathbf{A}_{p+q} \cup \mathbf{B}_{p+q})^\perp$, on montre que tout élément de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est orthogonal aux éléments de $\mathbf{A}_{p+q} \cup \mathbf{B}_{p+q}$. Soit $f + g$ un élément de $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$, $a_{p+q} \in \mathbf{A}_{p+q}$ et $b \in \mathbf{B}_{p+q}$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle\langle f_{p+q} + g_{p+q}, a_{p+q} \rangle\rangle &= \langle\langle f_{p+q}, a_{p+q} \rangle\rangle + \langle\langle g_{p+q}, a_{p+q} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f, a \rangle\rangle + a\gamma(1_{\mathfrak{G}}) \end{aligned}$$

Or, par le lemme précédent, soit $\langle\langle f, a_{p+q} \rangle\rangle = a\varphi(1_{\mathfrak{F}})$, soit $a = 0$. Dans le premier cas, on obtient que $\langle\langle f_{p+q} + g_{p+q}, a_{p+q} \rangle\rangle = a(\varphi(1_{\mathfrak{F}}) + \gamma(1_{\mathfrak{G}}))$ qui est nécessairement différent de 0 et ∞ . Dans le deuxième cas, $\langle\langle f_{p+q} + g_{p+q}, a_{p+q} \rangle\rangle = \langle\langle f, a \rangle\rangle$ qui est différent de 0 et ∞ également.

On montre de la même manière que $\langle\langle f_{p+q} + g_{p+q}, b_{p+q} \rangle\rangle \neq 0, \infty$. $\odot$

§4.A.8 PROPOSITION (CONTRE-EXEMPLE EN GDI5.1).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux conduites positives. Il existe un projet dans $(\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp$ qui n'appartient pas à la conduite $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$.

Démonstration. La preuve est une adaptation de la preuve de la Proposition §4.2.48 afin de tenir compte des différences entre les GdI5.1 et GdI5.2. Comme précédemment, si l'on note p et q les supports respectifs disjoints de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, on peut supposer sans perte de généralité que $p \preceq q$, et donc qu'il existe une projection $p' \leq q$ telle que $p \sim p'$. On notera u l'isométrie partielle telle que $uu^* = p$ et $u^*u = p'$. On choisit un élément $a = a \cdot + \cdot 1_C + 0$ de $\mathbf{A}$ et on définit $c = a_{p+q} + o_u - o$ avec $o_u = 0 \cdot + \cdot 1_C + (u + u^*)$ et $o = 0 \cdot + \cdot 1_C + 0$.

Le projet c est dans $(\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp$.

Soit $d \in \mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp$. Alors $d = a'_{p+q} + b'_{p+q}$ où $a' \in \mathbf{A}^\perp$ et $b' \in \mathbf{B}^\perp$. On peut alors calculer $\ll c, d \gg$ (en utilisant le fait que a', b' sont dans des conduites négatives et donc de mise nulle on remarque que $\ll o, a'_{p+q} \gg = \ll o, b'_{p+q} \gg = 0$) :

$$\begin{aligned} \ll c, d \gg &= \ll a_{p+q} + o_u + o, a'_{p+q} + b'_{p+q} \gg \\ &= \ll a_{p+q}, a'_{p+q} + b'_{p+q} \gg + \ll o_u, a'_{p+q} \gg + \ll o, a'_{p+q} \gg + \ll o_u, b'_{p+q} \gg + \ll o, b'_{p+q} \gg \\ &= \ll a_{p+q}, a'_{p+q} + b'_{p+q} \gg + \ll o_u, a'_{p+q} \gg + \ll o_u, b'_{p+q} \gg \end{aligned}$$

De la même manière que dans la preuve de la proposition §4.2.48, on montre que $\ll o_u, a'_{p+q} \gg = 0$ et $\ll o_u, b'_{p+q} \gg = 0$, car les mises de a', b' sont nulles. D'où :

$$\ll c, d \gg = \ll a_{p+q}, a'_{p+q} \gg$$

On en conclut, en utilisant le lemme précédent, que $c \perp d$.

Le projet c n'est pas dans $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$.

Pour cela, on trouve un élément t de $(\mathbf{A}_{p+q})^\perp \cap (\mathbf{B}_{p+q})^\perp$ tel que $c \not\perp t$. Soit $b' \in \mathbf{B}^\perp$, $a' \in \mathbf{A}^\perp$, $\lambda \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ avec $|\lambda| < 1$ et $o_{\lambda u} = 0 \cdot + \cdot 1_C + \lambda(u + u^*)$. On va montrer qu'il existe un réel μ tel que $t = b'_{p+q} + a'_{p+q} + \mu o_{\lambda u} - \mu o$ vérifie $t \in (\mathbf{A}_{p+q})^\perp$, $t \in (\mathbf{B}_{p+q})^\perp$ et $t \not\perp c$. Soit $b \in \mathbf{B}$, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} \ll t, b_{p+q} \gg &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q} + \mu o_{\lambda u} - \mu o, b_{p+q} \gg \\ &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q}, b_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, b_{p+q} \gg - \mu \ll o, b_{p+q} \gg \\ &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q}, b_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, b_{p+q} \gg - \mu \ll o, b_{p+q} \gg \end{aligned}$$

Or, en utilisant le fait que $A'B = 0$ on a $\ll a'_{p+q}, b_{p+q} \gg = a'(1_{\mathcal{A}'})b$. De plus, $\ll o, b_{p+q} \gg = b$. On a alors :

$$\begin{aligned} \ll o_{\lambda u}, b_{p+q} \gg &= b - \log(\det(1 - \lambda(u + u^*)B)) \\ &= b - \log(\det(1 - \lambda u B + \lambda u^* p B)) \\ &= b - \log(\det(1 - \lambda u B)) \\ &= b - \log(1) \\ &= b \end{aligned}$$

Donc $\ll t, b_{p+q} \gg = \ll b_{p+q}, b'_{p+q} + a'_{p+q} \gg$, ce qui montre (grâce au lemme précédent) que $t \in (\mathbf{B}_{p+q})^\perp$.

Soit $a \in \mathbf{A}$, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} \ll t, a_{p+q} \gg &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q} + \mu o_{\lambda u} - (1 + \mu)o, a_{p+q} \gg \\ &= \ll b'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \ll a'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg - (1 + \mu) \ll o, a_{p+q} \gg \\ &= \ll a, a' \gg + \ll b'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg - (1 + \mu) \ll o, a_{p+q} \gg \end{aligned}$$

Or, puisque $AB' = 0$, $\ll b'_{p+q}, a_{p+q} \gg = a$; de même $\ll o, b_{p+q} \gg = a$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \ll o_{\lambda u}, a_{p+q} \gg &= a - \log(\det(1 - \lambda(u + u^*)A)) \\ &= a - \log(\det(1 - \lambda u p' A + \lambda u^* A)) \\ &= a - \log(\det(1 - \lambda u^* A)) \\ &= a - \log(1) \\ &= a \end{aligned}$$

Donc $\ll t, a_{p+q} \gg = \ll a, a' \gg + a + \mu a - (1 + \mu)a = \ll a, a' \gg$, ce qui montre que $t \in (\mathbf{A}_{p+q})^\perp$.
Donc $t \in (\mathbf{A}_{p+q})^\perp \cap (\mathbf{B}_{p+q})^\perp$. Or :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})^\perp &= (\mathbf{A}_{p+q} \cup \mathbf{B}_{p+q})^{\perp\perp\perp} \\ &= (\mathbf{A}_{p+q} \cup \mathbf{B}_{p+q})^\perp \\ &= (\mathbf{A}_{p+q})^\perp \cap (\mathbf{B}_{p+q})^\perp \end{aligned}$$

On calcule maintenant $\ll t, c \gg$:

$$\begin{aligned} \ll t, c \gg &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q} + \mu o_{\lambda u} - \mu o, a_{p+q} + o_u - o \gg \\ &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \ll \mu o_{\lambda u} - \mu o, o_u - o \gg \\ &= \ll b'_{p+q} + a'_{p+q}, a_{p+q} \gg + \mu \ll o_{\lambda u}, o_u \gg \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ll o_{\lambda u}, o_u \gg &= -\log(\det(1 - \lambda(u + u^*)(u + u^*))) \\ &= -2\text{tr}(p)\log(1 - \lambda) \end{aligned}$$

D'où :

$$\ll t, c \gg = \ll b'_{p+q} + a'_{p+q}, a_{p+q} \gg - 2\mu\text{tr}(p)\log(1 - \lambda)$$

On peut alors poser $\mu = \frac{\ll b'_{p+q} + a'_{p+q}, a_{p+q} \gg}{2\text{tr}(p)\log(1 - \lambda)}$ et dans ce cas, $\ll t, c \gg = 0$.

Finalement, on a montré que $c \in (\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp$ et $c \notin (\mathbf{A}_{p+q} \cap \mathbf{B}_{p+q})^{\perp\perp}$ — c'est-à-dire que $c \notin \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$.

☺

Deuxième partie

Graphes d'Interaction

CHAPITRE 5

ADJONCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Table des matières

5.1 Définitions sur les graphes	88
5.1.1 Graphes	88
5.1.2 Cycles, Chemins et Circuits	91
5.2 Adjonctions Géométriques	93
5.2.1 Adjonction des circuits	93
5.2.2 Adjonction des 1-circuits	95
5.2.3 Adjonction des circuits eulériens	96
5.2.4 Adjonction des circuits simples	99
5.3 Graphes tranchés, graphes épais	102
5.3.1 Adjonctions numériques	103
5.3.2 Graphes tranchés : la construction additive	104
5.3.3 Graphes épais	105
5.3.4 Graphes épais tranchés	111
5.4 Conclusion et Notations	115

§5.1 Nous présenterons dans ce chapitre différentes notions de graphes, ainsi que des généralisations de celles-ci permettant d'introduire la notion de dialecte (correspondant à la notion d'*idiomes* en GdI5). Dans chacun des cas, nous montrons la propriété fondamentale qui permet de développer une GdI5 pour la logique linéaire multiplicative additive (MALL) : la propriété cyclique. Informellement, la propriété cyclique relie l'opération consistant à définir le graphe $F :: G$ des chemins alternant entre deux graphes F et G et les ensembles de cycles alternés entre deux graphes. La Figure 5.1 permet de mieux comprendre celle-ci. Dans cette figure, nous avons représenté trois graphes F, G, H tels qu'un sommet ne peut appartenir aux trois graphes simultanément. Les arêtes doubles représentent les ensembles d'arêtes qu'il est possible de suivre pour passer d'un graphe à un autre : par exemple l'arête double entre V^F et V^G représente l'ensemble des arêtes de F dont le but est un élément de V^G . On représente également les ensembles de cycles formés uniquement d'arêtes de F et de G (respectivement d'arêtes de F et de H , respectivement d'arêtes de G et de H) par un cycle rouge (respectivement bleu, respectivement vert), l'ensemble des cycles contenant au moins une arête de chaque graphe étant représenté en violet. Les rectangles colorés représentent le résultat de l'exécution de deux graphes, que l'on peut comprendre comme une boîte dont le contenu ne nous est pas accessible. On remarque alors que lors de l'exécution de deux graphes F et G , on « perd » les cycles internes alternants entre F et G . La propriété cyclique énonce alors, si l'on note $\text{Cyc}(A, B)$ l'ensemble des cycles entre deux graphes A et B :

$$\text{Cyc}(F :: G, H) \cup \text{Cyc}(F, G) \cong \text{Cyc}(G :: H, F) \cup \text{Cyc}(G, H) \cong \text{Cyc}(H :: F, G) \cup \text{Cyc}(H, F)$$

5.1 Définitions sur les graphes

Graphes

§5.1.1 Dans la suite, on définit la notion de graphe orienté pondéré. Les poids seront considérés dans un ensemble Ω clos par multiplication. Dans les faits, on utilisera principalement l'ensemble $]0, 1]$ pour Ω .

§5.1.2 DÉFINITION.

Un *graphe orienté pondéré* (dans Ω) est un uplet $G = (V^G, E^G, s^G, t^G, \omega^G)$, où V^G est l'ensemble des sommets, E^G l'ensemble des arêtes, s^G et t^G deux fonctions de E^G dans V^G , respectivement les fonctions *source* et *but*, et ω^G une fonction $E^G \rightarrow \Omega$, la fonction de pondération.

On écrira $E^G(v, w)$ l'ensemble des arêtes $e \in E^G$ satisfaisant $s^G(e) = v$ et $t^G(e) = w$. De plus, on oubliera les exposants lorsque le contexte sera suffisamment clair.

§5.1.3 On définit maintenant une construction sur les graphes qui nous permettra de considérer, étant donnés deux graphes G et H , l'ensemble des chemins alternants entre G et H , c'est-à-dire formés d'arêtes alternant entre une arête de G et une arête de H . Cette construction est assez standard dans la littérature [AHS02, AJM94, dF09]. La première des définitions (le branchement de deux graphes) est la clef de voûte de la construction, et nous verrons dans le Chapitre 7 comment une modification de celle-ci permet de faire apparaître des *dialectes*, indispensables pour définir les connecteurs additifs et exponentiels. Une fois que l'on sera capable de parler de chemins et cycles alternants entre deux graphes, on obtiendra deux résultats importants : une opération d'exécution associative — correspondant à l'élimination des coupures, et une égalité à trois termes (proposition §5.2.13) à partir de laquelle il sera possible de définir une adjonction.

On écrira $\uplus$ l'union disjointe d'ensembles. Étant donnés des ensembles E, F et X ainsi que deux fonctions $f : E \rightarrow X$ et $g : F \rightarrow X$, on écrira $f \uplus g$ la fonction $E \uplus F \rightarrow X$ définie par la propriété universelle des co-produits, c'est-à-dire le “co-couplage” de f et g .

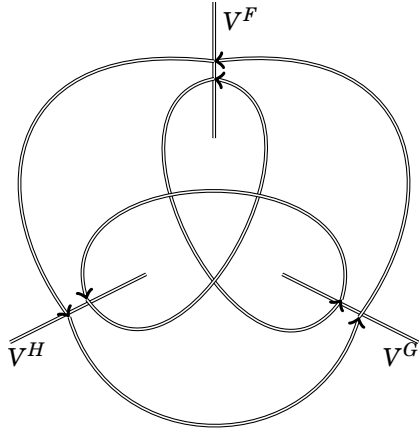
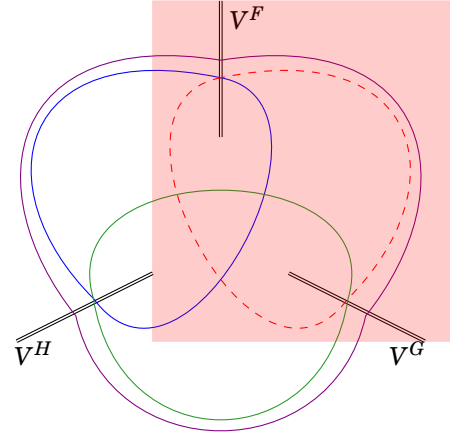
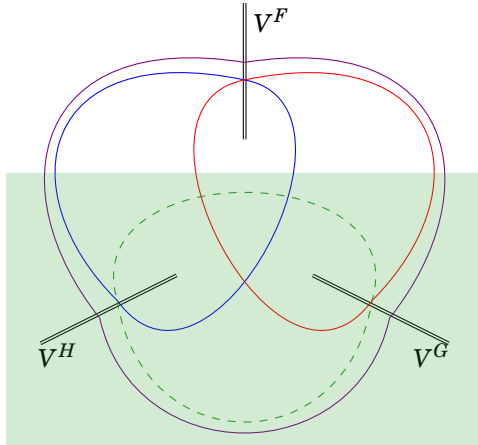
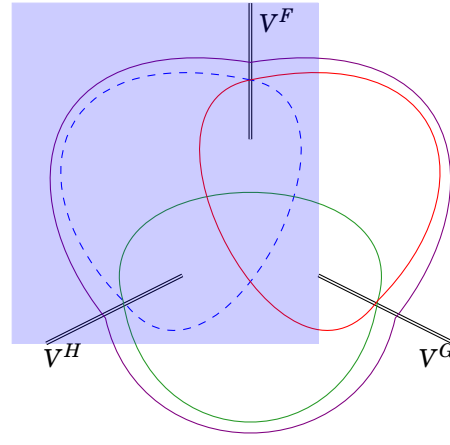
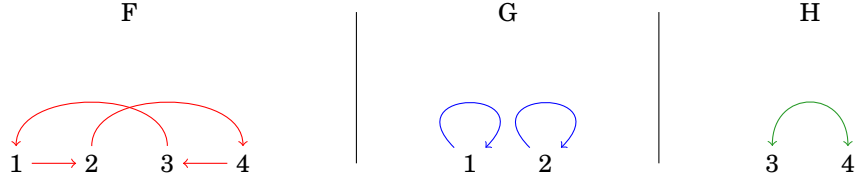
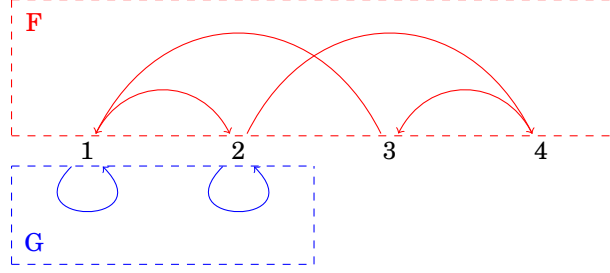
(a) Représentation des graphes F, G, H et leurs interactions(b) Les cycles entre $F :: G$ et H (c) Les cycles entre $G :: H$ et F (d) Les cycles entre $F :: G$ et H

FIGURE 5.1 – Représentation graphique de la propriété cyclique

FIGURE 5.2 – Graphes F , G et H FIGURE 5.3 – Branchement de F et G

§5.1.4 DÉFINITION (UNION DE GRAPHES).

Étant donnés deux graphes G et H , on définit l'union $G \cup H$ de G et H par :

$$(V^G \cup V^H, E^G \uplus E^H, s^G \uplus s^H, t^G \uplus t^H, \omega^G \uplus \omega^H)$$

§5.1.5 REMARQUE. Il est important de noter que si l'on considère l'union disjointe des ensembles d'arêtes, on fait l'union (non disjointe) des ensembles de sommets. Par conséquent, l'union de deux graphes n'est pas toujours égale à l'union de deux copies isomorphes de ces graphes, puisque rien ne nous assure que les ensembles de sommets de ces copies isomorphes soient dans la même disposition. C'est là que la localité prend toute son importance, puisqu'une intersection non vide des ensembles de sommets de deux graphes représentera une coupure, c'est-à-dire l'endroit où l'interaction a lieu.

Pour définir l'ensemble des chemins qui alternent entre deux graphes, il faut que l'on garde une trace de l'origine des arêtes dans le graphe union, ce qui motive la définition suivante.

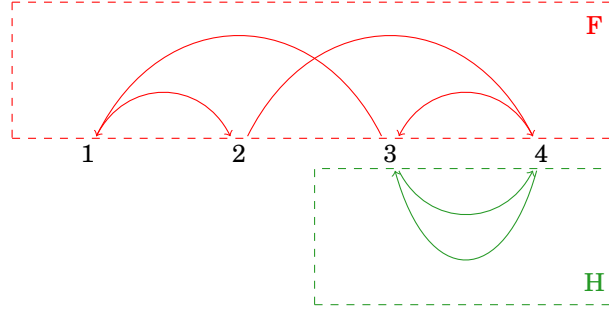
§5.1.6 DÉFINITION (BRANCHEMENT).

Étant donnés deux graphes G et H , on définit le graphe $G \square H$ comme le graphe union de G et H , associé à une fonction de coloriage δ de $E^G \uplus E^H$ dans $\{0, 1\}$ telle que

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 & \text{si } x \in E^G \\ \delta(x) = 1 & \text{si } x \in E^H \end{cases}$$

On appellera $G \square H$ le *branchement* de G et H .

Les figures 5.3 et 5.4 montrent deux exemples de branchement entre les graphes F et G et entre les graphes F et H de la figure 5.2 où les couleurs sont représentées par la position des arêtes : les arêtes du dessus correspondent aux arêtes coloriées 0, tandis que les arêtes du dessous correspondent aux arêtes coloriées 1.

FIGURE 5.4 – Branchement de F et H

Cycles, Chemins et Circuits

§5.1.7 DÉFINITION (CHEMINS, CYCLES ET k -CYCLES).

Un *chemin* π dans un graphe G est une suite finie d'arêtes $(e_i)_{0 \leq i \leq n}$ ($n \in \mathbf{N}$) dans E^G telles que $s(e_{i+1}) = t(e_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$. On appellera les sommets $s(\pi) = s(e_0)$ et $t(\pi) = t(e_n)$ la source et le but du chemin.

On dira qu'un chemin est *simple* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

On dira qu'un chemin est *eulérien* s'il ne passe pas deux fois par la même arête.

§5.1.8 DÉFINITION (CHEMINS ALTERNANTS).

Soit $G = (V^G, E^G, s^G, t^G, \omega^G)$ et $H = (V^H, E^H, s^H, t^H, \omega^H)$ deux graphes. On définit les *chemins alternants* entre G et H comme les chemins (e_i) dans $G \square H$ qui satisfont :

$$\delta(e_i) \neq \delta(e_{i+1})$$

On écrira $\text{Chem}(G, H)$ l'ensemble des chemins alternants dans le graphe $G \square H$, et on notera $\text{Chem}^{v,w}(G, H)$ l'ensemble des chemins alternants dans $G \square H$ de source v et de but w .

§5.1.9 REMARQUE. Avec les notations de la définition précédente, si $V^G \cap V^H = \emptyset$, l'ensemble des chemins alternants $\text{Chem}(G, H)$ est réduit à l'ensemble $E^G \uplus E^H$, modulo l'identification entre arêtes et chemins de longueur 1.

§5.1.10 DÉFINITION (CYCLES ET k -CYCLES).

On dira qu'un chemin $\pi = (e_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un *cycle* si $s(e_0) = t(e_n)$, c'est-à-dire la source et le but de π coïncident. Si π est un cycle, et k est le plus grand entier tel qu'il existe un cycle ρ avec $^1 \pi = \rho^k$, on dira que π est un *k -cycle*.

On appellera *cycle alternant* dans $G \square H$ un cycle $(e_i)_{0 \leq i \leq n} \in \text{Chem}(G, H)$ tel que $\delta(e_n) \neq \delta(e_0)$.

§5.1.11 REMARQUE. Tous les cycles alternants sont de longueur paire, puisqu'ils vérifient $\delta(e_0) \neq \delta(e_n)$.

§5.1.12 PROPOSITION.

Soit $\rho = (e_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ un cycle, et σ la permutation envoyant i sur $i+1$ ($i = 0, \dots, n-2$) et $n-1$ sur 0. On définit l'ensemble

$$\bar{\rho} = \{(e_{\sigma^k(i)})_{0 \leq i \leq n-1} \mid 0 \leq k \leq n-1\}$$

Alors ρ est un k -cycle si et seulement si le cardinal de $\bar{\rho}$ est égale à n/k . Dans la suite, on utilisera le terme de *k -circuit* (ou plus généralement celui de *circuit*) lorsque nous ferons référence à une telle classe d'équivalence modulo permutations cycliques d'un k -cycle.

Démonstration. On retrouve ici des techniques classiques associées aux groupes cycliques. Si $\rho = (e_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ est un chemin et τ une permutation de $\{0, \dots, n-1\}$, on notera $\tau(\rho) = (e_{\tau(i)})_{0 \leq i \leq n-1}$.

1. Ici, ρ^k correspond à la concaténation de k copies de ρ .

Premièrement, remarquons que si ρ est un k -cycle, alors $\sigma^{n/k}(\rho) = \rho$. Si s est le plus petit entier tel que $\sigma^s(\rho) = \rho$, alors $e_{i+s} = e_i$. Par conséquent, en écrivant $m = n/s$, on obtient $\rho = \pi^m$ où $\pi = (e_i)_{0 \leq i \leq s-1}$. Cela implique que $k = n/s$ par la maximalité de k . Donc ρ est un k -cycle si et seulement si le plus petit entier s tel que $\sigma^s(\rho) = \rho$ est égal à n/k .

Posons s le plus petit entier tel que $\sigma^s(\rho) = \rho$. Pour tous entiers p, q tels que $0 \leq q < s$, on a $\sigma^{ps+q}(\rho) = \sigma^q(\rho)$. En effet, c'est une conséquence directe du fait que $\sigma^{ps}(\rho) = \rho$ pour tout entier p . De plus, puisque $\sigma^n(\rho) = \rho$, alors s divise n . Donc le cardinal de $\bar{\rho}$ est au plus égale à s . Pour montrer que le cardinal de $\bar{\rho}$ est exactement n/s , il suffit de montrer que $\sigma^i(\rho) \neq \sigma^j(\rho)$ pour $i < j$ entre 0 and $s-1$. Mais si c'était le cas, puisque σ est une bijection, on aurait $\rho = \sigma^{j-i}(\rho)$, une égalité contredisant la minimalité de s . $\odot$

On étend maintenant naturellement la fonction de poids aux chemins.

§5.1.13 DÉFINITION.

Le poids d'un chemin $\pi = (e_i)_{0 \leq i \leq n}$ dans un graphe pondéré G est défini par le produit des poids des arêtes qui le composent : $\omega^G(\pi) = \prod_{i=0}^n \omega^G(e_i)$.

Cette définition ne dépend pas du chemin à proprement parler, mais uniquement de l'ensemble des arêtes qui le composent. Le poids est donc invariant par permutation cyclique et on peut donc définir le poids d'un circuit comme le poids des cycles de la classe d'équivalence.

§5.1.14 DÉFINITION.

Soit deux graphes F, G munis de deux fonctions de coloriage des arêtes δ^F, δ^G . On étend l'opération de branchement de la manière suivante : le graphe $F \square G$ est défini comme le graphe union $F \cup G$ de $F = (V^F, E^F, s^F, t^F, \omega^F)$ et $G = (V^G, E^G, s^G, t^G, \omega^G)$, muni de la fonction de coloriage δ :

$$\begin{cases} \delta(x) = (0, \delta^F(x)) & \text{si } x \in E^F \\ \delta(x) = (1, \delta^G(x)) & \text{si } x \in E^G \end{cases}$$

§5.1.15 PROPOSITION.

L'opération de branchement est associative. Étant donnés trois graphes F, G , et H munis de fonctions de coloriage $\delta^i : E^i \rightarrow C^i$ ($i = F, G, H$) :

$$F \square (G \square H) \cong (F \square G) \square H$$

où le signe $\cong$ signifie que les deux graphes sont égaux à un renommage des couleurs près.

Démonstration. Les graphes sous-jacents $F \cup (G \cup H)$ et $(F \cup G) \cup H$ sont égaux. Seule la fonction de coloriage diffère. Remarquons que si x est une arête dans $F \square (G \square H)$, on est dans l'un des trois cas suivants :

$$\begin{aligned} \delta^{F \square (G \square H)}(x) &= (0, \delta^F(x)) \text{ si } x \in E^F \\ \delta^{F \square (G \square H)}(x) &= (1, 0, \delta^G(x)) \text{ si } x \in E^G \\ \delta^{F \square (G \square H)}(x) &= (1, 1, \delta^H(x)) \text{ si } x \in E^H \end{aligned}$$

Similairement, si x est une arête dans $(F \square G) \square H$ on est dans l'un des cas suivants :

$$\begin{aligned} \delta^{(F \square G) \square H}(x) &= (0, 0, \delta^F(x)) \text{ si } x \in E^F \\ \delta^{(F \square G) \square H}(x) &= (0, 1, \delta^G(x)) \text{ si } x \in E^G \\ \delta^{(F \square G) \square H}(x) &= (1, \delta^H(x)) \text{ si } x \in E^H \end{aligned}$$

On définit donc la fonction θ de $\{0, 1\} \times ((\{0, 1\} \times (C^F \cup C^G)) \cup C^H)$ dans $\{0, 1\} \times (C^F \cup (\{0, 1\} \times (C^G \cup C^H)))$ par :

$$\begin{aligned} \theta(0, 0, x) &= (0, x) \\ \theta(0, 1, x) &= (1, 0, x) \\ \theta(1, x) &= (1, 1, x) \\ \theta(x) &= x \text{ dans les autres cas} \end{aligned}$$

Alors il est facile de vérifier que le graphe $(F \sqcup G) \sqcup H$ muni de la fonction de coloriage $\theta \circ \delta^{(F \sqcup G) \sqcup H}$ est égal au graphe $F \sqcup (G \sqcup H)$ muni de la fonction de coloriage $\delta^{F \sqcup (G \sqcup H)}$. $\odot$

§5.1.16 COROLLAIRE.

L'ensemble des chemins alternants dans $(F \sqcup G) \sqcup H$ est en bijection avec l'ensemble des chemins alternants dans $F \sqcup (G \sqcup H)$.

§5.1.17 COROLLAIRE.

L'ensemble des cycles alternants dans $(F \sqcup G) \sqcup H$ est en bijection avec l'ensemble des cycles alternants dans $F \sqcup (G \sqcup H)$.

§5.1.18 COROLLAIRE.

L'ensemble des circuits alternants dans $(F \sqcup G) \sqcup H$ est en bijection avec l'ensemble des circuits alternants dans $F \sqcup (G \sqcup H)$.

§5.1.19 On aura également besoin de la proposition suivante par la suite. La preuve en est immédiate. En effet, le fait de renommer (bijectivement) les sommets de deux graphes F et G ne change pas leur interaction². C'est-à-dire que les ensembles de cycles sont les mêmes.

§5.1.20 PROPOSITION.

Soit F, G deux graphes, et $\phi : V^F \cup V^G \rightarrow E$ une bijection. On note $\phi(F)$ (resp. $\phi(G)$) le graphe $(\phi(V^F), E^F, \phi \circ s^F, \phi \circ t^F, \omega^F)$ (resp. $(\phi(V^G), E^G, \phi \circ s^G, \phi \circ t^G, \omega^G)$). Alors l'ensemble des circuits alternants dans $F \sqcup G$ est égal à l'ensemble des circuits alternants dans $\phi(F) \sqcup \phi(G)$.

5.2 Adjonctions Géométriques

Adjonction des circuits

Une conséquence directe des propositions précédentes est la propriété cyclique des circuits.

§5.2.1 DÉFINITION (ENSEMBLE DES CIRCUITS).

Soit F, G deux graphes. On note $\text{Circ}(F, G)$ l'ensemble des circuits alternants dans $F \sqcup G$.

On définit maintenant une opération sur les graphes que l'on nommera *exécution*, une opération assez standard là encore, et qui ressemble à la « composition and hiding » des stratégies en sémantiques de jeu. Cette opération correspond à l'élimination des coupures dans les réseaux. Si F et G sont deux graphes, l'exécution $F \bowtie G$ sera définie comme le graphe des chemins alternant entre F et G (la partie « composition ») dont la source et le but sont dans la différence symétrique $V^F \Delta V^G$ de V^F et V^G (la partie « hiding »).

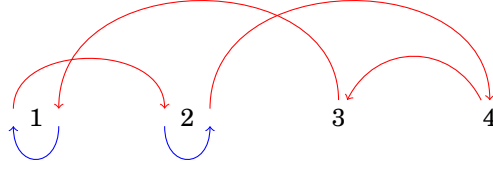
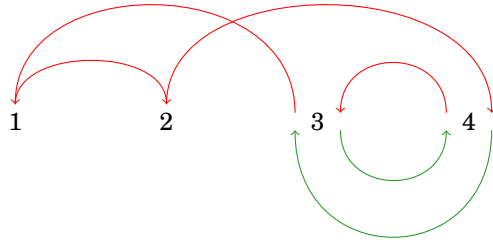
§5.2.2 DÉFINITION (EXÉCUTION).

Soit $G = (V^G, E^G, s^G, t^G, \omega^G)$ et $H = (V^H, E^H, s^H, t^H, \omega^H)$ deux graphes. On définit l'exécution de G et H comme le graphe $G \bowtie H$ défini par

$$\begin{aligned} V^{G \bowtie H} &= V^G \Delta V^H \\ E^{G \bowtie H} &= \bigcup_{v, w \in V^{G \bowtie H}} \text{Chem}^{v, w}(G, H) \\ s^{G \bowtie H} &= (e_i)_{0 \leq i \leq n} \mapsto s^{G \sqcup H}(e_0) \\ t^{G \bowtie H} &= (e_i)_{0 \leq i \leq n} \mapsto t^{G \sqcup H}(e_n) \\ \omega^{G \bowtie H} &= (e_i)_{0 \leq i \leq n} \mapsto \omega^{G \sqcup H}((e_i)_{0 \leq i \leq n}) \end{aligned}$$

§5.2.3 REMARQUE. Si les graphes G, H ont des ensembles disjoints de sommets (c'est-à-dire si $V^G \cap V^H = \emptyset$), alors $G \bowtie H$ est égal à $G \cup H$ à un renommage des sommets près.

Les Figures 5.5 et 5.6 montrent les chemins alternants dans $F \sqcup G$ et $F \sqcup H$, où F, G et H sont les graphes de la Figure 5.2. Remarquons l'apparition d'un cycle interne entre F et H , c'est-à-dire un cycle entre F et G disparaissant lors du calcul de l'exécution $F \bowtie G$.

FIGURE 5.5 – Chemins alternants dans $F \square G$ FIGURE 5.6 – Chemins alternants dans $F \square H$

§5.2.4 Dans la proposition suivante, il faut interpréter le symbole d'égalité comme signifiant « égaux modulo un renommage des arêtes ». Nous avons choisi d'écrire le symbole d'égalité car nous allons en réalité travailler avec les classes d'équivalence modulo renommage. Or, on peut montrer que deux graphes égaux modulo renommage des arêtes sont universellement équivalents (Définition §5.3.43 pour l'équivalence universelle, et Proposition §5.3.44). Nous remettons à plus tard la discussion de l'équivalence universelle afin d'en donner une définition générale applicable aux graphes dirigés pondérés, mais également aux graphes cohérents et cohérents stricts (Définitions §5.2.34 et §5.2.20), ainsi qu'aux versions tranchées, épaisses et épaisses tranchées de ces notions de graphes.

§5.2.5 THÉORÈME (ASSOCIATIVITÉ DE L'EXÉCUTION).
Soit F, G, H trois graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$F \bowtie (G \bowtie H) = (F \bowtie G) \bowtie H$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Corollaire §5.1.16. ☺

§5.2.6 REMARQUE. L'exécution n'est pas une simple composition de fonctions et l'associativité, une conséquence de la locativité de notre cadre, n'est satisfaite que sous certaines conditions sur l'intersection des ensembles de sommets (le lieu) des graphes. Afin d'obtenir un contre-exemple, il suffit de prendre trois graphes F, G, H avec $V^F = V^G = V^H = \{1\}$ tels que F, G n'aient aucunes arêtes et H possède une unique arête (qui est nécessairement de source et but 1) : alors $F \bowtie (G \bowtie H) = F$ et $(F \bowtie G) \bowtie H = H$.

Cependant, le théorème précédent aura pour conséquence l'associativité de la composition de la catégorie définie à partir de nos constructions, car la composition sera définie à délocalisation près (Sections 6.2 et 7.2).

§5.2.7 THÉORÈME (PROPRIÉTÉ CYCLIQUE).
Soit F, G, H trois graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$\text{Circ}(F, G \bowtie H) \cup \text{Circ}(G, H) \stackrel{\omega}{\cong} \text{Circ}(H, F \bowtie G) \cup \text{Circ}(F, G)$$

2. Il faut évidemment un unique renommage pour les deux graphes, sinon il serait possible de faire en sorte que l'intersection entre les ensembles de sommets des renommages de F et G soit nulle tandis que $V^F \cap V^G \neq \emptyset$.

où $\stackrel{\omega}{\cong}$ signifie qu'il existe une bijection ω -invariante, c'est-à-dire préservant les poids.

Démonstration. C'est une conséquence directe du corollaire §5.1.18. En effet, l'ensemble des circuits alternants dans $F \square (G \square H)$ est en bijection avec l'ensemble $\text{Circ}(F, G \upharpoonright H) \cup \text{Circ}(G, H)$. De même, l'ensemble des circuits alternants dans $(F \square G) \square H$ est en bijection avec l'ensemble $\text{Circ}(F \upharpoonright G, H) \cup \text{Circ}(F, G)$. ☺

§5.2.8 REMARQUE. Cette propriété n'est pas satisfaite si l'on considère l'ensemble des cycles en lieu de l'ensemble des circuits. Un circuit alternant dans $F \square (G \square H)$ contenant au moins une arête de F correspond à exactement³ un circuit alternant dans $F \square (G \upharpoonright H)$. Cependant, le nombre d'arêtes (la longueur) des deux circuits n'est pas nécessairement la même, et il n'y a donc pas de bijection entre l'ensemble des cycles alternants de $F \square (G \square H)$ contenant au moins une arête de F et l'ensemble des cycles alternants de $F \square (G \upharpoonright H)$.

§5.2.9 COROLLAIRE (ADJONCTION).

Soit F, G, H trois graphes tels que $V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$\text{Circ}(F, G \cup H) \cong \text{Circ}(H, F \upharpoonright G) \cup \text{Circ}(F, G)$$

Adjonction des 1-circuits

§5.2.10 DÉFINITION (L'ENSEMBLE DES 1-CIRCUITS).

On écrira $\mathcal{C}(G, H)$ l'ensemble des 1-circuits alternants dans $G \square H$, c'est-à-dire le quotient de l'ensemble des 1-cycles alternants par les permutations cycliques.

§5.2.11 Soit F, G et H des graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Étant donné un 1-circuit alternant $\{(e_i)\}_{0 \leq i \leq 2n-1}$ entre $G \cup H$ et F , on distingue deux cas. Premièrement, le 1-circuit peut être une suite d'arêtes entre sommets de V^G , et cela signifie que le 1-circuit est localisé entre G et F , c'est-à-dire pour tout $0 \leq i \leq 2n-1$ l'arête e_i est soit une arête de G soit une arête de F (en d'autres termes, aucune arête e_i n'est une arête de H). Dans ce cas, ce 1-circuit n'est pas compté parmi les 1-circuits alternants entre $F \upharpoonright G$ et H . Dans le second cas, le 1-circuit passe par au moins un sommet de V^H , et il n'est alors pas compté comme un 1-circuit alternant entre G et F . Dans ce cas, le fait que ce 1-circuit induise un 1-circuit alternant entre $F \upharpoonright G$ et H est conséquence immédiate des définitions. En effet, si $i_1, \dots, i_k$ sont les indices tels que les arêtes e_{i_j} soient les seules arêtes dans π provenant de H , alors le chemin défini pour $0 \leq j \leq k+1$ (en prenant $i_0 = -1$ et $i_{k+1} = 2n$) par $\pi_j = \{e_p\}_{i_{j-1}+1 \leq p \leq i_j-1}$ sont en bijection avec les arêtes de $F \upharpoonright G$.

La proposition suivante généralise cette simple remarque.

§5.2.12 PROPOSITION.

Soit F, G et H trois graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. On a :

$$\mathcal{C}(F, G \upharpoonright H) \uplus \mathcal{C}(G, H) \cong \mathcal{C}(F, G) \uplus \mathcal{C}(F \upharpoonright G, H)$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la propriété cyclique des circuits. En effet, il faut simplement vérifier que la bijection de la Proposition §5.2.7 préserve le degré des circuits, c'est-à-dire envoie un k -circuit sur un k -circuit. Mais ceci est clair. En effet, cette bijection revient à un simple re-parenthésage de suites finies d'arêtes, et ne modifie donc en rien le degré des circuits. Cette bijection induit donc, par restriction, une bijection entre les 1-circuits. ☺

§5.2.13 COROLLAIRE.

Soit F, G et H trois graphes tels que $V^G \cap V^H = \emptyset$. On a :

$$\mathcal{C}(F, G \cup H) \cong \mathcal{C}(F, G) \uplus \mathcal{C}(F \upharpoonright G, H)$$

3. En supposant $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$ bien entendu.

- §5.2.14 Nous allons maintenant définir deux notions alternatives d'exécution et de circuits. La motivation derrière ces définitions est d'obtenir un cadre où tous les graphes sont finis, c'est-à-dire que l'ensemble des sommets est fini, mais également l'ensemble des arêtes. Ceci n'est pas possible avec la notion d'exécution que nous avons considérée jusqu'à présent, puisque celle-ci peut produire des graphes avec une infinité d'arêtes. Les deux notions que nous allons considérer sont naturelles dans le cas des graphes : on souhaite se restreindre aux chemins eulériens — c'est-à-dire ne passant pas deux fois par la même arête — ou aux chemins simples — c'est-à-dire ne passant pas deux fois par le même sommet.

Adjonction des circuits eulériens

§5.2.15 DÉFINITION.

On définit un chemin eulérien $\{e_i\}_{i=0}^n$ comme un chemin ne passant pas deux fois par la même arête, c'est-à-dire $\forall i \neq j, e_i \neq e_j$. On notera $\text{Euler}_e(F, G)$ l'ensemble des chemins eulériens alternés dans $F \square G$, $\text{Euler}_e^{v,w}(F, G)$ sera l'ensemble des chemins eulériens alternés dans $F \square G$ de source v et de but w , et finalement on écrira $\mathcal{C}_e(F, G)$ l'ensemble des circuits eulériens alternés dans $F \square G$.

§5.2.16 DÉFINITION.

Soit $G = (V^G, E^G, s^G, t^G, \omega^G)$ et $F = (V^F, E^F, s^F, t^F, \omega^F)$ deux graphes pondérés. On note $F \curvearrowright_e G = (V^{F \curvearrowright_e G}, E^{F \curvearrowright_e G}, s^{F \curvearrowright_e G}, t^{F \curvearrowright_e G}, \omega^{F \curvearrowright_e G})$ l'exécution eulérienne de F et G , défini par⁴ :

$$\begin{aligned} V^{F \curvearrowright_e G} &= V^F \Delta V^G \\ E^{F \curvearrowright_e G} &= \bigcup_{v,w \in V^{F \curvearrowright_e G}} \text{Euler}_e^{v,w}(G, H) \\ s^{F \curvearrowright_e G} &= \pi = \{e_i\}_{i=0}^n \in E \mapsto s^{F \square G}(e_0) \\ t^{F \curvearrowright_e G} &= \pi = \{e_i\}_{i=0}^n \in E \mapsto t^{F \square G}(e_n) \\ \omega^{F \curvearrowright_e G} &= \pi = \{e_i\}_{i=0}^n \in E \mapsto \prod_{i=0}^n \omega^{F \square G}(e_i) \end{aligned}$$

- §5.2.17 La notion d'exécution eulérienne permet bien de rester dans le cadre de graphes finis : si F et G ont un nombre fini de sommets et d'arêtes, alors l'exécution $F \curvearrowright_e G$ aura un nombre fini de sommets et d'arêtes. Cependant, l'adjonction à trois termes n'est pas satisfaite lorsque l'on considère les circuits eulériens.

- §5.2.18 Par exemple, considérons le graphe F défini par $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(2, 3), (2, 5), (4, 1), (6, 1)\})$, le graphe G défini par $(\{3, 4, 5, 6\}, \{(3, 4), (5, 6)\})$, et le graphe H défini par $(\{1, 2\}, \{(1, 2)\})$ (représentés respectivement en rouge, bleu et vert dans la Figure 5.7). On trouve deux circuits eulériens alternés entre F et $G \cup H$: $\pi_1 = e b f c$ et $\pi_2 = e a g d$. L'exécution eulérienne de F et G est le graphe représenté en violet dans la Figure 5.8. Les circuits eulériens alternés entre $F \curvearrowright_e G$ et H sont alors au nombre de trois : $\rho_1 = (c e b) f$, $\rho_2 = (d e a) g$ et $\rho_3 = (c e a) g (d e b) f$. Les circuits ρ_1 et ρ_2 correspondent respectivement aux circuits π_1 et π_2 . Or ρ_3 ne correspond à aucun circuit eulérien alterné entre F et $G \cup H$: en effet, $c e a g d e b f$ n'est pas eulérien car il passe deux fois par l'arête e .

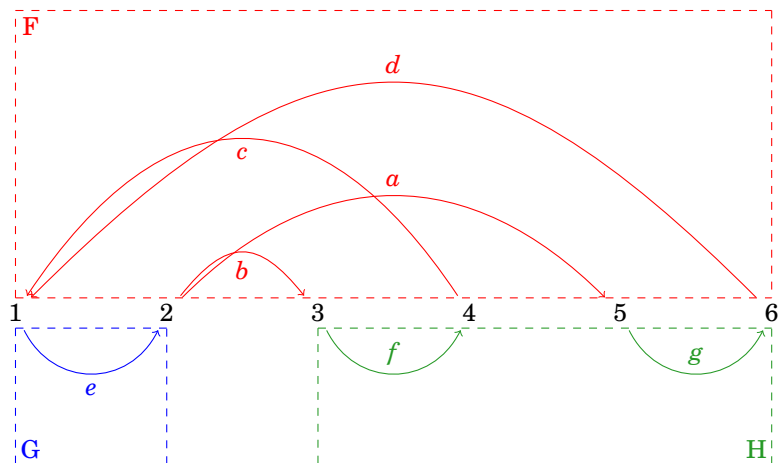
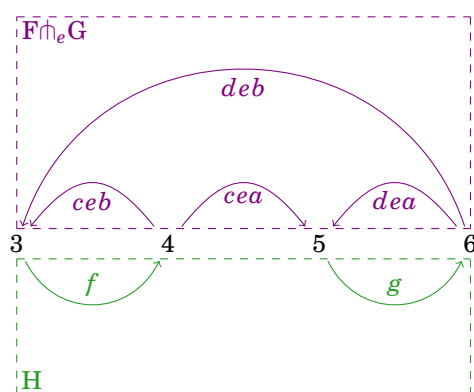
En ajoutant une relation de cohérence stricte entre les arêtes on peut cependant pallier ce problème.

- §5.2.19 REMARQUE. On peut aussi choisir une relation de cohérence non stricte, mais il faut alors considérer les chemins eulériens cohérents. Avec la relation stricte, un chemin cohérent sera nécessairement eulérien.

§5.2.20 DÉFINITION.

Un *graphe cohérent strict* est un graphe orienté pondéré F muni d'une relation de cohérence stricte $\curvearrowright_F$ (c'est-à-dire antiréflexive et symétrique) sur l'ensemble des arêtes.

4. On note ici E pour $E^{F \curvearrowright_e G}$ afin de simplifier les notations. Il nous arrivera de faire cette simplification dans la suite du texte lorsque le contexte sera clair.

FIGURE 5.7 – Contre-exemple à l'adjonction pour les cycles eulériens : $F \square (G \cup H)$ FIGURE 5.8 – Contre-exemple à l'adjonction pour les cycles eulériens : $(F \Join_e G) \square H$

§5.2.21 DÉFINITION.

Le branchement $F \square G$ de deux graphes cohérents stricts est le graphe coloré $F \square G$ des graphes orientés pondérés sous-jacents (obtenus en oubliant la relation de cohérence stricte), muni de la relation de cohérence stricte :

$$e_i \supset_{F \square G} e_j \Leftrightarrow (\delta(e_i) \neq \delta(e_j)) \vee (\delta(e_i) = \delta(e_j) \wedge e_i \supset_F e_j)$$

§5.2.22 DÉFINITION.

Soit F un graphe cohérent strict. Un chemin $\pi = \{e_i\}_{i=0}^n$ est dit cohérent lorsque les arêtes qui le composent sont deux à deux cohérentes, c'est-à-dire lorsque $\forall 0 \leq i \neq j \leq n, e_i \supset_F e_j$.

§5.2.23 REMARQUE. Un chemin cohérent est nécessairement eulérien.

§5.2.24 DÉFINITION.

Soit F un graphe cohérent strict. On définit une relation de cohérence stricte entre les chemins dans F : deux chemins $\pi = \{e_i\}_{i=0}^n$ et $\pi' = \{f_i\}_{i=0}^m$ dans F sont cohérents lorsque

$$\forall 0 \leq i \leq n, \forall 0 \leq j \leq m, e_i \supset_F f_j$$

§5.2.25 DÉFINITION.

L'exécution entre $(F, \supset_F)$ et $(G, \supset_G)$ est définie comme l'exécution eulérienne sur les graphes sous-jacents $F \uplus_e G$ munie de la relation de cohérence stricte définie sur les chemins.

§5.2.26 PROPOSITION (ASSOCIATIVITÉ).

Soit F, G, H trois graphes cohérents stricts tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$F \uplus_e (G \uplus_e H) = (F \uplus_e G) \uplus_e H$$

Démonstration. On sait que l'ensemble des chemins alternants dans $F \square (G \square H)$ est en bijection avec l'ensemble des chemins alternants dans $(F \square G) \square H$ par le Corollaire §5.1.16. Si π est une arête de $F \uplus_e (G \uplus_e H)$, alors π est un chemin alternant dans $F \square (G \square H)$. C'est donc un chemin alternant dans $(F \square G) \square H$. Pour montrer que π correspond à une arête de $(F \uplus_e G) \uplus_e H$, il suffit de montrer qu'il est cohérent. Or, en tant qu'arête de $F \uplus_e (G \uplus_e H)$, π est cohérent et par conséquent toutes les arêtes provenant de F (resp. de G , resp. de H) qu'il contient sont deux à deux cohérentes. Cela suffit à montrer que π définit bien un chemin cohérent dans $(F \uplus_e G) \uplus_e H$. $\odot$

§5.2.27 DÉFINITION.

Si F, G sont des graphes cohérents stricts, on notera $\mathcal{C}_e(F, G)$ l'ensemble des chemins alternés cohérents dans $F \square G$.

§5.2.28 PROPOSITION (PROPRIÉTÉ CYCLIQUE).

Soit F, G, H des graphes cohérents stricts tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$\mathcal{C}_e(F, G \uplus_e H) \uplus \mathcal{C}_e(G, H) \cong \mathcal{C}_e(F \uplus_e G, H) \uplus \mathcal{C}_e(F, G)$$

Démonstration. Soit $\pi = e_0 f_0 e_1 f_1 \dots e_n f_n$ un cycle cohérent alternant entre F et $G \uplus_e H$, où les f_i sont les arêtes de F , et les e_i sont des arêtes dans $G \uplus_e H$. Remarquons que par définition de la cohérence, les f_i sont cohérentes deux à deux. Pour tout i , $e_i = \{a_k^i\}_{0 \leq k \leq p_i}$ est un chemin alternant cohérent entre G et H . Par définition de la cohérence entre les chemins, tous les a_k^i sont cohérents deux à deux. Définissons alors la suite d'arêtes $\rho = e_0 a_0^0 a_1^0 \dots a_{p_0}^0 e_1 \dots e_n a_0^n a_1^n \dots a_{p_n}^n$.

- Si ρ ne contient pas d'arêtes dans H , cette suite définit un cycle alternant entre F et G . De plus, ce cycle est cohérent puisque, par définition, les arêtes de F sont cohérentes avec les arêtes de G dans $F \square G$, et que nous avons montré que les f_i (les arêtes de F) sont cohérentes deux à deux, et les a_k^i (les arêtes de G) sont cohérentes deux à deux.
- Dans le cas où ρ contient des arêtes de H , le fait que les arêtes de F , resp. de G , resp. de H , sont deux à deux cohérentes permet de montrer que ρ définit un cycle alterné cohérent dans $(F \uplus_e G) \square H$. En effet, ρ peut être décomposé ainsi :

$$\rho = b_0^0 b_1^0 \dots b_{r_0}^0 h_0 b_0^1 \dots b_{r_1}^1 h_1 \dots b_0^k b_1^k \dots b_{r_k}^k h_k$$

où les h_i sont des arêtes de H , et les suites $c_j = b_0^j \dots b_{r_j}^j$ sont des chemins alternés dans $F \square G$. De plus, ces chemins sont cohérents puisque les arêtes de F (resp. G) contenues dans ρ sont deux à deux cohérentes, et nous avons donc montré que ρ définit un cycle alterné cohérent dans $(F \curvearrowright_e G) \square H$.

Soit maintenant π un cycle alternant cohérent dans $G \square H$. Chaque arête de G contenue dans π définit une arête de $F \curvearrowright_e G$, puisqu'une telle arête est un chemin alterné cohérent dans $F \square G$ dont les sources et buts sont dans $V^F \Delta V^G$ (puisque'ils sont dans $V^G \cap V^H$). On en conclut que π définit un cycle cohérent alternant dans $(F \curvearrowright_e G) \square H$.

Il est clair que cette correspondance est bijective : on peut construire une correspondance inverse (il suffit d'échanger les rôles de F, G, H) et il est facile de vérifier que la composition de ces deux correspondances donne l'identité. $\odot$

§5.2.29 COROLLAIRE.

Soit F, G, H des graphes cohérents stricts tels que $V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors

$$\mathcal{C}_e(F, G \cup H) \cong \mathcal{C}_e(F, G) \uplus \mathcal{C}_e(F \curvearrowright_e G, H)$$

Adjonction des circuits simples

§5.2.30 DÉFINITION.

On définit un chemin simple $\{e_i\}_{i=0}^n$ comme un chemin ne passant pas deux fois par le même sommet, c'est-à-dire $\forall i \neq j, s(e_i) \neq s(e_j)$. On notera par $\text{Simp}_s(F, G)$ l'ensemble des chemins simples alternants dans $F \square G$, $\text{Simp}_s^{v,w}(F, G)$ l'ensemble des chemins simples alternants dans $F \square G$ de source v et de but w , et enfin $\mathcal{C}_s(F, G)$ l'ensemble des circuits simples alternants dans $F \square G$.

§5.2.31 DÉFINITION.

Soit $G = (V^G, E^G, s^G, t^G, \omega^G)$ et $F = (V^F, E^F, s^F, t^F, \omega^F)$ deux graphes pondérés. On note $F \curvearrowright_s G = (V^{F \curvearrowright_s G}, E^{F \curvearrowright_s G}, s^{F \curvearrowright_s G}, t^{F \curvearrowright_s G}, \omega^{F \curvearrowright_s G})$ l'exécution simple de F et G , définie par :

$$\begin{aligned} V^{F \curvearrowright_s G} &= V^F \Delta V^G \\ E^{F \curvearrowright_s G} &= \bigcup_{v,w \in V^{F \curvearrowright_s G}} \text{Simp}_s^{v,w}(G, H) \\ s^{F \curvearrowright_s G} &= \pi = \{e_i\}_{i=0}^n \in E \mapsto s^{F \square G}(e_0) \\ t^{F \curvearrowright_s G} &= \pi = \{e_i\}_{i=0}^n \in E \mapsto t^{F \square G}(e_n) \\ \omega^{F \curvearrowright_s G} &= \pi = \{e_i\}_{i=0}^n \in E \mapsto \prod_{i=0}^n \omega^{F \square G}(e_i) \end{aligned}$$

§5.2.32 DÉFINITION.

On rappelle que si deux graphes F, G ont des supports disjoints, c'est-à-dire $V^F \cap V^G = \emptyset$, l'union de F et G est définie par $F \cup G = (V^F \cup V^G, E^F \uplus E^G, s^F \uplus s^G, t^F \uplus t^G, \omega^F \uplus \omega^G)$.

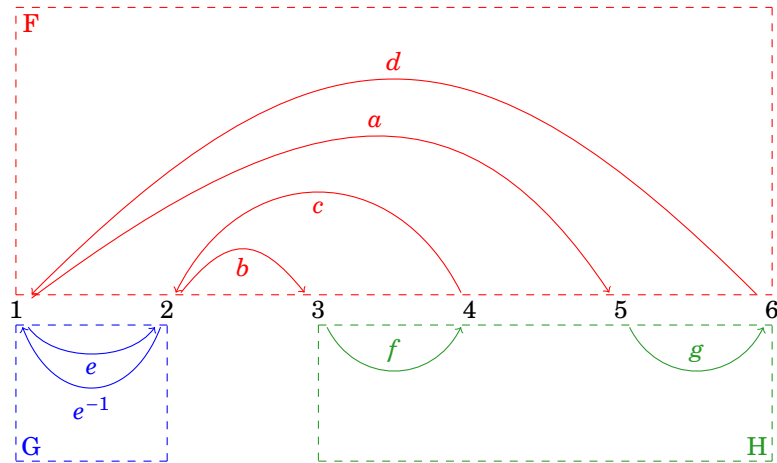
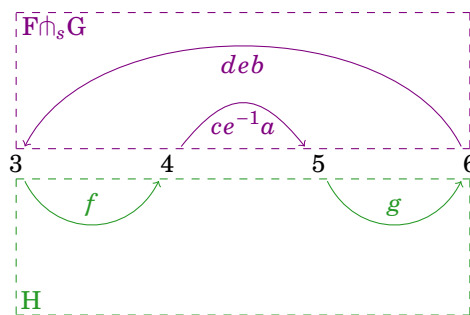
§5.2.33 REMARQUE. Comme dans le cas des chemins eulériens, nous n'obtenons pas d'adjonction dans ce cas. Les Figures 5.9 et 5.10 donnent un contre-exemple (dans la première figure, il n'apparaît pas de circuits simples, tandis qu'il en apparaît un dans la seconde). Le principe est le même que dans le cas des chemins eulériens : lors d'une exécution, on oublie les sommets traversés par les différents chemins et on peut alors définir un circuit simple passant par deux arêtes e, f provenant de chemins qui passaient par un point commun.

§5.2.34 DÉFINITION.

Un *graphe cohérent* est un graphe orienté pondéré F muni d'une relation de cohérence $\circ_F$ réflexive et symétrique sur l'ensemble des arêtes.

§5.2.35 DÉFINITION.

Soit $(F, \circ_F)$ et $(G, \circ_G)$ deux graphes cohérents. On définit le branchement de ces deux graphes

FIGURE 5.9 – Contre-exemple à l'adjonction pour les circuits simples : $F \square (G \cup H)$ FIGURE 5.10 – Contre-exemple à l'adjonction pour les circuits simples : $(F \mathbin{\lhd}_s G) \square H$

par $(F \sqcup G, \circ_{F \sqcup G})$ où la relation de cohérence est définie par :

$$e \circ_{F \sqcup G} e' \Leftrightarrow (e \circ_F e') \vee (e \circ_G e') \vee (\delta(e) \neq \delta(e'))$$

En particulier, si F et G sont de supports disjoints, $F \sqcup G$ est le graphe cohérent $F \sqcup G$ obtenu en oubliant la fonction de coloriage.

§5.2.36 DÉFINITION.

Soit F un graphe cohérent. Un chemin $\pi = \{e_i\}_{i=0}^n$ est dit cohérent lorsque les arêtes qui le composent sont deux à deux cohérentes, c'est-à-dire lorsque $\forall 0 \leq i, j \leq n, e_i \circ_F e_j$.

§5.2.37 DÉFINITION.

Soit $\pi = \{e_i\}_{i=0}^n$ un cycle dans un graphe F . On définit le support de π comme l'ensemble des sommets traversés par π :

$$\text{supp}(\pi) = \{s^F(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

§5.2.38 DÉFINITION.

Soit F un graphe cohérent. Deux chemins $\pi = \{e_i\}_{i=0}^n$ et $\pi' = \{f_i\}_{i=0}^m$ dans F sont cohérents lorsque

$$\forall 0 \leq i \leq n, \forall 0 \leq j \leq m, e_i \circ_F f_j$$

§5.2.39 DÉFINITION.

L'exécution entre $(F, \circ_F)$ et $(G, \circ_G)$ — que l'on notera $F \dot{\sqcup}_s G$ — est définie comme l'exécution simple sur les graphes sous-jacents $F \dot{\sqcup}_s G$ munie de la relation de cohérence :

$$\pi \circ_{F \dot{\sqcup}_s G} \pi' \Leftrightarrow (\pi \circ_{F \sqcup G} \pi') \wedge (\text{supp}(\pi) \cap \text{supp}(\pi') = \emptyset)$$

§5.2.40 PROPOSITION (ASSOCIATIVITÉ).

Soit F, G, H des graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$F \dot{\sqcup}_s (G \dot{\sqcup}_s H) = (F \dot{\sqcup}_s G) \dot{\sqcup}_s H$$

Démonstration. Les ensembles de sommets des deux graphes sont égaux, en raison de l'hypothèse $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Il est ensuite possible de montrer l'égalité des ensembles d'arêtes. Pour cela, on se contentera de montrer l'une des deux inclusions (l'autre s'obtenant par symétrie). De plus, on ne fera la démonstration que dans le cas d'un chemin commençant et terminant par une arête de F . Les autres cas se traitent de manière similaire.

Soit ρ une arête de $F \dot{\sqcup}_s (G \dot{\sqcup}_s H)$, c'est-à-dire que $\rho = f_1 v_1 f_2 v_2 \dots f_k$ est un chemin alternant simple et cohérent dans $F \sqcup (G \dot{\sqcup}_s H)$ où, pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $v_i = \{a_j^i\}_{1 \leq j \leq p_i}$ est un chemin alternant simple et cohérent dans $G \sqcup H$. Le chemin ρ est donc un chemin simple et cohérent, alternant dans $F \sqcup (G \dot{\sqcup}_s H)$. Par la proposition §5.1.15, ρ est donc un chemin — simple et cohérent — alternant dans $(F \sqcup G) \dot{\sqcup}_s H$. Il est clair, de par la définition des chemins cohérents, qu'un sous-chemin d'un chemin cohérent est cohérent. De plus, un sous-chemin d'un chemin simple est simple. En écrivant $\rho = (b_1^1 b_2^1 \dots b_{q_1}^1) h_1 \dots (b_1^m b_2^m \dots b_{q_m}^m)$, on peut remarquer que chaque $b_1^i b_2^i \dots b_{q_i}^i$ est une arête dans $F \dot{\sqcup}_s G$. On en déduit que ρ est un chemin alternant simple et cohérent dans $(F \dot{\sqcup}_s G) \dot{\sqcup}_s H$, c'est-à-dire que c'est une arête de $(F \dot{\sqcup}_s G) \dot{\sqcup}_s H$. ☺

§5.2.41 DÉFINITION.

Si F, G sont des graphes cohérents, on notera $\mathcal{C}_s(F, G)$ l'ensemble des circuits alternés simples et cohérents dans $F \sqcup G$.

§5.2.42 PROPOSITION.

Soit F, G, H des graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors

$$\mathcal{C}_s(F, G \dot{\sqcup}_s H) \uplus \mathcal{C}_s(G, H) \cong \mathcal{C}_s(F, G) \uplus \mathcal{C}_s(F \dot{\sqcup}_s G, H)$$

Démonstration. Soit $\bar{\rho}$ un circuit simple alternant dans $F \sqcup (G \dot{\sqcup}_s H)$. On supposera, sans perte de généralité, que $\bar{\rho}$ est de longueur paire $2n$. Alors on peut supposer que $\rho = \{e_i\}_{i=1}^{2n}$ est

tel que $e_{2k} \in G \curvearrowright_s H$ et $e_{2k+1} \in F$. Dans ce cas, chaque e_{2k} correspond à un chemin cohérent simple $a_1^k a_2^k \dots a_{p_k}^k$. On peut alors considérer le cycle alternant

$$\mu = e_1 a_1^1 a_2^1 \dots a_{p_2}^1 e_2 \dots e_n a_1^n a_2^n \dots a_{p_n}^n$$

dans le graphe $F \square (G \square H)$. Ce cycle correspond à un cycle alternant ν dans $(F \square G) \square H$ par la proposition §5.1.15 (en réalité par son corollaire §5.1.17), et, comme μ est un chemin cohérent simple, ν est un chemin cohérent simple. Il est clair, de par la définition des chemins cohérents, qu'un sous-chemin d'un chemin cohérent est cohérent. De plus, un sous-chemin d'un chemin simple est simple. Or nous avons soit

$$\nu = b_1^1 b_2^1 \dots b_{q_1}^1 h_1 b_1^2 b_2^2 \dots b_{q_2}^2 \dots b_1^m b_2^m \dots b_{q_m}^m$$

(avec m éventuellement égal à 1, ce qui correspond au cas où le cycle ne contient pas d'arêtes de H), soit

$$\nu = b_1^1 b_2^1 \dots b_{q_1}^1 h_1 b_1^2 b_2^2 \dots b_{q_2}^2 \dots b_1^m b_2^m \dots b_{q_m}^m h_m$$

Dans le cas particulier où $\nu = b_1^1 b_2^1 \dots b_{q_1}^1$, on a montré que $\bar{\rho}$ correspondait à un circuit simple (cohérent) $\bar{\nu}$ dans $F \square G$. Dans les autres cas, les chemins $d_i = b_1^i b_2^i \dots b_{q_i}^i$ sont des chemins cohérents simple alternés dans $F \square G$, et correspondent donc à des arêtes c_i dans $F \curvearrowright_s G$. On a donc montré que $\bar{\rho}$ correspondait à un circuit $c_1 h_1 c_2 h_2 \dots$ simple alterné et cohérent dans $(F \curvearrowright_s G) \square H$.

On montre de même que tout circuit alterné simple et cohérent dans $G \square H$ correspond à un chemin dans $(F \curvearrowright_s G) \square H$.

Un raisonnement similaire permet de montrer que l'on peut faire correspondre à chaque circuit dans $\mathcal{C}_s(F, G) \uplus \mathcal{C}_s(F \curvearrowright_s G, H)$ un circuit dans $\mathcal{C}_s(F, G \curvearrowright_s H) \uplus \mathcal{C}_s(G, H)$, et que cette correspondance est exactement l'inverse de la correspondance détaillée ci-dessus. ☺

§5.2.43 COROLLAIRE.

Soit F, G, H des graphes tels que $V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$\mathcal{C}_s(F, G \cup H) \cong \mathcal{C}_s(F, G) \uplus \mathcal{C}_s(F \curvearrowright_s G, H)$$

5.3 Graphes tranchés, graphes épais

§5.3.1 Toutes les adjonctions que nous avons exposées jusqu'à présent ont été énoncées sous la forme de bijections entre des ensembles de cycles. Nous allons expliquer maintenant comment obtenir des adjonctions numériques à partir de celles-ci. L'intérêt de cette opération est double : cela nous permet d'obtenir une adjonction plus classique (à deux termes, comme dans les espaces cohérents par exemple), et cela nous sera utile par la suite pour définir une construction combinatoire des additifs.

§5.3.2 Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons que nous travaillons dans une catégorie de graphes quelconque, pondérés dans un ensemble Ω , dans laquelle nous avons défini une notion d'exécution :: et, pour tout couple de graphes (F, G) , un ensemble de cycles alternés $\text{Cy}(F, G)$ tels que, pour tous graphes F, G, H avec $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$ on ait une bijection préservant les poids :

$$\text{Cy}(F, G :: H) \uplus \text{Cy}(G, H) \cong \text{Cy}(H, F :: G) \uplus \text{Cy}(F, G)$$

§5.3.3 Nous allons montrer comment il est possible de généraliser un tel cadre afin d'ajouter des « tranches », indépendantes (graphes tranchés) ou non (graphes épais, graphes épais tranchés). Ces généralisations nous permettront, aux Chapitres 7 et 8, de définir des connecteurs additifs et exponentiels.

Adjonctions numériques

§5.3.4 DÉFINITION (QUANTIFICATION DES CYCLES).

Une fonction de quantification des circuits est une application $\Omega \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Étant donnée une fonction de quantification des circuits m , on définit une mesure de l'interaction entre deux graphes F, G par :

$$\llbracket F, G \rrbracket = \sum_{\rho \in \text{Cy}(F, G)} m(\omega(\rho))$$

§5.3.5 THÉORÈME (PROPRIÉTÉ CYCLIQUE NUMÉRIQUE).

Soit F, G , et H des graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$\llbracket F, G :: H \rrbracket + \llbracket G, H \rrbracket = \llbracket F, G \rrbracket + \llbracket F :: G, H \rrbracket$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la propriété cyclique géométrique §5.3.2. ☺

§5.3.6 THÉORÈME (ADJONCTION NUMÉRIQUE).

Soit F, G , et H des graphes tels que $V^G \cap V^H = \emptyset$. Alors :

$$\llbracket F, G \cup H \rrbracket = \llbracket F, G \rrbracket + \llbracket F :: G, H \rrbracket$$

§5.3.7 Il s'agit maintenant de récupérer une adjonction au sens plus habituel des sémantiques dénotationnelles de la logique linéaire. Il faut donc s'arranger pour faire disparaître le terme supplémentaire $\llbracket F, G \rrbracket$ de l'adjonction numérique. Pour cela, nous utiliserons la solution utilisée par Girard dans la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini : l'introduction des mises.

§5.3.8 L'idée des mises est simple. Au lieu de considérer uniquement des graphes, nous allons leur associer un nombre qui servira à comptabiliser les erreurs d'exécution, c'est-à-dire capturer les termes additionnels. On définit alors de manière naturelle les généralisations des opérations d'exécution et de mesure.

On considère donc des couples (a, A) , où a est un nombre dans ${}^5 \text{im}(\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$, et A est un graphe. On définit alors :

1. $\ll(a, A), (b, B)\gg = a + b + \llbracket A, B \rrbracket$;
2. $(f, F) :: (a, A) = (a + f + \llbracket F, A \rrbracket, F :: A)$.

On remarque que dans le cas où $V^F \cap V^A = \emptyset$, on a $(f, F) :: (a, A) = (a + f, A \cup F)$, que l'on notera $(a, A) \cup (f, F)$.

§5.3.9 PROPOSITION (PROPRIÉTÉ CYCLIQUE).

Si F, G, H sont des graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$, et f, g, h sont des éléments quelconques de $\text{im}(\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$, alors :

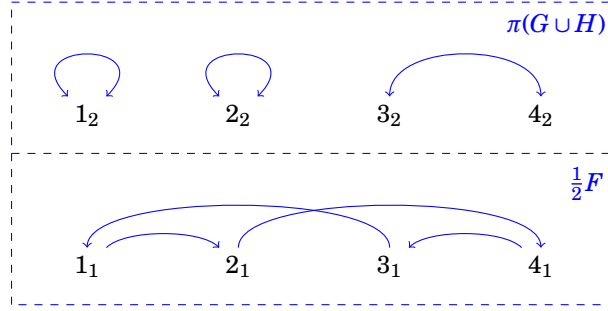
$$\ll(f, F), (g, G) :: (h, H)\gg = \ll(g, G), (h, H) :: (f, F)\gg = \ll(h, H), (f, F) :: (g, G)\gg$$

§5.3.10 COROLLAIRE (ADJONCTION).

Si F, G, H sont des graphes tels que $V^G \cap V^H = \emptyset$, et f, g, h sont des éléments quelconques de $\text{im}(\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$, alors :

$$\ll(f, F), (g, G) \cup (h, H)\gg = \ll(f, F) :: (g, G), (h, H)\gg$$

⁵ On ne présuppose pas ici que la mesure $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ est à valeur dans $\mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ car ce ne sera pas toujours le cas (voir la construction additive dans la section suivante).

FIGURE 5.11 – Exemple de graphe tranché : $\frac{1}{2}F + \pi(G \cup H)$

Graphes tranchés : la construction additive

- §5.3.11 On veut maintenant généraliser le cadre des graphes afin de définir des connecteurs additifs. La manière la plus naturelle de faire cela est d'introduire des tranches, comme pour les réseaux additifs [Gir95c]. On ne considèrera donc plus des graphes, mais des familles finies de graphes $\{G_i\}_{i \in I}$ sur un même ensemble de sommets V , que l'on pourra représenter sous la forme d'un graphe dont l'ensemble des sommets est $V \times I$ et tel que les arêtes ne changent pas de tranches : si (v, i) et (w, j) sont respectivement source et but d'une arête, alors $i = j$.
- §5.3.12 Toutes les constructions considérées dans le chapitre précédent peuvent être étendues aux graphes tranchés en les appliquant tranche à tranche. Cependant, ce cadre s'avère insuffisant pour définir les connecteurs additifs correctement, et nous considèrerons que les graphes tranchés sont également équipés d'une pondération des tranches. Cette généralisation permet en effet d'obtenir suffisamment de *contre-projets* pour le connecteur additif $\&$.
- §5.3.13 On définit donc les objets avec lesquels nous allons travailler. Un *graphe tranché* orienté pondéré (resp. cohérent) G de support V^G est une famille finie $\sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i$ où, pour tout $i \in I^G$, G_i est un graphe orienté pondéré (resp. cohérent) tel que $V^{G_i} = V^G$, et $\alpha_i^G \in \mathbf{R}$. Le graphe G_i sera nommé la i -ème tranche de G , et l'on utilisera la notation suivante :

$$\mathbf{1}_G = \sum_{i \in I^G} \alpha_i^G$$

- §5.3.14 La figure 5.11 est un exemple de graphe tranché : il s'agit du graphe $\frac{1}{2}F + \pi(G \cup H)$ où F, G, H sont les graphes de la figure 5.2. À partir de maintenant, on utilisera la convention graphique suivante :
- Les graphes sont comme auparavant représentés avec les arêtes colorées (une seule couleur par graphe), et entourés de lignes hachurées ;
 - Les points du support V^G sont représentés suivant l'axe des abscisses, tandis que les points de l'index I^G sont représentés suivant l'axe des ordonnées ;
 - À l'intérieur d'un graphe, les tranches sont séparées par une ligne hachurée ;
 - Dans un coin de chaque case représentant une tranche, on inscrit le monôme de la somme $\sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i$ qu'il contient.

§5.3.15 DÉFINITION (EXÉCUTION).

Soit F et G deux graphes tranchés. On définit leur exécution :

$$(\sum_{i \in I^F} \alpha_i^F F_i) :: (\sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i) = \sum_{(i,j) \in I^F \times I^G} \alpha_i^F \alpha_j^G F_i :: G_j$$

Lorsque $V^F \cap V^G = \emptyset$, on écrira l'exécution de F et G comme une union : $F \cup G$.

§5.3.16 DÉFINITION.

Soit F et G deux graphes tranchés. On définit la mesure de l'interaction :

$$\llbracket \sum_{i \in I^F} \alpha_i^F F_i, \sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i \rrbracket = \sum_{(i,j) \in I^F \times I^G} \alpha_i^F \alpha_j^G \llbracket F_i, G_j \rrbracket$$

Lorsque certains termes $\llbracket F_i, G_j \rrbracket$ sont égaux à ∞ , on pose $\llbracket F, G \rrbracket$ comme étant égal à ∞ .

Un simple calcul permet de montrer que la propriété cyclique est toujours satisfaite dans ce cadre étendu.

§5.3.17 PROPOSITION (PROPRIÉTÉ CYCLIQUE).

Si F, G, H sont des graphes tranchés tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$,

$$\llbracket F, G :: H \rrbracket + \mathbf{1}_F \llbracket G, H \rrbracket = \llbracket H, F :: G \rrbracket + \mathbf{1}_H \llbracket F, G \rrbracket$$

Démonstration. Le calcul est direct, en utilisant la proposition §5.3.9.

$$\begin{aligned} \llbracket F, G :: H \rrbracket + \mathbf{1}_F \llbracket G, H \rrbracket &= \llbracket F, G :: H \rrbracket + \left(\sum_{i \in I^F} d^F(i) \right) \sum_{j \in I^G} \sum_{k \in I^H} \llbracket G_j, H_k \rrbracket \\ &= \sum_{i \in I^F} \sum_{j \in I^G} \sum_{k \in I^H} d^F(i) d^G(j) d^H(k) \llbracket F_i, G_j :: H_k \rrbracket \\ &\quad + \sum_{i \in I^F} \sum_{j \in I^G} \sum_{k \in I^H} d^F(i) d^G(j) d^H(k) \llbracket G_j, H_k \rrbracket \\ &= \sum_{i \in I^F} \sum_{j \in I^G} \sum_{k \in I^H} d^F(i) d^G(j) d^H(k) (\llbracket F_i, G_j :: H_k \rrbracket + \llbracket G_j, H_k \rrbracket) \\ &= \sum_{i \in I^F} \sum_{j \in I^G} \sum_{k \in I^H} d^F(i) d^G(j) d^H(k) (\llbracket H_k, F_i :: G_j \rrbracket + \llbracket F_i, G_j \rrbracket) \\ &= \sum_{i \in I^F} \sum_{j \in I^G} \sum_{k \in I^H} d^F(i) d^G(j) d^H(k) \llbracket F_i \cap G_j, H_k \rrbracket \\ &\quad + \sum_{i \in I^F} \sum_{j \in I^G} \sum_{k \in I^H} d^F(i) d^G(j) d^H(k) \llbracket F_i, G_j \rrbracket \\ &= \llbracket H, F :: G \rrbracket + \left(\sum_{k \in I^H} d^H(k) \right) \sum_{i \in I^F} \sum_{j \in I^G} \llbracket F_i, G_j \rrbracket \\ &= \llbracket H, F :: G \rrbracket + \mathbf{1}_H \llbracket F, G \rrbracket \end{aligned}$$

☺

§5.3.18 COROLLAIRE (ADJONCTION).

Si F, G, H sont des graphes tranchés tels que $V^F = V^G \cup V^H$ et $V^G \cap V^H = \emptyset$,

$$\llbracket F, G \cup H \rrbracket = \llbracket F \cap G, H \rrbracket + \mathbf{1}_H \llbracket F, G \rrbracket$$

Graphes épais

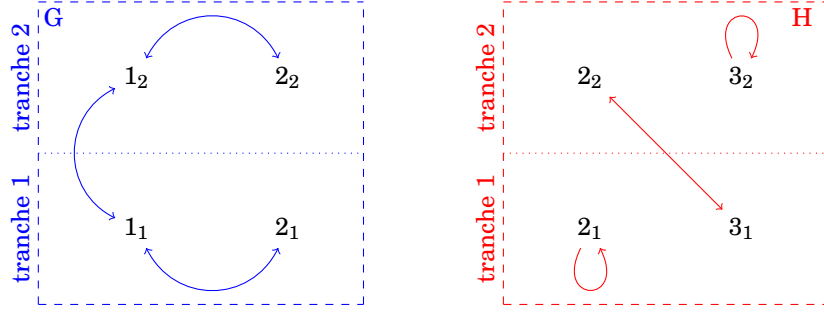
§5.3.19 DÉFINITION.

Soit S^G et D^G des ensembles finis. Un *graphe épais* orienté pondéré (resp. cohérent) G de support S^G et de *dialecte* D^G est un graphe orienté pondéré (resp. cohérent) dont l'ensemble des sommets est égal à $S^G \times D^G$.

On nommera *tranches* les ensembles de sommets $S^G \times \{d\}$ pour $d \in D^G$.

§5.3.20 La Figure 5.12 est un exemple de deux graphes épais. On représentera les graphes épais suivant une convention similaire à celle régissant la représentation des graphes tranchés :

- Les graphes sont comme auparavant représentés avec les arêtes colorées (une seule couleur par graphe), et entourés de lignes hachurées ;

FIGURE 5.12 – Deux graphes épais G et H , tous deux de dialectes $\{1, 2\}$

- Les points du support S^G sont représentés suivant l'axe des abscisses, tandis que les points du dialecte D^G sont représentés suivant l'axe des ordonnées ;
- À l'intérieur d'un graphe, les tranches sont séparées par une ligne *pointillée*.

§5.3.21 REMARQUE. Si $G = \sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i$ est un graphe tranché tel que $\forall i \in I^G, \alpha_i^G = 1$, alors G peut être vu comme un graphe épais de dialecte I^G . En effet, on peut définir $\{G\}$ comme le graphe :

$$\begin{aligned} V^{\{G\}} &= V^G \times I^G \\ E^{\{G\}} &= \uplus_{i \in I^G} E^{G_i} \\ s^{\{G\}} &= e \in E^{G_i} \mapsto (s^{G_i}(e), i) \\ t^{\{G\}} &= e \in E^{G_i} \mapsto (t^{G_i}(e), i) \\ \omega^{\{G\}} &= e \in E^{G_i} \mapsto \omega^{G_i}(e) \end{aligned}$$

§5.3.22 DÉFINITION (VARIANTS).

Soit G un graphe épais et $\phi : D^G \rightarrow E$ une bijection. On définit alors G^ϕ comme le graphe :

$$\begin{aligned} V^{G^\phi} &= S^G \times E \\ E^{G^\phi} &= E^G \\ s^{G^\phi} &= (Id_{V^G} \times \phi) \circ s^G \\ t^{G^\phi} &= (Id_{V^G} \times \phi) \circ t^G \\ \omega^{G^\phi} &= \omega^G \end{aligned}$$

Si G et H sont deux graphes tels que $H = G^\phi$ pour une bijection ϕ , alors on dit que H est un *variant* de G . La relation de variance définit une relation d'équivalence sur les graphes épais.

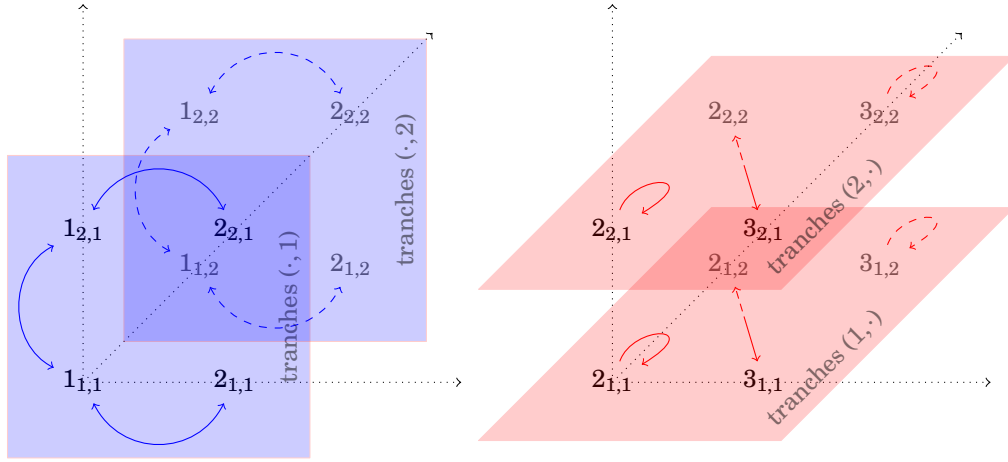
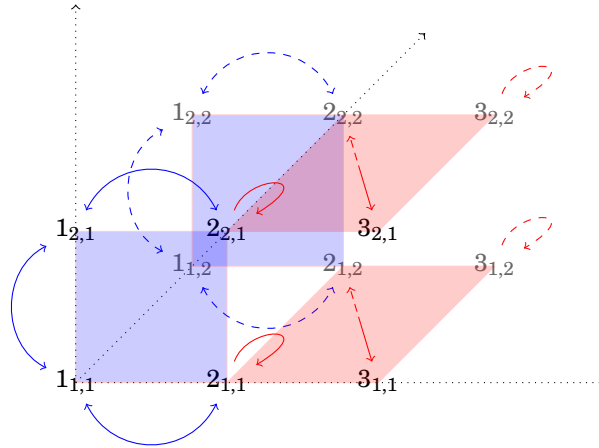
§5.3.23 DÉFINITION (INTERACTION DIALECTALE).

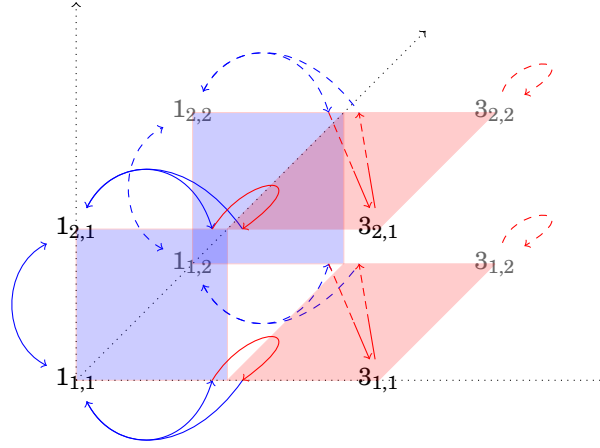
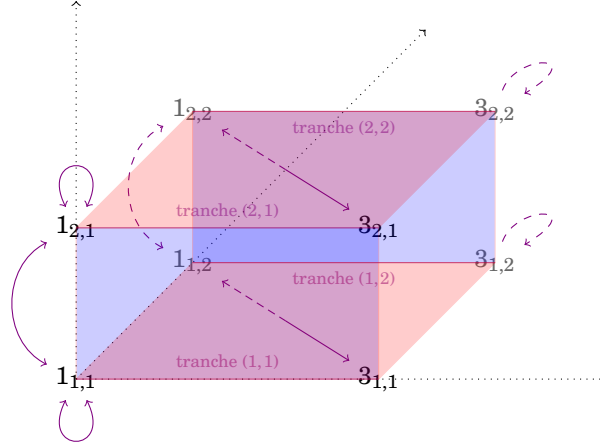
Soit G et H des graphes épais.

1. On notera $G^{\dagger D^H}$ le graphe épais de dialecte $D^G \times D^H$ défini comme $\{\sum_{i \in D^H} G_i\}$;
2. On notera $H^{\dagger D^G}$ le graphe épais de dialecte $D^G \times D^H$ défini comme $\{\sum_{i \in D^G} H_i\}^\tau$ où τ est la bijection naturelle $D^H \times D^G \rightarrow D^G \times D^H, (a, b) \mapsto (b, a)$.

§5.3.24 On définit alors le branchement $F \square G$ de deux graphes épais comme le branchement des graphes $F^{\dagger D^G}$ et $G^{\dagger D^F}$. La Figure 5.14 montre le résultat du branchement des graphes G et H de la Figure 5.12.

§5.3.25 On définit ensuite l'exécution $G :: H$ de deux graphes épais G et H comme l'exécution des graphes $G^{\dagger D^H}$ et $H^{\dagger D^G}$. La Figure 5.15 montre l'ensemble des chemins alternés dans le branchement des graphes G et H de la Figure 5.12. Les Figures 5.16 et 5.17 illustrent le résultat de

FIGURE 5.13 – Les graphes $G^{\dagger_{D^H}}$ et $H^{\ddagger_{D^G}}$ FIGURE 5.14 – Le branchement des graphes épais G et H

FIGURE 5.15 – Les chemins alternés dans le branchement des graphes épais G et H FIGURE 5.16 – Le résultat de l'exécution des graphes épais G et H

l'exécution de ces deux graphes, la première est une représentation en trois dimensions afin de faire le lien avec la figure 5.15, tandis que la seconde est une représentation du même graphe en deux dimensions. De même, la mesure de l'interaction est définie comme $\llbracket G^{\dagger}_{D^H}, H^{\ddagger}_{D^G} \rrbracket$.

§5.3.26 DÉFINITION.

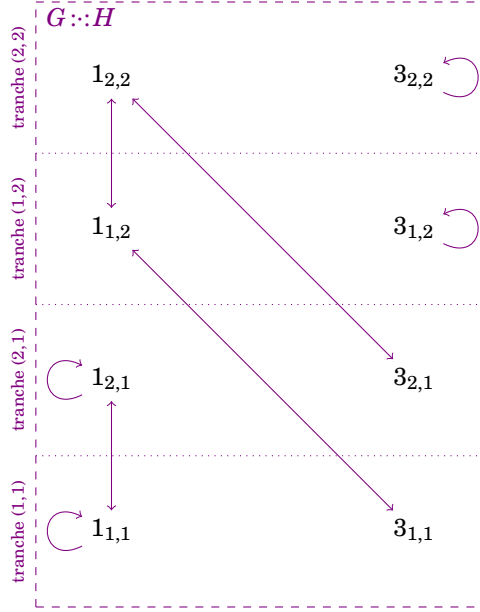
On définit l'exécution $F :: G$ de deux graphes épais F, G comme le graphe épais de support $S^F \Delta S^G$ et de dialecte $D^F \times D^G$ défini par $F^{\dagger}_{D^G} :: G^{\ddagger}_{D^F}$.

§5.3.27 Étant donné que nous avons simplement modifié les graphes avant de les brancher, nous pouvons faire la remarque suivante. Soit F, G, H des graphes épais, alors le graphe épais $F :: (G :: H)$ est par définition le graphe

$$F^{\dagger}_{D^G \times D^H} :: (G^{\dagger}_{D^H} :: H^{\ddagger}_{D^G})^{\ddagger}_{D^F} = F^{\dagger}_{D^G \times D^H} :: ((G^{\dagger}_{D^H})^{\ddagger}_{D^F} :: H^{\ddagger}_{D^F \times D^G})$$

Si l'on suppose $S^F \cap S^G \cap S^H = \emptyset$, alors il est clair que $(S^F \times D) \cap (S^G \times D) \cap (S^H \times D) = \emptyset$. On en déduit par l'associativité de l'exécution que

$$F^{\dagger}_{D^G \times D^H} :: ((G^{\dagger}_{D^H})^{\ddagger}_{D^F} :: H^{\ddagger}_{D^F \times D^G}) = (F^{\dagger}_{D^G \times D^H} :: ((G^{\dagger}_{D^H})^{\ddagger}_{D^F})) :: H^{\ddagger}_{D^F \times D^G}$$

FIGURE 5.17 – Le graphe épais $G :: H$ représenté en deux dimensions.

Or, nous avons :

$$(F^{\dagger}_{D^G \times D^H} :: ((G^{\dagger}_{D^H})^{\ddagger}_{D^F})) :: H^{\ddagger}_{D^F \times D^G} = ((F^{\dagger}_{D^G} :: G^{\ddagger}_{D^F})^{\dagger}_{D^H}) :: H^{\ddagger}_{D^F \times D^G}$$

Ce dernier est par définition le graphe $(F :: G) :: H$. Ce qui montre que l'associativité de $::$ sur les graphes épais est une simple conséquence de l'associativité de $::$.

§5.3.28 PROPOSITION (ASSOCIATIVITÉ).

Soit F, G, H des graphes épais tels que $S^F \cap S^G \cap S^H = \emptyset$. Alors :

$$F :: (G :: H) = (F :: G) :: H$$

§5.3.29 DÉFINITION.

Étant donné deux graphes épais F et G , on définit $\text{Cy}^e(F, G)$ comme l'ensemble des circuits dans le branchement $F^{\dagger}_{D^G} \square G^{\ddagger}_{D^F}$.

On définit également, étant donné un dialecte D^H ,

- l'ensemble $\text{Cy}^e(F, G)^{\dagger}_{D^H}$ des circuits dans le graphe $(F^{\dagger}_{D^G})^{\dagger}_{D^H} \square (G^{\ddagger}_{D^F})^{\dagger}_{D^H}$
- l'ensemble $\text{Cy}^e(F, G)^{\ddagger}_{D^H}$ des circuits dans le graphe $(F^{\ddagger}_{D^G})^{\dagger}_{D^H} \square (G^{\ddagger}_{D^F})^{\dagger}_{D^H}$

§5.3.30 PROPOSITION.

Soit F, G, H des graphes épais, et $\phi : D^H \rightarrow D$ une bijection. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Cy}^e(F, H) &\cong \text{Cy}^e(F, H^{\phi}) \\ \text{Cy}^e(F, G)^{\dagger}_{D^H} &\cong \text{Cy}^e(F, G)^{\dagger}_{\phi(D^H)} \\ \text{Cy}^e(F, G)^{\ddagger}_{D^H} &\cong \text{Cy}^e(F, G)^{\ddagger}_{D^H} \end{aligned}$$

Démonstration. Ces trois bijections sont des simples conséquences de la propriété §5.1.20. ☺

§5.3.31 De la même manière que dans le paragraphe §5.3.27, on considère trois graphes épais F, G, H , et on s'intéresse maintenant aux circuits dans $\text{Cy}^e(F, G :: H) \cup (\text{Cy}^e(G, H)^{\ddagger}_{D^F})$. Par définition, ce sont les circuits de l'un des deux graphes suivants :

$$F^{\dagger}_{D^G \times D^H} \square ((G^{\dagger}_{D^H} :: H^{\ddagger}_{D^G})^{\ddagger}_{D^F}) = F^{\dagger}_{D^G \times D^H} \square ((G^{\dagger}_{D^H})^{\ddagger}_{D^F} :: H^{\ddagger}_{D^F \times D^G})$$

$$(G^{\dagger}_{D^H} \square H^{\ddagger}_{D^G})^{\ddagger D^F} = (G^{\dagger}_{D^H})^{\ddagger D^F} \square H^{\ddagger}_{D^F \times D^G}$$

On peut alors utiliser la propriété cyclique pour déduire que ces circuits sont en bijection avec les circuits des graphes suivants :

$$\begin{aligned} (F^{\dagger}_{D^G \times D^H} :: (G^{\ddagger}_{D^F})^{\dagger}_{D^H}) \square H^{\ddagger}_{D^F \times D^G} &= (F^{\dagger}_{D^G} :: G^{\ddagger}_{D^F})^{\dagger}_{D^H} \square H^{\ddagger}_{D^F \times D^G} \\ (F^{\dagger}_{D^G \times D^H} \square (G^{\ddagger}_{D^F})^{\dagger}_{D^H}) &= (F^{\dagger}_{D^G} \square G^{\ddagger}_{D^F})^{\dagger}_{D^H} \end{aligned}$$

Ce qui montre la propriété cyclique géométrique pour les graphes épais.

§5.3.32 PROPOSITION (PROPRIÉTÉ CYCLIQUE GÉOMÉTRIQUE).

Si F, G, H sont trois graphes épais tels que $S^F \cap S^G \cap S^H = \emptyset$, alors :

$$\text{Cy}^e(F, G :: H) \cup \text{Cy}^e(G, H)^{\dagger}_{D^F} \cong \text{Cy}^e(F :: G, H) \cup \text{Cy}^e(F, G)^{\dagger}_{D^H}$$

§5.3.33 COROLLAIRE (ADJONCTION GÉOMÉTRIQUE).

Si F, G, H sont trois graphes épais satisfaisant $S^G \cap S^H = \emptyset$, on a :

$$\text{Cy}^e(F, G \cup H) \cong \text{Cy}^e(F :: G, H) \cup \text{Cy}^e(F, G)^{\dagger}_{D^H}$$

§5.3.34 DÉFINITION.

Étant donné une fonction de quantification des circuits m , on peut définir une mesure de l'interaction des graphes épais. Pour tout couple de graphes épais F, G on définit :

$$\llbracket F, G \rrbracket = \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(F, G)} \frac{1}{\text{Card}(D^F \times D^G)} m(\omega(\pi))$$

§5.3.35 PROPOSITION (PROPRIÉTÉ CYCLIQUE NUMÉRIQUE).

Étant donnés des graphes épais F, G, H tels que $S^F \cap S^G \cap S^H = \emptyset$, on a :

$$\llbracket F, G :: H \rrbracket + \llbracket G, H \rrbracket = \llbracket H, F :: G \rrbracket + \llbracket F, G \rrbracket$$

Démonstration. La preuve est un calcul direct utilisant la propriété cyclique géométrique (Proposition §5.3.32). On notera n^F (resp. n^G, n^H) le cardinal du dialecte D^F (resp. D^G, D^H).

$$\begin{aligned} &\llbracket F, G :: H \rrbracket + \llbracket G, H \rrbracket \\ &= \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(F, G :: H)} \frac{1}{n^F n^G n^H} m(\omega(\pi)) + \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(G, H)} \frac{1}{n^G n^H} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(F, G :: H)} \frac{1}{n^F n^G n^H} m(\omega(\pi)) + \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(G, H)^{\dagger}_{D^F}} \frac{1}{n^F n^G n^H} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(F, G :: H) \cup \text{Cy}^e(G, H)^{\dagger}_{D^F}} \frac{1}{n^F n^G n^H} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(H, F :: G) \cup \text{Cy}^e(F, G)^{\dagger}_{D^H}} \frac{1}{n^F n^G n^H} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(H, F :: G)} \frac{1}{n^F n^G n^H} m(\omega(\pi)) + \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(F, G)^{\dagger}_{D^H}} \frac{1}{n^F n^G n^H} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(H, F :: G)} \frac{1}{n^F n^G n^H} m(\omega(\pi)) + \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(F, G)} \frac{1}{n^F n^G} m(\omega(\pi)) \\ &= \llbracket H, F :: G \rrbracket + \llbracket F, G \rrbracket \end{aligned}$$

☺

§5.3.36 COROLLAIRE (ADJONCTION NUMÉRIQUE).

Étant donnés des graphes épais F, G, H tels que $S^G \cap S^H = \emptyset$, on a :

$$\llbracket F, G :: H \rrbracket = \llbracket H, F :: G \rrbracket + \llbracket F, G \rrbracket$$

§5.3.37 SUR LA CONVENTION DE LA MESURE NUMÉRIQUE

La mesure de l'interaction que nous avons définie cache une convention : chaque tranche d'un graphe épais F est considérée comme "de poids" $1/n^F$, ce qui fait que l'ensemble des tranches a pour poids total 1. Cette convention correspond à considérer une *trace normalisée* (telle que $tr(1) = 1$) sur le dialecte (voir chapitre 9). Il est également possible de considérer une autre convention toute aussi naturelle selon laquelle chaque tranche est de poids 1. Dans ce cas, la mesure entre deux graphes épais F, G est définie simplement comme

$$\langle F, G \rangle = \sum_{\pi \in \text{Cy}^e(F, G)} m(\omega(\pi))$$

La propriété cyclique numérique s'énonce alors différemment : pour tous graphes épais F, G , et H tels que $S^F \cap S^G \cap S^H = \emptyset$, on a

$$\langle F, G :: H \rangle + n^F \langle G, H \rangle = \langle H, F :: G \rangle + n^H \langle F, G \rangle$$

On peut remarquer que l'apparition des termes n^F et n^H dans cette égalité est reliée à l'apparition des termes $\mathbf{1}_F$ et $\mathbf{1}_H$ dans la propriété cyclique des graphes tranchés : il s'agit en réalité d'un seul et unique terme, comme on le verra dans la section suivante.

Graphes épais tranchés

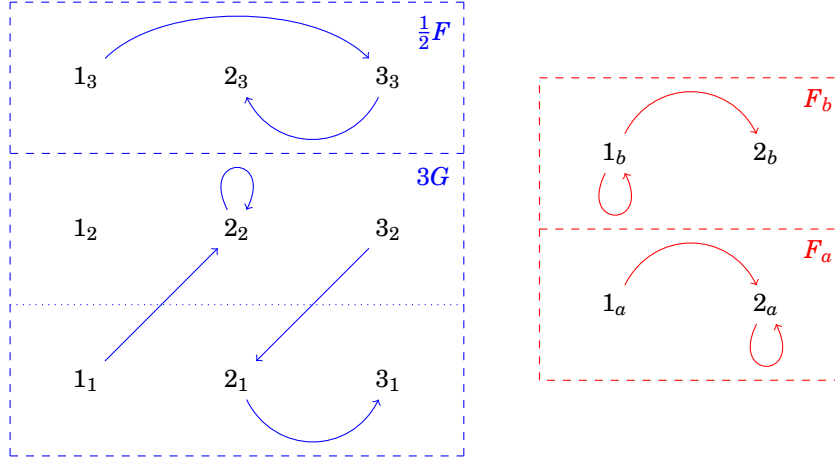
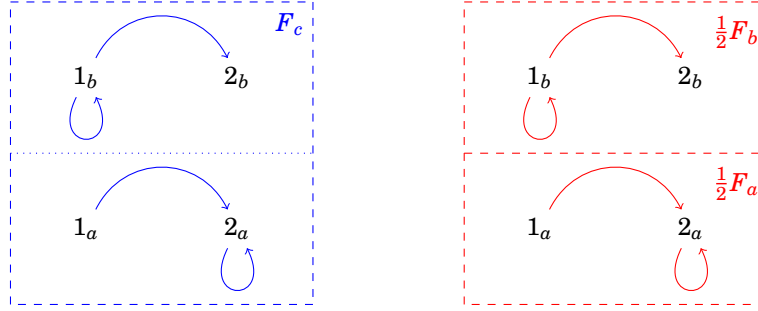
§5.3.38 On peut bien entendu appliquer la construction additive de la Section 5.3.2 au cas des graphes épais. Un *graphe épais tranché* orienté pondéré (resp. cohérent) G de support S^G est une famille finie $\sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i$ où, pour tout $i \in I^G$, G_i est un graphe épais orienté pondéré (resp. cohérent) tel que $S^{G_i} = S^G$, et $\alpha_i^G \in \mathbf{R}$. On définit le *dialecte* de G comme l'ensemble $\uplus_{i \in I^G} D^{G_i}$.

§5.3.39 On peut alors définir les extensions de l'exécution et de la mesure de l'interaction comme expliqué dans la section 5.3.2 :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in I^F} \alpha_i^F F_i \right) :: \left(\sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i \right) &= \sum_{(i,j) \in I^F \times I^G} \alpha_i^F \alpha_j^G F_i :: G_j \\ \llbracket \sum_{i \in I^F} \alpha_i^F F_i, \sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i \rrbracket &= \sum_{(i,j) \in I^F \times I^G} \alpha_i^F \alpha_j^G \llbracket F_i, G_j \rrbracket \end{aligned}$$

§5.3.40 La figure 5.18 donne deux exemples de graphes épais tranchés. La convention de représentation des graphes épais tranchés correspond simplement à la convention de représentation des graphes tranchés, à ceci près que les graphes contenus dans les tranches sont des graphes épais. Ainsi, deux tranches sont séparées par une ligne hachurée, tandis que deux points du dialecte d'un graphe épais (c'est-à-dire le contenu d'une tranche) sont séparés par une ligne pointillée.

§5.3.41 Il faut cependant remarquer que certains graphes (par exemple le graphe $F_a + F_b$ représenté en rouge dans la Figure 5.18) peuvent être considérés comme un graphe épais — et par conséquent comme un graphe épais tranché à une tranche — ou bien comme un graphe tranché à deux tranches — et par conséquent un graphe épais tranché à deux tranches. En effet, si l'on

FIGURE 5.18 – Exemples de graphe épais tranché $\frac{1}{2}F + 3G$ et $F_a + F_b$ FIGURE 5.19 – Les graphes G_1 et G_2

définit les graphes :

F_a	F_b	F_c
$V^{F_a} = \{1, 2\}$	$V^{F_b} = \{1, 2\}$	$V^{F_c} = \{1, 2\} \times \{a, b\}$
$E^{F_a} = \{f, g\}$	$E^{F_b} = \{f, g\}$	$E^{F_c} = \{f_a, f_b, g_a, g_b\}$
$s^{F_a} = \begin{cases} f \mapsto 1 \\ g \mapsto 2 \end{cases}$	$s^{F_b} = \begin{cases} f \mapsto 1 \\ g \mapsto 1 \end{cases}$	$s^{F_c} = \begin{cases} f_i \mapsto s^{F_i}(f) \\ g_i \mapsto s^{F_i}(g) \end{cases}$
$t^{F_a} = \begin{cases} f \mapsto 2 \\ g \mapsto 2 \end{cases}$	$t^{F_b} = \begin{cases} f \mapsto 2 \\ g \mapsto 1 \end{cases}$	$t^{F_c} = \begin{cases} f_i \mapsto t^{F_i}(f) \\ g_i \mapsto t^{F_i}(g) \end{cases}$
$\omega^{F_a} \equiv 1$	$\omega^{F_b} \equiv 1$	$\omega^{F_c} \equiv 1$

§5.3.42 On peut alors définir les deux graphes épais tranchés $G_1 = F_c$ et $G_2 = \frac{1}{2}F_a + \frac{1}{2}F_b$. Ces deux graphes sont tous deux représentés dans la figure 5.19. Ils sont similaires en un sens très particulier : il est possible de montrer que si H est un graphe épais tranché quelconque, et m est une fonction de quantification des circuits, alors $\llbracket G_1, H \rrbracket = \llbracket G_2, H \rrbracket$. Il sont donc *observationnellement équivalents*, et ceci explique la remarque §5.3.37 dans laquelle nous disons avoir choisi la convention où les tranches définies par le dialecte d'un graphe épais F sont chacune de poids $1/\text{Card}(D^F)$.

§5.3.43 DÉFINITION (GRAPHES UNIVERSELLEMENT ÉQUIVALENTS).

Soit F, G deux graphes. On dit que F et G sont *universellement équivalents* (pour la mesure de l'interaction $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$) — noté $F \simeq_u G$ — si pour tout graphe H :

$$\llbracket F, H \rrbracket = \llbracket G, H \rrbracket$$

La proposition suivante énonce que si un graphe F' est obtenu par renommage des arêtes d'un graphe F , alors $F \simeq_u F'$.

§5.3.44 PROPOSITION.

Soit F, F' deux graphes (orientés pondérés, cohérents, cohérents stricts) tels que $V^F = V^{F'}$, et ϕ une bijection $E^F \rightarrow E^{F'}$ telle que :

$$s^G \circ \phi = s^F, \quad t^G \circ \phi = t^F, \quad \omega^G \circ \phi = \omega^F$$

(et éventuellement $e \supset_F f \Leftrightarrow \phi(e) \supset_{F'} \phi(f)$)

Alors $F \simeq_u F'$.

Démonstration. La proposition est évidente. En effet, la bijection ϕ induit, grâce aux hypothèses sur les fonctions sources et but (ainsi que la condition sur la cohérence dans le cas des graphes cohérents), une bijection entre les ensembles de cycles $\text{Cy}(F, H)$ et $\text{Cy}(G, H)$. La condition sur la fonction de poids nous assure que cette bijection est ω -invariante, et on en déduit le résultat. $\odot$

§5.3.45 PROPOSITION.

Soit F, G des graphes tranchés. S'il existe une bijection $\phi : I^F \rightarrow I^G$ telle que $F_i = G_{\phi(i)}$ et $\alpha_i^F = \alpha_{\phi(i)}^G$, alors $F \simeq_u G$.

Démonstration. Par définition :

$$\begin{aligned} \llbracket G, H \rrbracket &= \sum_{(i,j) \in I^G \times I^H} \alpha_i^G \alpha_j^H \llbracket G_i, H_j \rrbracket \\ &= \sum_{(i,j) \in I^F \times I^H} \alpha_{\phi(i)}^G \alpha_j^H \llbracket G_{\phi(i)}, H_j \rrbracket \\ &= \sum_{(i,j) \in I^F \times I^G} \alpha_i^F \alpha_j^G \llbracket F_i, G_j \rrbracket \end{aligned}$$

Donc F et G sont universellement équivalents. $\odot$

§5.3.46 PROPOSITION.

Soit F, G des graphes épais. S'il existe une bijection $\phi : D^F \rightarrow D^G$ telle que $G = F^\phi$, alors $F \simeq_u G$.

Démonstration. Soit F, G des graphes épais tels que $G = F^\phi$ pour une bijection $\phi : D^G \rightarrow D^F$, et H un graphe épais quelconque. Alors la bijection $\phi \times \text{Id} : D^G \times D^H \rightarrow D^F \times D^H$ est telle que $G^\dagger_{D^H} = (F^\dagger_{D^H})^{\phi \times \text{Id}}$. Par la Proposition §5.1.20, l'ensemble des circuits alternants dans $F^\dagger \square H^\ddagger$ est égal à l'ensemble des circuits alternants dans $(F^\dagger)^{\phi \times \text{Id}} \square (H^\dagger)^{\phi \times \text{Id}} = G^\dagger \square H^\ddagger$. On a alors :

$$\begin{aligned} \llbracket F, H \rrbracket &= \sum_{\pi \in \text{Cy}(F, H)} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{\pi \in \text{Cy}(G, H)} m(\omega(\pi)) \\ &= \llbracket G, H \rrbracket \end{aligned}$$

On en déduit donc que F et G sont universellement équivalents. $\odot$

§5.3.47 PROPOSITION.

Soit $F = \sum_{i \in I^F} \alpha_i^F F_i$ un graphe épais tranché, et notons, pour tout $i \in I^F$, $n^{F_i} = \text{Card}(D^{F_i})$ et $n^F = \sum_{i \in I^F} n^{F_i}$. Supposons qu'il existe un scalaire α tel que pour tout $i \in I^F$, $\alpha_i^F = \alpha \frac{n^{F_i}}{n^F}$. On définit alors le graphe épais tranché à une seule tranche αG de dialecte $\uplus D^{F_i} = \cup_{i \in I^F} D^{F_i} \times \{i\}$ et de support V^F par :

$$\begin{aligned} V^G &= V^F \times \uplus D^{F_i} \\ E^G &= \uplus E^{F_i} = \cup_{i \in I^F} E^{F_i} \times \{i\} \\ s^G &= (e, i) \mapsto (s^{F_i}(e), i) \\ t^G &= (e, i) \mapsto (t^{F_i}(e), i) \\ \omega^G &= (e, i) \mapsto \omega^{F_i}(e) \\ (e, i) \circ^G (f, j) &\Leftrightarrow (i \neq j) \vee (i = j \wedge e \circ^{F_i} f) \end{aligned}$$

Alors F est universellement équivalent à G .

Démonstration. Soit H un graphe épais tranché. On a :

$$\begin{aligned} \llbracket F, H \rrbracket &= \sum_{i \in I^H} \sum_{j \in I^F} \alpha_i^H \alpha_j^F \llbracket F_i, H_j \rrbracket \\ &= \sum_{i \in I^H} \sum_{j \in I^F} \alpha_i^H \alpha \frac{n^{F_i}}{n^F} \llbracket F_i, H_j \rrbracket \\ &= \sum_{i \in I^H} \sum_{j \in I^F} \alpha_i^H \alpha \frac{n^{F_i}}{n^F} \frac{1}{n^{F_i} n^{H_j}} \sum_{\pi \in \text{Cy}(F_i, H_j)} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{i \in I^H} \sum_{j \in I^F} \alpha_i^H \alpha \frac{1}{n^F n^{H_j}} \sum_{\pi \in \text{Cy}(F_i, H_j)} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{i \in I^H} \alpha_i^H \alpha \frac{1}{n^F n^{H_j}} \sum_{j \in I^F} \sum_{\pi \in \text{Cy}(F_i, H_j)} m(\omega(\pi)) \end{aligned}$$

Il reste à remarquer que $\cup_{j \in I^F} \text{Cy}(F_i, H_j) = \text{Cy}(G, H)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \llbracket F, H \rrbracket &= \sum_{i \in I^H} \alpha_i^H \alpha \frac{1}{n^F n^{H_j}} \sum_{j \in I^F} \sum_{\pi \in \text{Cy}(F_i, H_j)} m(\omega(\pi)) \\ &= \sum_{i \in I^H} \alpha_i^H \alpha \frac{1}{n^F n^{H_j}} \sum_{\pi \in \text{Cy}(F, H_j)} m(\omega(\pi)) \\ &= \llbracket \alpha G, H \rrbracket \end{aligned}$$

On a donc montré que F est universellement équivalent à αG . ☺

§5.3.48 Si l'on avait choisi la convention selon laquelle les tranches définies par le dialecte d'un graphe épais sont de poids 1, alors on pourrait montrer que les graphes F_c et $S = F_b + F_a$ sont équivalents observationnellement (suivant la mesure $\langle \cdot, \cdot \rangle$, c.f. §5.3.37). Dans ce cas, il est possible de voir que le terme $\text{Card}(F_c)$ qui apparaît dans la propriété cyclique lorsque appliquée avec le graphe F_c correspond très exactement au terme $\mathbf{1}_S$ qui apparaît dans cette même propriété lorsque l'on remplace F_c par S .

§5.3.49 Une des conséquences des Propositions §5.3.44, §5.3.45, et §5.3.46 est que deux graphes F, G tels que G est obtenu à partir de F par renommage des ensembles E^F, I^F, D^F sont universellement équivalents. On considèrera donc par la suite nos graphes à renommage près de ces ensembles.

5.4 Conclusion et Notations

§5.4.1 On a donc développé quatre adjonctions géométriques distinctes :

Ad1. L'adjonction des circuits dans le cadre des graphes orientés pondérés ;

Ad2. L'adjonction des 1-circuits dans le cadre des graphes orientés pondérés ;

Ad3. L'adjonction des circuits dans le cadre des graphes cohérents stricts ;

Ad4. L'adjonction des circuits simples dans le cadre des graphes cohérents ;

À partir de maintenant, on fera référence à ces adjonctions en utilisant les abréviations **Ad1**, **Ad2**, **Ad3**, **Ad4**.

§5.4.2 On a de plus montré que chacune de ces quatre adjonctions donnaient lieu à quatre adjonctions numériques (paramétrées par une fonction de quantification des circuits) :

S. Le cas des graphes sans tranches ni dialectes ;

T. Le cas des graphes tranchés ;

E. Le cas des graphes épais ;

ET. Le cas des graphes épais tranchés.

On dénotera alors les différentes adjonctions numériques en précisant l'adjonction géométrique considérée, suivie de la variante numérique choisie. Ainsi, la variante avec graphes épais tranchés de l'adjonction des 1-circuits sera notée **Ad2.-ET.**

§5.4.3 Nous définirons dans la suite de cette thèse d'autres cadres. En particulier, le cas des graphages pondérés (voir Chapitre 8) :

G. Le cas des graphages pondérés.

Dans le cas des graphages, nous aurons à nouveau quatre cas : sans tranches **G.-S.**, tranchés **G.-T.**, épais **G.-E.**, et épais tranchés **G.-ET.**

§5.4.4 De plus, nous présenterons les adjonctions numériques suivantes :

TH L'adjonction spectrale (voir §10.2.6) ;

FK L'adjonction du déterminant de Fuglede-Kadison (voir §4.2.21) ;

Ces différentes adjonctions auront elles aussi différentes variantes, qui correspondent aux variantes **S.**, **T.**, **E.**, et **ET.** des adjonctions sur les graphes, et seront par conséquent notées par les mêmes abréviations :

S. Le cas sans dialectes ;

T. Le cas commutatif : des algèbres commutatives comme dialectes ;

E. Le cas purement non-commutatif : seulement des facteurs comme dialectes ;

ET. Le cas général : toute algèbre finie et hyperfinie comme dialecte.

Le lien entre les différents types de dialectes et les différentes variantes des graphes est étudié précisément dans la section 9.3.

CHAPITRE 6

FRAGMENT MULTIPLICATIF

Table des matières

6.1 Les multiplicatifs	118
6.1.1 Projets, Conduites	118
6.1.2 Connecteurs	119
6.2 Sémantique Dénotationnelle	121
6.2.1 Définition de la catégorie	121
6.2.2 Un modèle de MLL	122
6.3 Vérité	125
6.3.1 Projets gagnants, conduites vraies	125
6.3.2 Interprétation des preuves	125
6.3.3 Théorèmes d'adéquation forte	128
6.3.4 Invariance par élimination des coupures	129

- §6.1 Dans ce chapitre, nous développons la construction d'une interprétation de la logique linéaire multiplicative à partir d'une adjonction comme celles obtenues au chapitre précédent. Les choix de l'adjonction et de la fonction de quantification des cycles ne sont pas significatifs dans la construction. Il est cependant important que la mesure $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ choisie soit à valeur dans $\mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, et cette construction ne convient donc pas aux graphes tranchés (le chapitre suivant est une adaptation de la construction de ce chapitre au cas des graphes tranchés). Les constructions de ce chapitre conviennent donc aux adjonctions numériques **Ad1.-S.**, **Ad1.-E.**, **Ad2.-S.**, **Ad2.-E.**, **Ad3.-S.**, **Ad3.-E.**, **Ad4.-S.**, et **Ad4.-E.**. Elles conviennent également aux cas **G.-S.** et **G.-E.**, introduits dans le Chapitre 8.
- §6.2 Dans l'ensemble de ce chapitre, sauf indication contraire, nous considérerons que nous travaillons avec une notion de graphes pondérés dans un ensemble Ω , pour laquelle nous avons défini une notion d'exécution $::$ et, pour tout couple de graphes (F, G) , un ensemble de cycles alternés $\text{Cy}(F, G)$ tels que, pour tous graphes F, G, H avec $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$ on ait une bijection préservant les poids :

$$\text{Cy}(F, G :: H) \uplus \text{Cy}(G, H) \cong \text{Cy}(H, F :: G) \uplus \text{Cy}(F, G)$$

On considèrera également que l'on a défini une fonction quelconque $m : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, et on travaillera avec la mesure $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_m$ associée (nous oublierons l'indice m afin de simplifier les notations).

- §6.3 Le contenu de ce chapitre — ainsi que la Section 9.3 du Chapitre 9, dans le cas particulier des graphes orientés pondérés avec la fonction de quantification des cycles $x \mapsto -\log(1-x)$, a fait l'objet d'un article [Sei12]. On y montre en particulier que le modèle obtenu est une version combinatoire de la GdI5 de Girard (voir la Section 9.3).

6.1 Les multiplicatifs

Projets, Conduites

- §6.1.1 On va maintenant définir les objets qui interpréteront les preuves. Ils consisteront évidemment en un graphe, mais nous y associerons aussi un réel positif ou infini (i.e. un élément de $\mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$). Ce nombre réel a pour rôle de compenser le terme additionnel $\llbracket F, G \rrbracket$ de l'adjonction (voir la Section 5.3 au sujet des adjonctions numériques).
- §6.1.2 DÉFINITION (PROJETS).
Un *projet multiplicatif* est un couple $\alpha = (a, A)$, où $a \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ est appelé la *mise*, et A est un graphe orienté pondéré sur un ensemble fini de sommets V^A . L'ensemble V^A de sommets de A sera appelé le *support* de α .
- §6.1.3 DÉFINITION (MESURE DE L'INTERACTION).
Soit $\alpha = (a, A)$ et $\beta = (b, B)$ deux projets multiplicatifs. On définit $\ll \alpha, \beta \gg = a + b + \llbracket A, B \rrbracket$.
- §6.1.4 DÉFINITION (ORTHOGONALITÉ).
Deux projets multiplicatifs α et β de même support sont *orthogonaux* lorsque $\ll \alpha, \beta \gg \notin \{0, \infty\}$. On écrira cela $\alpha \perp \beta$ et on définit l'orthogonal d'un ensemble A de projets multiplicatifs de même support (une *éthique*) par $A^\perp = \{\beta \mid \forall \alpha \in A, \alpha \perp \beta\}$.
- §6.1.5 Pour comprendre un peu mieux cette notion d'orthogonalité, prenons une structure de preuve $\mathcal{R}$, et considérons les permutations σ et τ_v respectivement définies par les liens axiomes et par un itinéraire $v \in \mathbb{V}(\mathcal{R})$. La structure de preuve est alors séquentialisable si et seulement si pour tout itinéraire $v \in \mathbb{V}(\mathcal{R})$ le produit des permutations σ et τ_v est cyclique. Or les permutations σ et τ_v définissent deux graphes S et T_v tels que $\sigma\tau_v$ est cyclique si et seulement s'il existe exactement un cycle alternant dans $S \square T_v$ passant par toutes les arêtes.
- §6.1.6 La définition de l'orthogonalité peut donc être comprise comme une généralisation de celle obtenue à partir du critère de correction des longs voyages (voir la discussion à ce sujet dans la Section 2.4.1). En se basant sur les résultats obtenus dans l'article *Multiplicatives* [Gir87b]

— présentés dans la Section 2.4 — on peut alors définir les conduites — les formules — comme des ensembles clos par bi-orthogonal.

§6.1.7 DÉFINITION (CONDUITES).

Un ensemble de projets multiplicatifs $\mathbf{S}$ de même support X égal à son bi-orthogonal $\mathbf{S}^{\perp\perp}$ est appelé une *conduite*. On dira que X est le support de la conduite $\mathbf{S}$.

§6.1.8 REMARQUE. Comme pour toute notion d'orthogonalité, on a, pour tous ensembles A, B de projets multiplicatifs (de même support), les propriétés suivantes :

- $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
- $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$;

Pour la première propriété, si tout élément de A est un élément de B , et si x est orthogonal à tout élément de B , alors x est orthogonal à tout élément de A . D'où $x \in B^{\perp} \Rightarrow x \in A^{\perp}$.

Pour la seconde propriété, il est clair que l'on a l'inclusion $A^{\perp} \subset A^{\perp\perp\perp}$. On montre alors l'inclusion inverse : il est évident que $A \subset A^{\perp\perp}$, et on obtient $A^{\perp\perp\perp} \subset A^{\perp}$ par la remarque précédente.

§6.1.9 Remarquons qu'un ensemble $\mathbf{S}$ est une conduite si et seulement si il existe un ensemble T tel que $\mathbf{S} = T^{\perp}$. En effet, si $\mathbf{S}$ est une conduite, alors $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\perp\perp} = (\mathbf{S}^{\perp})^{\perp}$, et on peut alors prendre $T = \mathbf{S}^{\perp}$. Inversement, s'il existe T tel que $\mathbf{S} = T^{\perp}$, alors $\mathbf{S}^{\perp\perp} = T^{\perp\perp\perp} = T^{\perp}$. D'où $\mathbf{S}^{\perp\perp} = \mathbf{S}$.

Connecteurs

§6.1.10 On définit maintenant les connecteurs, en premier lieu sur les projets multiplicatifs puis sur les conduites. Les connecteurs sont donc définis sur les conduites — les formules — par leur action sur les projets — les preuves.

§6.1.11 DÉFINITION (TENSEUR).

Soit a et b deux projets multiplicatifs de supports disjoints. On définit le tenseur de a et b par :

$$(a, A) \otimes (b, B) = (\ll a, b \gg, A \cup B)$$

§6.1.12 REMARQUE. Dans cette définition, puisque a et b ont des supports disjoints, $\ll a, b \gg = a + b$.

§6.1.13 DÉFINITION (TENSEUR DE CONDUITES).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites de support disjoints. On définit la conduite $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \{a \otimes b \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}^{\perp\perp}$$

On écrira $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ l'ensemble $\{a \otimes b \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$, l'*éthique* du tenseur.

§6.1.14 PROPOSITION (PROPRIÉTÉS DU TENSEUR).

Le tenseur est associatif et commutatif. De plus, il a un élément neutre, à savoir la conduite $\mathbf{1} = \{(0, (\emptyset, \emptyset))\}^{\perp\perp} = \{(a, (\emptyset, \emptyset)) \mid a \geq 0\}$, où $(\emptyset, \emptyset)$ est le graphe vide sur l'ensemble vide de sommets.

Démonstration. La localisation des objets implique que les conduites $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ sont exactement les mêmes. De la même manière, $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$. La vérification concernant $\mathbf{1}$ est immédiate. ☺

§6.1.15 DÉFINITION (COUPURE).

On définit, lorsque $\ll f, g \gg \neq \infty$, la *coupure* des projets multiplicatifs f et g :

$$f :: g = (\ll f, g \gg, F :: G)$$

§6.1.16 DÉFINITION (IMPLICATION LINÉAIRE).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites de supports respectifs V^A et V^B satisfaisant $V^A \cap V^B = \emptyset$.

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = \{f \mid \forall a \in \mathbf{A}, f :: a \downarrow \in \mathbf{B}\}$$

où la flèche vers le bas signifie que $f :: a$ est défini.

Le fait que l'implication entre deux conduites est bien une conduite (sans avoir à effectuer la clôture par bi-orthogonal) est une conséquence de la proposition suivante :

§6.1.17 THÉORÈME (DUALITÉ).

On a :

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$$

Démonstration. Soit V^A et V^B les supports disjoints de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, f un projet multiplicatif de support $V^A \cup V^B$, et a, b des projets multiplicatifs dans $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}^\perp$ respectivement. À partir de l'adjonction on a l'égalité de $\langle\langle f, a \otimes b \rangle\rangle$ et $\langle\langle f :: a, b \rangle\rangle$, et on obtient donc l'équivalence entre $f \perp a \otimes b$ et $f :: a \perp b$. On a alors $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ si et seulement si $a \otimes b \perp f$ — ce qui signifie que $f \in (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$. ☺

§6.1.18 REMARQUE. L'adjonction implique que $f \perp a \otimes b$ est équivalent à $f :: a \perp b$, mais cela nous en dit un peu plus, à savoir que l'interaction est la même. En effet, si $f \perp a \otimes b$ ou bien si $f :: a \perp b$, on a :

$$\begin{aligned} \langle\langle f, a \otimes b \rangle\rangle &= a + b + f + \llbracket F, A \cup B \rrbracket \\ &= a + b + f + \llbracket F, A \rrbracket + \llbracket F :: A, B \rrbracket \\ &= \langle\langle f :: a, b \rangle\rangle \end{aligned}$$

Ce calcul permet de voir par la même occasion comment la mise compense l'apparition du terme supplémentaire dans l'adjonction. En effet, la mise peut être vue comme un résidu des termes $\llbracket F, A \rrbracket$ apparaissant dans la composition des graphes, un résidu des éventuels cycles internes (comme dans la Figure 5.6, page 94) qui seraient apparus lors du branchement de F et A .

§6.1.19 PROPOSITION (RÈGLE MIX).

Soit $a \perp b$ et $c \perp d$ des projets multiplicatifs tels que le support de a (qui est aussi celui de b) soit disjoint du support de c et d . Alors $a \otimes c \perp b \otimes d$. Cela implique que l'on a une inclusion $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \subset \mathbf{A} \wp \mathbf{B} = \mathbf{A}^\perp \multimap \mathbf{B}$ pour toutes conduites $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ de supports disjoints.

Démonstration. Il est immédiat que $\langle\langle a \otimes c, b \otimes d \rangle\rangle = \langle\langle a, b \rangle\rangle + \langle\langle c, d \rangle\rangle$ du fait de la localité. Puisque ces deux termes sont des réels positifs non nuls, leur somme est un réel positif non nul et on a bien $a \otimes c \perp b \otimes d$. Maintenant, prenons les projets multiplicatifs a et c dans des conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de supports disjoints. On vient de montrer que $a \otimes c \in (\mathbf{A}^\perp \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$. Par la Proposition §6.1.17, on obtient que $(\mathbf{A}^\perp \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp = \mathbf{A}^\perp \multimap \mathbf{B}$. ☺

Finalement, on définit un objet très important qui sera utilisé dans la section suivante.

§6.1.20 DÉFINITION (DÉLOCALISATIONS).

Soit a un projet multiplicatif de support V^A , V^B un ensemble tel que $V^A \cap V^B = \emptyset$, et $\phi : V^A \rightarrow V^B$ une bijection. On définit la *délocalisation* de $a = (a, A)$ comme $\phi(a) = (a, \phi(A))$, où $\phi(A)$ est le graphe (voir §5.1.20) :

$$\phi(A) = (V^B, E^A, \phi \circ s^A, \phi \circ t^A, \omega^A)$$

Si $\mathbf{A}$ est une conduite de support V^A alors $\phi(\mathbf{A}) = \{\phi(a) \mid a \in \mathbf{A}\}$ est une conduite, la *délocalisation* de $\mathbf{A}$.

§6.1.21 REMARQUE. À des fins de simplification nous utiliserons abusivement — principalement dans la section suivante — la notation $\phi(a)$ même dans le cas où la bijection ϕ ne vérifie pas la condition $\text{dom}(\phi) \cap \text{im}(\phi) = \emptyset$ (et par conséquent ne satisfait pas nécessairement $V^A \cap \phi(V^A) = \emptyset$). Cependant, cet abus de notation n'est qu'une simplification : si l'on définit

$$\begin{aligned} \phi' : \quad \text{dom}(\phi) \times \{0\} &\rightarrow \text{codom}(\phi) \times \{1\}, & (x, 0) &\mapsto (\phi(x), 1) \\ \iota : \quad \text{dom}(\phi) &\rightarrow \text{dom}(\phi) \times \{0\}, & x &\mapsto (x, 0) \\ \zeta : \quad \text{codom}(\phi) \times \{1\} &\rightarrow \text{codom}(\phi), & (x, 1) &\mapsto x \end{aligned}$$

ce que l'on note abusivement $\phi(a)$ est parfaitement défini par des délocalisations comme $\zeta(\phi'(\iota(a)))$.

§6.1.22 PROPOSITION.

En gardant les notations de la définition précédente §6.1.20, on définit le projet multiplicatif $\mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}_\phi = (0, \Phi)$ par :

$$\begin{aligned} V^\Phi &= V^A \cup V^B \\ E^\Phi &= \{(a, \phi(a)) \mid a \in V^A\} \cup \{(\phi(a), a) \mid a \in V^A\} \\ s^\Phi &= (u, v) \mapsto u \\ t^\Phi &= (u, v) \mapsto v \\ \omega^\Phi &= e \mapsto 1 \end{aligned}$$

Alors $\mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}_\phi \in \mathbf{A} \multimap \phi(\mathbf{A})$.

§6.1.23 REMARQUE. Dans le cas des graphes épais, on considère le graphe ainsi défini comme un graphe de dialecte $\{1\}$.

6.2 Sémantique Dénotationnelle

Définition de la catégorie

§6.2.1 On va maintenant montrer qu'il est possible de construire une sémantique dénotationnelle (une catégorie *-autonome) à partir des constructions sur les graphes définies dans la section précédente. Cette catégorie *-autonome a la particularité d'interpréter les unités multiplicatives par des objets différents. La majeure partie de cette section est consacrée à la démonstration que notre catégorie possède les propriétés requises, mais ces résultats techniques cachent l'intérêt principal de la définition explicite de la catégorie. En effet, il est important de souligner les différences entre la géométrie de l'interaction et les sémantiques dénotationnelles. En particulier, même si les objets de la catégorie ont encore un lieu, nous ne travaillons plus dans un cadre *locatif* puisque toutes les définitions (morphismes, composition, foncteurs) se font au travers de délocalisations.

§6.2.2 La différence vient du fait que la géométrie de l'interaction est une "sémantique" de processus, d'actions [Gir89b]. C'est pourquoi il n'existe pas d'objets de type $\mathbf{A} \multimap \mathbf{A}$: un processus qui pour tout a produit a n'est pas un processus, car il n'a aucune action. Les objets qui se rapprochent le plus d'identités sont les délocalisations, i.e. les processus qui envoient a sur une copie a' de a localisée autre part. Afin de définir une catégorie nous sommes donc obligés de considérer les délocalisations comme des identités afin d'obtenir des morphismes identités. Ce "quotient" par délocalisation que l'on se voit contraint d'effectuer a pour conséquence la perte de la locativité.

§6.2.3 Afin de définir la catégorie, on commence par définir deux fonctions $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \psi_0 : x &\mapsto (x, 0) \\ \psi_1 : x &\mapsto (x, 1) \end{aligned}$$

Afin de définir la composition des morphismes, on utilisera trois copies de $\mathbf{N}$. C'est pourquoi on aura également besoin des deux bijections suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu : \mathbf{N} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbf{N} \times \{1, 2\} \\ (x, i) \mapsto (x, i + 1) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu : \mathbf{N} \times \{0, 2\} \rightarrow \mathbf{N} \times \{0, 1\} \\ (x, 0) \mapsto (x, 0) \\ (x, 2) \mapsto (x, 1) \end{array} \right.$$

§6.2.4 DÉFINITION (OBJETS ET MORPHISMES DE $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$).
On définit la catégorie :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}bj &= \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp} \text{ de support } X_{\mathbf{A}} \subset \mathbf{N}\} \\ \mathcal{M}or[\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= \{f \in \psi_0(\mathbf{A}) \multimap \psi_1(\mathbf{B})\}\end{aligned}$$

§6.2.5 DÉFINITION (COMPOSITION DE $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$).
Étant donné deux morphismes f et g , respectivement dans $\mathcal{M}or[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ et $\mathcal{M}or[\mathbf{B}, \mathbf{C}]$, on définit :

$$g \circ f = v(f :: \mu(g))$$

§6.2.6 PROPOSITION ($\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$ EST UNE CATÉGORIE).
Les objets et morphismes que l'on vient de définir, avec la composition induite par la composition des graphes, forment une catégorie.

Démonstration. On montre tout d'abord qu'il existe un morphisme identité pour tout objet de $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$, et que c'est un élément neutre pour la composition.

– **Unité.** Pour $S \subset \mathbf{N}$, on définit la bijection

$$1_S : \begin{cases} S \times \{0\} & \rightarrow & S \times \{1\} \\ (x, 0) & \mapsto & (x, 1) \end{cases}$$

Alors $\mathfrak{I}ar_{1_S}$ est le morphisme identité pour tous les objets de support $S \subset \mathbf{N}$.

Un simple calcul montre que les diagrammes requis commutent. Remarquons que dans le cas des graphes épais, il est indispensable de travailler à renommage des dialectes près. En effet, le dialecte de l'exécution d'un $\mathfrak{I}ar$ avec un graphe épais de dialecte D^A est égal à $D^A \times \{1\}$, et sans cette identification, les diagrammes traitant des identités ne commuteraient pas.

– **Associativité.** L'associativité de la composition est une conséquence directe de l'associativité de l'exécution (les délocalisations utilisées lors de la définition de la composition nous assurent que l'hypothèse sur l'intersection des lieux est satisfaite).

☺

Un modèle de MLL

§6.2.7 Il est bien connu qu'une catégorie $*$ -autonome définit un modèle de MLL [See89]. On va donc définir une structure $*$ -autonome sur $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$. On commence par définir un foncteur $\otimes$ et on montre que $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$ avec ce foncteur est une catégorie symétrique monoïdale close. On montrera ensuite que l'objet $\perp = 1^{\perp}$ est un objet dualisant, c'est-à-dire que la catégorie est $*$ -autonome.

§6.2.8 DÉFINITION.

Une catégorie monoïdale est une catégorie $\mathbb{K}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, une unité (à gauche et à droite) $1 \in \mathcal{O}bj_{\mathbb{K}}$, et satisfaisant $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$. Il faut ajouter à cela la commutation de certains diagrammes (voir le livre de Mac Lane [ML98]).

On dit que la catégorie monoïdale est symétrique si $A \otimes B \cong B \otimes A$, et close lorsque l'on peut associer à chaque famille de morphismes $\mathcal{M}or_{\mathbb{K}}[A, B]$ un objet $A \rightarrow B \in \mathcal{O}bj_{\mathbb{K}}$ tel que $\mathcal{M}or_{\mathbb{K}}[A \otimes B, C]$ soit naturellement isomorphe à $\mathcal{M}or_{\mathbb{K}}[A, B \rightarrow C]$.

§6.2.9 Pour définir le bifoncteur, on va à nouveau utiliser des délocalisations. On définit pour cela

les deux bijections :

$$\begin{aligned} \phi &: \begin{cases} \mathbf{N} \times \{0, 1\} & \rightarrow \mathbf{N} \\ (x, i) & \mapsto 2x + i \end{cases} \\ \tau &: \begin{cases} \mathbf{N} \times \{0, 1\} & \rightarrow \mathbf{N} \times \{0, 1\} \\ (2x + 1, 0) & \mapsto (2x, 1) \\ (2x, 1) & \mapsto (2x + 1, 0) \\ (x, i) & \mapsto (x, i) \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

§6.2.10 PROPOSITION.

La catégorie $(\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}, \bar{\otimes}, 1)$ est symétrique monoïdale close, avec le bifoncteur $\bar{\otimes}$ induit par le tenseur défini sur les objets par

$$\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B} = \phi(\psi_0(\mathbf{A}) \otimes \psi_1(\mathbf{B}))$$

et sur les morphismes par

$$\bar{f} \bar{g} = \tau(\psi_0(\phi(f)) \otimes \psi_1(\phi(g)))$$

et où l'unité est définie comme la conduite $1 = \{(0, (\emptyset, \emptyset))\}^{\perp\perp}$.

Démonstration. On vérifie tout d'abord qu'il s'agit d'une catégorie monoïdale, puis qu'elle est symétrique. On définit les isomorphismes par des bijections de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$. En effet, une telle bijection α induit un isomorphisme pour tout $X \subset \mathbf{N}$ en posant :

$$\bar{\alpha}_S = (0, A_S)$$

où A_S est le graphe

$$\begin{aligned} V^{A_S} &= (S \times \{0\}) \cup (\alpha(S) \times \{1\}) \\ E^{A_S} &= S \times \{0, 1\} \\ s^{A_S} &= (s, i) \mapsto (s, i) \\ t^{A_S} &= (s, i) \mapsto (s, 1 - i) \\ \omega^{A_S} &\equiv 1 \end{aligned}$$

- **Associativité.** Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ trois objets de $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$. Pour toutes conduites $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ de supports disjoints, et toute délocalisation θ , on a $\theta(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \theta(\mathbf{A}) \otimes \theta(\mathbf{B})$. On peut donc voir $\mathbf{A} \bar{\otimes} (\mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{C})$ et $(\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}) \bar{\otimes} \mathbf{C}$ comme le tenseur (localisé) de délocalisations de $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \bar{\otimes} (\mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{C}) &= \phi(\psi_0(\mathbf{A}) \otimes \psi_1(\phi(\psi_0(\mathbf{B}) \otimes \psi_1(\mathbf{C})))) \\ &= \phi(\psi_0(\mathbf{A})) \otimes \phi(\psi_1(\phi(\psi_0(\mathbf{B}))) \otimes \phi(\psi_1(\phi(\psi_1(\mathbf{C})))) \\ (\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}) \bar{\otimes} \mathbf{C} &= \phi(\psi_0(\phi(\psi_0(\mathbf{A}) \otimes \psi_1(\mathbf{B}))) \otimes \psi_1(\mathbf{C})) \\ &= \phi(\psi_0(\phi(\psi_0(\mathbf{A}))) \otimes \phi(\psi_0(\phi(\psi_1(\mathbf{B})))) \otimes \phi(\psi_1(\mathbf{C})) \end{aligned}$$

Il nous suffit alors de résoudre un simple problème combinatoire, et il est facile de vérifier que la bijection suivante, qui ne dépend pas des objets considérés, transforme $\mathbf{A} \bar{\otimes} (\mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{C})$ en $(\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}) \bar{\otimes} \mathbf{C}$

$$\alpha : n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{if } n \equiv 0[2] \\ n + 1 & \text{if } n \equiv 1[4] \\ (n - 1)/2 & \text{if } n \equiv 3[4] \end{cases}$$

On obtient donc l'associativité par une transformation naturelle. De plus, le diagramme pentagonal requis commute.

- **Unité** On doit montrer qu'il existe deux transformations naturelles $\lambda : 1 \bar{\otimes} \mathbf{A} \cong \mathbf{A}$ et $\rho : \mathbf{A} \bar{\otimes} 1 \cong \mathbf{A}$. On pose :

$$\lambda = \rho = \pi \circ \phi^{-1}$$

où $\pi : \mathbf{N} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbf{N}$ est défini par $\pi(n, i) = n$. Puisque les diagrammes requis commutent, $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$ est bien une catégorie monoïdale.

- **Clôture.** Dans la section précédente, on a vu que $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est une conduite. De plus, si X et Y sont les supports de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, la conduite $\phi(\psi_0(\mathbf{A}) \multimap \psi_1(\mathbf{B}))$ est de support $\phi(\psi_0(X) \cup \psi_1(Y)) \subset \mathbf{N}$, donc un objet de $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$. On notera cet objet $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, et on montre $\mathcal{M}\text{or}[\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}, \mathbf{C}] \cong \mathcal{M}\text{or}[\mathbf{A}, \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}]$ en utilisant le Théorème §6.1.17 et le morphisme α :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\text{or}[\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}, \mathbf{C}] &= (\psi_0(\phi(\psi_0(\mathbf{A}) \otimes \psi_1(\mathbf{B}))) \otimes \psi_1(\mathbf{C}))^\perp{}^\perp \\ &\stackrel{\phi^{-1}\alpha^{-1}\phi}{\cong} (\psi_0(\mathbf{A}) \otimes \psi_1(\phi(\psi_0(\mathbf{B}) \otimes \psi_1(\mathbf{C}))^\perp{}^\perp))^\perp{}^\perp \\ &= (\psi_0(\mathbf{A}) \otimes \psi_1(\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}))^\perp{}^\perp \\ &= \psi_0(\mathbf{A}) \multimap \psi_1(\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \\ &= \mathcal{M}\text{or}[\mathbf{A}, \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}] \end{aligned}$$

- **Symétrie.** On définit la bijection suivante :

$$\gamma : \begin{cases} \mathbf{N} & \rightarrow & \mathbf{N} \\ 2n & \mapsto & 2n+1 \\ 2n+1 & \mapsto & 2n \end{cases}$$

Cette bijection définit l'isomorphisme entre $\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{A}$. Cet isomorphisme est naturel, et puisque $\gamma^2 = Id$ on obtient la commutativité du diagramme de symétrie. On vérifie finalement par un simple calcul que (l'un des) diagrammes hexagonaux de tresses commute.

☺

§6.2.11 DÉFINITION.

Une catégorie $\ast$ -autonome $\mathbb{K}$ est une catégorie symétrique monoïdale close $(\mathbb{K}, \otimes, 1)$ munie d'un objet dualisant $\perp$.

§6.2.12 PROPOSITION.

L'objet $\perp = 1^\perp$ est dualisant pour $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$.

Démonstration. Partant du morphisme identité de l'objet $\mathbf{A} \multimap \perp$, on obtient un morphisme de $(\mathbf{A} \multimap \perp) \bar{\otimes} \mathbf{A}$ dans $\perp$ en appliquant¹ $\phi^{-1}\alpha^{-1}\phi$. À partir de là, on obtient un morphisme de $\mathbf{A} \bar{\otimes} (\mathbf{A} \multimap \perp)$ dans $\perp$ en pré-composant par γ . En appliquant $\phi^{-1}\alpha\phi$ à nouveau, on obtient alors un morphisme de $\mathbf{A}$ dans $(\mathbf{A} \multimap \perp) \multimap \perp$ défini par la fonction $x \mapsto 4x$. C'est donc un isomorphisme, ce qui signifie que $\perp$ est bien dualisant.

☺

Par conséquent, on obtient le théorème suivant.

§6.2.13 THÉORÈME.

La catégorie $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$ est $\ast$ -autonome.

- §6.2.14 **REMARQUE.** L'unité du tenseur $\mathbf{1}$ et son dual $\perp$ ne sont pas le même objet, contrairement à la plupart des modèles catégoriques de la logique linéaire multiplicative avec unités. En effet, $\mathbf{1}$ contient le projet multiplicatif $(0, (\emptyset, \emptyset))$, tandis que $\perp$ ne le contient pas ($\perp$ contient exactement tous les projets multiplicatifs $(\lambda, (\emptyset, \emptyset))$, avec $\lambda > 0$).

1. Voir la preuve de la clôture de $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$.

6.3 Vérité

§6.3.1 Dans cette section, il est nécessaire de supposer que Ω contient une unité 1 et la fonction $m : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ choisie (voir §6.2) vérifie $m(1) = \infty$.

Projets gagnants, conduites vraies

§6.3.2 On peut également définir une notion de vérité à partir de notre cadre. On va tout d'abord définir ce qu'est un projet multiplicatif gagnant — qui correspond à une preuve correcte ou une stratégie gagnante dans les sémantiques de jeu, comme un graphe ressemblant à un ensemble de liens axiomes, i.e. qui est une union disjointe de transpositions. L'idée est qu'un ensemble de liens axiomes interagissant correctement avec l'ensemble de ses tests (les switchings dans le cas des structures de preuves) définit une preuve correcte (une structure correcte, i.e. réseau de preuve). Avant de définir la notion de gain, nous commençons par poser quelques notations.

§6.3.3 DÉFINITION (PROJET GAGNANT).

Un projet multiplicatif $\alpha = (a, A)$ est *gagnant* lorsque $a = 0$, et que A est le graphe d'une union disjointe de transpositions, c'est-à-dire un graphe dont chaque sommet est source (resp. but) d'au plus une arête, et tel que pour chaque arête $e \in E^A(v, w)$, il existe $e^* \in E^A(w, v)$ et $\omega(e) = 1 = \omega(e^*)$.

§6.3.4 REMARQUE. Cette définition peut être relâchée en définissant un projet multiplicatif gagnant $\alpha = (a, A)$ comme un projet multiplicatif de mise nulle ($a = 0$), et tel que A soit le graphe d'une union disjointe de transpositions et de points fixes. Il n'est pas difficile de se rendre compte que les résultats qui suivent (consistance et compositionnalité) sont alors toujours corrects.

§6.3.5 DÉFINITION (CONDUITE VRAIE).

Une conduite $\mathbf{A}$ est *vraie* lorsqu'elle contient un projet gagnant.

§6.3.6 PROPOSITION (CONSISTANCE).

Les conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ ne peuvent être simultanément vraies.

Démonstration. Soit $\alpha = (0, A)$ et $\alpha' = (0, A')$ des projets multiplicatifs gagnants de même support V^A . Comme A et A' sont des unions disjointes de transpositions, soit le branchement $A \square A'$ ne contient pas de circuits alternés et $\ll \alpha, \alpha' \gg = 0$, soit il contient un circuit de poids 1 (toutes les arêtes de A et A' sont de poids 1) et donc $\ll \alpha, \alpha' \gg = \infty$. On en déduit que α et α' ne peuvent être orthogonaux. ☺

§6.3.7 PROPOSITION (COMPOSITIONNALITÉ).

Si f et a sont des projets multiplicatifs gagnants respectivement dans $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$, alors l'application $f :: a$ est également un projet multiplicatif gagnant.

Démonstration. Remarquons que $\ll f, a \gg$ est nécessairement égal à 0 ou ∞ . Par définition de $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, $f :: a$ est un projet multiplicatif dans $\mathbf{B}$ de mise $\ll f, a \gg$. Ce qui implique que $\ll f, a \gg = 0$, car un projet multiplicatif ne peut avoir une mise infinie.

Il reste à montrer que $F :: A$ est une union disjointe de transpositions. On vient de montrer qu'aucun circuit alterné n'apparaît dans $F \square A$. Chaque sommet de A (resp. de F) est source (resp. but) d'au plus une arête. On en déduit que $F :: A$ vérifie cette même propriété. De plus, si $\pi = (e_i)_{i=0}^n$ est un chemin alterné de source v et de but w dans $F \square A$, alors $\pi^* = (e_{n-i}^*)_{i=0}^n$ est un chemin alterné de source w et de but v dans $F \square A$. Il est évident que π et π^* sont de poids A , et on a donc montré que $F :: A$ est une union disjointe de transpositions. ☺

Interprétation des preuves

§6.3.8 Dans cette section, on donne une interprétation explicite des preuves de logique linéaire multiplicative avec mix et unités. Bien que la plupart des résultats de cette section aient déjà été obtenus par la définition de la catégorie $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$ (Section 6.2), cette construction semble importante car elle permet de mieux comprendre notre modèle ainsi que la notion de localité.

On notera δ la bijection $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ définie par $(n, m) \mapsto 2^n(2m + 1) - 1$. Dans cette section, on travaillera modulo δ et on considèrera les sommets de nos graphes dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

§6.3.9 DÉFINITION.

On fixe $\mathcal{V}ar = \{X_i(j)\}_{i,j \in \mathbf{N}}$ un ensemble de *variables localisées*². Pour $i \in \mathbf{N}$, l'ensemble $X_i = \{X_i(j)\}_{j \in \mathbf{N}}$ sera appelé le *nom de variable* X_i , et on appellera un élément de X_i une *variable de nom*² X_i . On suppose de plus que chaque nom de variable X_i est associé à une *taille* n_i et que pour chaque $m \in \mathbf{N}^*$, il existe une infinité d'entiers $i \in \mathbf{N}$ tels que $n_i = m$.

Pour $i, j \in \mathbf{N}$ on définit le *lieu* $\sharp X_i(j)$ de la variable $X_i(j)$ comme l'ensemble

$$\{(i, m) \mid jn_i \leq m \leq (j+1)n_i - 1\}$$

§6.3.10 DÉFINITION (FORMULES DE LOCMLL).

On définit inductivement les formules de la *logique linéaire multiplicative localisée* locMLL ainsi que leur *lieu* comme suit :

- Une variable $X_i(j)$ de nom X_i est une formule dont le lieu est défini comme $\sharp X_i(j)$;
- Si $X_i(j)$ est une variable de nom X_i , alors $(X_i(j))^\perp$ est une formule de lieu $\sharp X_i(j)$.
- Si A, B sont des formules de lieux X, Y tels que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \otimes B$ (resp. $A \wp B$) est une formule de lieu $X \cup Y$;
- Les constantes $\mathbf{1}$ et $\perp$ sont des formules de lieu $\emptyset$.

Si A est une formule, on écrira $\sharp A$ le lieu de A . On définit également les séquents $\vdash \Gamma$ de locMLL lorsque les formules de Γ ont des lieux deux à deux disjoints³.

§6.3.11 DÉFINITION (FORMULES DE MLL+MIX).

Les formules de MLL+MIX sont définies par la grammaire suivante :

$$F := X_i \mid X_i^\perp \mid F \otimes F \mid F \wp F \mid \perp \mid \mathbf{1}$$

où les X_i sont les noms de variables.

§6.3.12 REMARQUE. Remarquons qu'à toute formule de locMLL correspond une formule de MLL obtenue simplement en remplaçant les variables par leur nom, i.e. en appliquant $X_i(j) \mapsto X_i$. Inversement, il est possible de *localiser* une formule de MLL : si e est une énumération des occurrences des noms de variables dans $\vdash \Gamma$, on peut définir un séquent de locMLL $\vdash \Gamma^e$. Par exemple, la formule de MLL $X_1 \otimes (X_1 \otimes X_2) \multimap (X_1 \otimes X_2) \otimes X_1$ peut être localisée en la formule de locMLL $X_1(1) \otimes (X_1(2) \otimes X_2(1)) \multimap (X_1(3) \otimes X_2(2)) \otimes X_1(4)$, ou bien encore comme la formule $X_1(42) \otimes (X_1(78) \otimes X_2(7)) \multimap (X_1(99) \otimes X_2(88)) \otimes X_1(1324)$, etc.

§6.3.13 DÉFINITION (PREUVES DE LOCMLL).

Une preuve de locMLL est une preuve obtenue à partir des règles de calcul des séquents de la Figure 6.1, et telle que toute variable $X_i(j)$ et toute négation de variable $(X_i(j))^\perp$ apparait dans une règle axiome au plus une fois.

§6.3.14 DÉFINITION (PREUVES DE MLL+MIX).

Une preuve de MLL+MIX est une preuve obtenue à partir des règles de calcul des séquents de la Figure 6.2.

§6.3.15 REMARQUE. À toute preuve de locMLL correspond une preuve de MLL en remplaçant chaque variable par son nom. Inversement, étant donné une énumération e des occurrences de noms de variables dans les règles axiomes d'une preuve de MLL+MIX π , on peut étendre cette énumération à l'ensemble de l'arbre de dérivation afin d'obtenir une preuve de locMLL π^e . Par exemple, la preuve de la Figure 6.3 peut être localisée en la preuve de la Figure 6.4.

2. Les noms de variables sont les variables au sens habituel, tandis que la notion de variable localisée se rapproche de la notion usuelle d'occurrence.

3. Cette condition est des plus naturelles, puisque la virgule des séquents correspond à un $\wp$.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash X_i(j)^\perp, X_i(j')} \text{Ax } (j \neq j') \quad \frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash A^\perp, \Gamma}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{Cut}^4 \\
\frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash B, \Gamma}{\vdash A \otimes B, \Delta, \Gamma} \otimes^4 \quad \frac{}{\vdash \mathbf{1}} \mathbf{1} \\
\frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \wp B, \Gamma} \wp \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \perp, \Gamma} \perp \\
\frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{mix}^4
\end{array}$$

FIGURE 6.1 – Calcul des séquents localisé locMLL

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash X_i^\perp, X_i} \text{Ax} \quad \frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash A^\perp, \Gamma}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{Cut} \\
\frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash B, \Gamma}{\vdash A \otimes B, \Delta, \Gamma} \otimes \quad \frac{}{\vdash \mathbf{1}} \mathbf{1} \\
\frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \wp B, \Gamma} \wp \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \perp, \Gamma} \perp \\
\frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{mix}
\end{array}$$

FIGURE 6.2 – Calcul des séquents de MLL+MIX

§6.3.16 DÉFINITION (INTERPRÉTATIONS).

On définit une *base d'interprétation* comme une fonction Φ qui associe à chaque nom de variable X_i une conduite de support $\{0, \dots, n_i - 1\}$.

§6.3.17 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES FORMULES DE LOCMLL).

Soit Φ une base d'interprétation. On définit l'interprétation $I_\Phi(F)$ selon Φ d'une formule F inductivement :

- Si $F = X_i(j)$, alors $I_\Phi(F)$ est la délocalisation (i.e. une conduite) de $\Phi(X_i)$ suivant la bijection $x \mapsto (i, jn_i + x)$;
- Si $F = (X_i(j))^\perp$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = (I_\Phi(X_i(j)))^\perp$;
- Si $F = \mathbf{1}$ (resp. $F = \perp$), on définit $I_\Phi(F)$ comme la conduite $\mathbf{1}$ (resp. $\perp$) ;
- Si $F = A \otimes B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \otimes I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \wp B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \wp I_\Phi(B)$.

De plus, un séquent $\vdash \Gamma$ sera interprété comme le $\wp$ des formules de Γ , que l'on écrira $\wp \Gamma$.

§6.3.18 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES PREUVES DE LOCMLL).

Soit Φ une base d'interprétation. On définit l'interprétation d'une preuve (un projet multiplicatif) $I_\Phi(\pi)$ inductivement :

- si π consiste uniquement en une règle axiome introduisant $\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j')$, on définit

4. Il est nécessaire que $(\sharp A \cup \sharp \Delta) \cap (\sharp B \cup \sharp \Gamma) = \emptyset$ pour appliquer la règle $\otimes$ et que $\sharp \Delta \cap \sharp \Gamma = \emptyset$ pour appliquer les règles de coupure et de mix.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash X_1, X_1^\perp} \text{Ax} \quad \frac{}{\vdash X_1, X_1^\perp} \text{Ax} \quad \frac{}{\vdash X_2, X_2^\perp} \text{Ax} \\
\frac{\vdash X_1, X_1^\perp \quad \vdash X_2, X_2^\perp}{\vdash X_1, X_1^\perp} \text{Cut} \quad \frac{}{\vdash X_2, X_2^\perp} \text{Ax} \\
\frac{\vdash X_1^\perp, X_2^\perp, X_1 \otimes X_2}{\vdash X_1^\perp \wp X_2^\perp, X_1 \otimes X_2} \otimes \quad \frac{}{\vdash X_1^\perp \wp X_2^\perp, X_1 \otimes X_2} \wp
\end{array}$$

FIGURE 6.3 – Une preuve de MLL+MIX

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash X_1(3), X_1(97)^\perp} \text{Ax} \quad \frac{}{\vdash X_1(97), X_1(23)^\perp} \text{Ax} \\
\frac{}{\vdash X_1(3), X_1(23)^\perp} \text{Cut} \quad \frac{}{\vdash X_2(7), X_2(12)^\perp} \text{Ax} \\
\frac{}{\vdash X_1(23)^\perp, X_2(12)^\perp, X_1(3) \otimes X_2(7)} \otimes \\
\vdash X_1(23)^\perp \wp X_2(12)^\perp, X_1(3) \otimes X_2(7) \wp
\end{array}$$

FIGURE 6.4 – Une preuve de locMLL+MIX

- $I_\Phi(\pi)$ comme le projet multiplicatif $\wp$ obtenu par la bijection $(i, jn_i + x) \mapsto (i, j'n_i + x)$;
- si π consiste uniquement en une règle **1**, on définit $I_\Phi(\mathbf{1}) = (0, (\emptyset, \emptyset))$;
 - si π est obtenue à partir de π' par une règle $\wp$, alors $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi')$;
 - si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle $\otimes$, on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) \otimes I_\Phi(\pi_2)$;
 - si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle de coupure, on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) :: I_\Phi(\pi_2)$;
 - si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle mix, on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) \otimes I_\Phi(\pi_2)$;
 - si π est obtenu à partir de π' par une règle $\perp$, on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi')$.

Théorèmes d'adéquation forte

§6.3.19 PROPOSITION (ADÉQUATION FORTE LOCALISÉE).

Soit Φ une base d'interprétation. Si π est une preuve de conclusion $\vdash \Delta$, alors $I_\Phi(\pi)$ est un projet multiplicatif gagnant dans la conduite $I_\Phi(\vdash \Delta)$.

Démonstration. On montre le résultat par induction sur la dernière règle de π . Par définition, l'interprétation de la règle axiome introduisant $\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j')$ est un projet multiplicatif gagnant dans $I_\Phi(X_i(j)) \multimap I_\Phi(X_i(j'))$ qui est égale à $I_\Phi((X_i(j))^\perp \wp X_i(j'))$. Ensuite :

- si π est la règle **1**, alors $\pi = (0, 0)$ est gagnant et dans **1**;
- si la dernière règle de π est une règle $\otimes$ entre π_1 et π_2 avec π_i de conclusion $\vdash A_i, \Gamma_i$, alors $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$, qui est un projet multiplicatif gagnant dans $(A_1 \wp (\wp \Gamma_1)) \otimes (A_2 \wp (\wp \Gamma_2)) = (A_1 \otimes A_2) \wp (\wp \Gamma)$;
- si la dernière règle de π est une règle $\wp$, alors $I_\Phi(\pi) \in I_\Phi(A_1 \wp A_2 \wp (\wp \Gamma))$ par définition ;
- si π se termine par une règle $\perp$ sur π' , l'interprétation de π est la même que celle de π' , et l'interprétation de la formule $\wp \Gamma$ est égale à l'interprétation de la formule $\perp \wp (\wp \Gamma)$ puisque $\perp$ est l'unité du $\wp$;
- si π est obtenue par une coupure entre π_1 et π_2 , de conclusions respectives $\vdash A, \Gamma_1$ et $\vdash A^\perp, \Gamma_2$, alors le Théorème §9.1.21 nous assure que $I_\Phi(\pi_1) :: I_\Phi(\pi_2)$ est un projet multiplicatif gagnant dans $\wp \Gamma$;
- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 de conclusions respectives $\vdash \Gamma_1$ et $\vdash \Gamma_2$ par une règle MIX, nous savons que $I_\Phi(\pi)$ est un projet multiplicatif gagnant dans $(\wp \Gamma_1) \otimes (\wp \Gamma_2)$, qui est inclus dans la conduite $\wp \Gamma$ d'après la Proposition §6.1.19.

☺

§6.3.20 THÉORÈME (ADÉQUATION FORTE POUR MLL+MIX).

Soit Φ une base d'interprétation, π une preuve de MLL+MIX de conclusion $\vdash \Gamma$, et e une énumération des occurrences de variables dans les axiomes de π . Alors $I_\Phi(\pi^e)$ est un projet multiplicatif gagnant dans $I_\Phi(\vdash \Gamma^e)$.

Démonstration. C'est un corollaire immédiat de la Proposition §6.3.19.

☺

§6.3.21 Après avoir démontré un théorème d'adéquation, il est naturel de se demander si un théorème de complétude peut être démontré. Si nous n'avons pas de résultat de complétude, il est possible de montrer un théorème de complétude interne faible.

§6.3.22 THÉORÈME.

On suppose que la fonction de quantification des cycles m est telle que $m(1) = \infty$. Si $f \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est gagnant, alors $f = a \otimes b$ avec $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}$ des projets gagnants.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du cas particulier où $m(x) = -\log(1-x)$ [Sei12]. $\odot$

Invariance par élimination des coupures

§6.3.23 LEMME.

Si a_i ($i = 1, 2, 3$) sont des projets multiplicatifs, alors :

$$(a_1 \otimes a_2) :: a_3 = (a_1 :: a_3) :: a_2$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la propriété cyclique. En effet, on a :

$$\begin{aligned} (a_1 \otimes a_2) :: a_3 &= (a_1 :: a_2) :: a_3 \\ &= (a_3 :: a_1) :: a_2 \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que la coupure est symétrique. $\odot$

§6.3.24 COROLLAIRE.

Si a_i ($i = 1, 2, 3$) sont des projets multiplicatifs, avec a_1 et a_2 de supports disjoints et a_1 et a_3 également de supports disjoints, on a :

$$(a_1 \otimes a_2) :: a_3 = a_1 \otimes (a_2 :: a_3)$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, on a :

$$(a_1 \otimes a_2) :: a_3 = a_1 :: (a_2 :: a_3)$$

Puisque a_1 et a_3 sont de supports disjoints, les supports de a_1 et $a_2 :: a_3$ sont disjoints (a_1 et a_2 sont de support disjoint puisque leur tenseur est défini). Donc, on obtient que $a_1 :: (a_2 :: a_3) = a_1 \otimes (a_2 :: a_3)$. $\odot$

§6.3.25 THÉORÈME (INVARIANCE PAR ÉLIMINATION DES COUPURES).

Soit Φ une base d'interprétation. Si π est une preuve de locMLL et π' est la preuve sans coupure obtenue en éliminant les coupures⁵ de π , alors $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi')$.

Démonstration. On montre que l'interprétation est invariante pour les différents pas de l'élimination :

- si π est une coupure entre deux axiomes introduisant les séquents $\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j')$ et $\vdash (X_i(j'))^\perp, X_i(j'')$ alors $I_\Phi(\pi) = \mathfrak{F}a_{\mathfrak{F}_1} :: \mathfrak{F}a_{\mathfrak{F}_2}$ où $\mathfrak{F}a_{\mathfrak{F}_1}$ et $\mathfrak{F}a_{\mathfrak{F}_2}$ sont donnés par la Définition §6.3.18 ; on vérifie aisément que la réduction de deux faxes est un fax : dans ce cas, c'est le fax obtenu à partir de la bijection $(i, jn_i + x) \mapsto (i, j''n_i + x)$ pour $0 \leq x \leq n_i - 1$, i.e. l'interprétation de la règle axiome introduisant $\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j'')$, résultat de l'élimination des coupures appliquée à π :

$$\frac{}{\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j'')} \text{Ax } (j \neq j'')$$

- si π est une coupure entre deux preuves, la première obtenue comme le tenseur de preuves π_1 et π_2 , et la seconde obtenue à partir d'une règle $\mathfrak{F}$ sur π_3 :

$$\frac{\frac{\vdash \Delta_1, A \quad \vdash \Delta_2, B}{\vdash \Delta_1, \Delta_2, A \otimes B} \otimes \quad \frac{\vdash \Delta_3, A^\perp, B^\perp}{\vdash \Delta_3, A^\perp \mathfrak{F} B^\perp} \mathfrak{F}}{\vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \text{cut}$$

5. L'élimination des coupures est la procédure habituelle, et le fait que l'on soit localisé ne change rien. Voir Chapitre 2 pour la définition de la procédure.

On a, en écrivant $\alpha_i = I_\Phi(\pi_i)$ ($i = 1, 2, 3$), $I_\Phi(\pi) = (\alpha_1 \otimes \alpha_2) :: \alpha_3$, qui est égal à $(\alpha_3 :: \alpha_2) :: \alpha_1$ (par le lemme §6.3.23) qui se trouve être l'interprétation de la preuve :

$$\frac{\frac{\frac{\vdots^{\pi_1}}{\vdots}}{\vdash \Delta_1, A} \quad \frac{\frac{\vdots^{\pi_3}}{\vdots}}{\vdash \Delta_3, A^\perp, B^\perp}}{\vdash \Delta_1, \Delta_3, B^\perp} \text{ cut} \quad \frac{\frac{\vdots^{\pi_2}}{\vdots}}{\vdash \Delta_2, B}}{\vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2} \text{ cut}$$

– les règles de commutations sont claires d'après le Corollaire §6.3.24.

Ce sont les seuls cas puisque nous considérons un calcul des séquents avec uniquement des axiomes atomiques. ☺

CHAPITRE 7

FRAGMENT MULTIPLICATIF-ADDITIF

Table des matières

7.1 Géométrie de l'interaction	132
7.1.1 Connecteurs	132
7.1.2 Comportements	135
7.2 Sémantique dénotationnelle	141
7.2.1 Catégorie *-autonome	141
7.2.2 Produits et Coproduits	142
7.2.3 Équivalence Observationnelle	143
7.3 Vérité et Adéquation	145
7.3.1 Vérité	145
7.3.2 Calcul des séquents	146
7.3.3 Adéquation forte	147

- §7.1 Dans ce chapitre comme dans le précédent, nous considérerons — sauf indication contraire — que nous avons choisi une catégorie de graphes quelconque, pondérés dans un ensemble Ω , dans laquelle nous avons défini une notion d'exécution $::$ et, pour tout couple de graphes (F, G) , un ensemble de cycles alternés $\text{Cy}(F, G)$ tels que, pour tous graphes F, G, H avec $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$ on ait une bijection préservant les poids :

$$\text{Cy}(F, G :: H) \uplus \text{Cy}(G, H) \cong \text{Cy}(H, F :: G) \uplus \text{Cy}(F, G)$$

Nous considérerons également que nous avons choisi une fonction quelconque $m : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ et considérerons la mesure associée $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_m$ que nous noterons $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ afin de simplifier les notations.

- §7.2 Ce chapitre est consacré à la construction des additifs. La construction des additifs repose sur l'introduction des tranches, et les constructions qui suivent utiliseront donc les adjonctions des graphes tranchés ou des graphes épais et tranchés. On travaillera donc dans l'un des cadres **Ad1.-T.**, **Ad1.-ET.**, **Ad2.-T.**, **Ad2.-ET.**, **Ad3.-T.**, **Ad3.-ET.**, **Ad4.-T.**, et **Ad4.-ET.** définis au Chapitre 5. Ces constructions s'appliquent également aux cadres des graphages **G.-E.** et **G.-ET.** présentés dans le Chapitre 8.
- §7.3 La construction des additifs présentée ici est inspirée de la construction des additifs en GdI5 [Gir11a]. Cependant, on a choisi d'adopter les modifications proposées dans la *syntaxe transcendante*, qui permettent d'améliorer celle-ci. En particulier, là où la GdI5 traitait de comportements négatifs et positifs, la modification que nous avons adoptée permet de n'avoir qu'une seule morphologie : les comportements. On remarquera que les résultats de cette section reposent principalement sur la propriété cyclique.

7.1 Géométrie de l'interaction

- §7.1.1 Cette section est une simple adaptation des constructions du chapitre précédent. On définit les *projets additifs*, qui consistent maintenant en un graphe tranché associé à un nombre réel. Comme c'était déjà le cas dans le chapitre précédent, ce nombre réel, la mise, est introduite afin de compenser l'apparition du terme supplémentaire $\mathbf{1}_H \llbracket F, G \rrbracket$ de l'adjonction. Cependant, comme $\mathbf{1}_H$ n'est pas nécessairement un nombre positif, la mise pourra également être négative.

Connecteurs

- §7.1.2 DÉFINITION (PROJETS).
Un *projet additif* est un couple $\alpha = (a, A)$, où $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ est appelé la *mise*, et A est un graphe tranché sur un ensemble fini de sommets V^A . L'ensemble V^A sera appelé le *support* de α .
- §7.1.3 REMARQUE. Il est nécessaire de préciser la convention que nous utiliserons par la suite concernant ∞ . Nous considérerons toujours ∞ comme prépondérant, à la fois dans les sommes et les produits. Cela signifie que pour tout $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, on a $a + \infty = \infty = a \times \infty$. En particulier, $0 \times \infty = \infty$, ce qui permet de conserver la distributivité de la multiplication sur l'addition¹.
- §7.1.4 DÉFINITION (ORTHOGONALITÉ).
Deux projets additifs α, β de même support sont *orthogonaux*, noté $\alpha \perp \beta$, si $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket \neq 0, \infty$.
Si A est un ensemble de projets additifs, l'orthogonal $A^\perp$ de A est défini comme l'ensemble $\{\beta \mid \forall \alpha \in A, \alpha \perp \beta\}$.
- §7.1.5 DÉFINITION (CONDUITES).
Une *conduite* est un ensemble $\mathbf{A}$ de projets additifs égal à son bi-orthogonal, associé à un ensemble V^A tel que $\alpha \in \mathbf{A} \Rightarrow \text{supp}(\alpha) = V^A$. L'ensemble V^A sera appelé le *support* de la conduite, et noté $\text{supp}(\mathbf{A})$.

1. Si $0 \times \infty = 0$, alors la distributivité donne $\infty = \infty \times 1 + \infty \times (-1) = \infty \times (1 - 1) = \infty \times 0 = 0$.

§7.1.6 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}$ une conduite, et $a = (\infty, A) \in \mathbf{A}$ un projet additif avec une mise infinie. Alors $\mathbf{A}^\perp = \emptyset$. On notera $\mathbf{0}_{V^A} = \mathbf{A}^\perp$ la conduite vide de support V^A et par $\mathbf{T}_{V^A} = \mathbf{A}$ la conduite contenant tous les projets additifs de support V^A .

Démonstration. Soit $b = (b, B)$ un projet additif de support V^A . Alors,

$$\ll a, b \gg = \mathbf{1}_B \infty + \mathbf{1}_A b + \ll A, B \gg = \infty$$

Donc $b \notin \mathbf{A}^\perp$. On en déduit que $\mathbf{A}^\perp = \mathbf{0}_{V^A}$. $\odot$

§7.1.7 REMARQUE. Puisqu'il n'existe qu'une seule conduite (à support fixé) contenant des projets additifs ayant une mise infinie, pourquoi les introduire? En réalité, l'introduction des mises infinies nous assure que l'application $f :: a$ est toujours définie. Cela nous permet donc d'avoir l'égalité entre les conduites $\mathbf{0}_V \multimap \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp \multimap \mathbf{T}_V$, une égalité qui serait fausse si l'application n'était que partiellement définie. En effet, par définition de l'implication linéaire, la conduite $\mathbf{0}_V \multimap \mathbf{A}$ serait alors égale à $\mathbf{T}_{V \cup V^A}$, tandis que la conduite $\mathbf{A}^\perp \multimap \mathbf{T}_V$ contiendrait uniquement les projets additifs f vérifiant $\text{supp}(f) = V \cup V^A$ tels que $f :: a$ soit défini pour tout $a \in \mathbf{A}^\perp$.

§7.1.8 DÉFINITION (TENSEUR DE CONDUITES).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites de supports disjoints. On définit la conduite $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ par :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \{a \otimes b \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}^{\perp\perp}$$

On notera $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ l'ensemble $\{a \otimes b \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$.

§7.1.9 PROPOSITION (PROPRIÉTÉS DU TENSEUR).

Le tenseur est commutatif et associatif. Il admet de plus un élément neutre, la conduite $\mathbf{1}_\emptyset = \{(0, (\emptyset, \emptyset))\}^{\perp\perp}$, où $(\emptyset, \emptyset)$ est le graphe vide considéré comme un graphe tranché (à une tranche).

§7.1.10 Dans la suite on utilisera les conduites $\mathbf{1}_V$, où V est un ensemble quelconque. Celles-ci sont définies par $\mathbf{1}_V = \{o_V\}^{\perp\perp}$: ce sont les conduites engendrées par le projet $o_V = (0, (V, \emptyset))$ sans mise, de support V et dont le graphe est vide. Ceci explique la notation $\mathbf{1}_\emptyset$ pour l'unité du tenseur. Les projets o_V et les conduites $\mathbf{1}_V$, qui sont de purs produits de la localité, nous seront utiles dans la définition des connecteurs additifs.

§7.1.11 PROPOSITION.

Soit E (respectivement F) un ensemble non vide de projets additifs de mêmes supports V (respectivement W) avec $V \cap W = \emptyset$. Alors :

$$(E \odot F)^{\perp\perp} = (E^{\perp\perp} \odot F^{\perp\perp})^{\perp\perp}$$

Démonstration. Il est clair que $E \subset E^{\perp\perp}$ et $F \subset F^{\perp\perp}$, et donc $E \odot F \subset E^{\perp\perp} \odot F^{\perp\perp}$. Ce qui nous donne une première inclusion $(E \odot F) \subset (E^{\perp\perp} \odot F^{\perp\perp})^{\perp\perp}$.

Pour l'inclusion inverse, on montre que $(E \odot F)^{\perp} \subset (E^{\perp\perp} \odot F^{\perp\perp})^{\perp}$. Soit a un projet additif dans $(E \odot F)^{\perp}$. Alors, pour tous $e \in E$ et $f \in F$ on a $\ll a, e \otimes f \gg \neq 0, \infty$. Par l'adjonction, cela signifie que $\ll a :: e, f \gg \neq 0, \infty$, i.e. $a :: e \in F^{\perp}$. Donc $\ll a :: e, f' \gg \neq 0, \infty$ pour tous $e \in E$ et $f' \in F^{\perp\perp}$. Puisque $\ll a :: e, f' \gg = \ll a :: f', e \gg$, on déduit que $a :: f' \in E^{\perp}$, ce qui signifie que $a :: f' \perp e'$ pour tous $f' \in F^{\perp\perp}$ et $e' \in E^{\perp\perp}$. Afin de conclure, il suffit de remarquer que ceci est équivalent au fait que pour tous $e' \in E^{\perp\perp}$ et $f' \in F^{\perp\perp}$, $\ll a, e' \otimes f' \gg \neq 0, \infty$. Cela implique que $a \in (E^{\perp\perp} \odot F^{\perp\perp})^{\perp}$, ce qui nous donne la seconde inclusion. $\odot$

§7.1.12 DÉFINITION (IMPLICATION LINÉAIRE).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites de supports respectifs V^A et V^B avec $V^A \cap V^B = \emptyset$.

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = \{f \mid \text{supp}(f) = V^A \cup V^B \wedge \forall a \in \mathbf{A}, f :: a \in \mathbf{B}\}$$

§7.1.13 PROPOSITION (DUALITÉ).

On a :

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^{\perp})^{\perp}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'adjonction. En effet, avec $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, $a \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{B}^\perp$, on a $\ll f, a \otimes b \gg \neq 0, \infty$ si et seulement si $\ll f, a \gg \neq 0, \infty$. Par conséquent, $f \perp a \otimes b$ si et seulement si $f \perp a$ est orthogonal à b . Cela implique que $f \in (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^\perp = \{a \otimes b \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}^\perp$ si et seulement si $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$. Or, pour tout ensemble de projets additifs C on a $C^{\perp\perp\perp} = C^\perp$, et donc $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$. $\odot$

§7.1.14 PROPOSITION.

Soit E un ensemble non vide de projets additifs de même supports V^E , $\mathbf{B}$ une conduite non vide, et f un projet additif tel que $f \perp c \in \mathbf{B}$ pour tout $c \in E$. Alors $f \in E^{\perp\perp} \multimap \mathbf{B}$

Démonstration. On a $E^{\perp\perp} \multimap \mathbf{B} = (E^{\perp\perp} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$ par la proposition précédente. De plus, par la proposition §7.1.11 :

$$\begin{aligned} (E^{\perp\perp} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp &= ((E^{\perp\perp} \odot (\mathbf{B}^\perp)^{\perp\perp})^{\perp\perp})^\perp \\ &= ((E \odot \mathbf{B}^\perp)^{\perp\perp})^\perp \\ &= (E \odot \mathbf{B}^\perp)^\perp \end{aligned}$$

Un projet additif f tel que pour tout $c \in E$, $f \perp c \in \mathbf{B}$ est évidemment dans $(E \odot \mathbf{B}^\perp)^\perp$, et donc dans $E^{\perp\perp} \multimap \mathbf{B}$. $\odot$

§7.1.15 DÉFINITION.

On étend aux projets additifs les opérations de somme et de produit par un scalaire (ces opérations sont définies sur les graphes tranchés) :

$$a + \lambda b = (a + \lambda b, A + \lambda B)$$

§7.1.16 PROPOSITION.

Soit a, b des projets additifs, et $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Alors, pour tout projet additif c , on a :

$$\ll a + \lambda b, c \gg = \ll a, c \gg + \lambda \ll b, c \gg$$

Démonstration. Comme conséquence directe de la définition des graphes tranchés, on a $\ll A + \lambda B, C \gg = \ll A, C \gg + \lambda \ll B, C \gg$. De plus, $\mathbf{1}_{A+\lambda B} = \mathbf{1}_A + \lambda \mathbf{1}_B$. On a alors

$$\begin{aligned} \ll a + \lambda b, c \gg &= (a + \lambda b) \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_{A+\lambda B} c + \ll A + \lambda B, C \gg \\ &= a \mathbf{1}_C + \lambda b \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_A c + \lambda \mathbf{1}_B c + \ll A, C \gg + \lambda \ll B, C \gg \\ &= (a \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_A c + \ll A, C \gg) + \lambda (b \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B c + \ll B, C \gg) \\ &= \ll a, c \gg + \lambda \ll b, c \gg \end{aligned}$$

On a donc obtenu le résultat voulu. $\odot$

§7.1.17 LEMME (HOMOTHÉTIE).

Soit $a = (a, A)$ un projet additif dans une conduite $\mathbf{A}$, et soit $\lambda \neq 0$ un réel. Alors λa est un projet additif dans $\mathbf{A}$.

Démonstration. Si $a = (a, A)$ est dans $\mathbf{A}$, alors pour tout $b \in \mathbf{A}^\perp$, $\ll a, b \gg \neq 0$. Mais $\ll \lambda a, b \gg = \lambda \ll a, b \gg$, donc $\ll \lambda a, b \gg \neq 0$ puisque $\lambda \neq 0$. Finalement, $\lambda a \in \mathbf{A}$ puisqu'il est orthogonal à tous les $b \in \mathbf{A}^\perp$. $\odot$

§7.1.18 DÉFINITION.

Soit $a = (a, A)$ un projet additif de support V^A , et V un ensemble fini tel que $V \cap V^A = \emptyset$. On notera $a_{\uparrow V}$ le projet additif $a \otimes \mathbf{0}_V$. Lorsque $\mathbf{B}$ est une conduite, on notera $a_{\uparrow B}$ le projet $a_{\uparrow V^B}$ afin de simplifier les notations.

Si $\mathbf{A}$ est une conduite de support V^A , alors $\mathbf{A}_{\uparrow V}$ représentera l'ensemble $\{a_{\uparrow V} \mid a \in \mathbf{A}\}$.

§7.1.19 DÉFINITION.

Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des conduites non vides de supports disjoints. On définit :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{a_{\uparrow B} + b_{\uparrow A} \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$$

Les deux propositions suivantes sont des conséquences de la Proposition §7.1.11.

§7.1.20 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}$ une conduite. Alors $(\mathbf{A}_{\uparrow V})^{\perp\perp} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_V$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition §7.1.11 avec $E = \mathbf{A}$ et $F = \{\circ_V\}$. $\odot$

§7.1.21 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}$ une conduite de support W , et $\mathfrak{f}$ un projet additif de support V tel que $\mathfrak{f}::\circ_V \in \mathbf{A}$. Alors $\mathfrak{f} \in \mathbf{1}_V \multimap \mathbf{A}$.

Démonstration. Pour tout $a' \in \mathbf{A}^\perp$, on a $\ll \mathfrak{f}, a' \otimes \circ_V \gg \neq 0, \infty$. Donc $\mathfrak{f} \in (\mathbf{A}^\perp \odot \{\circ_V\})^\perp$. En utilisant la Proposition §7.1.11, cela implique que $\mathfrak{f} \in (\mathbf{A}^\perp \otimes \mathbf{1}_V)^\perp$, et donc que $\mathfrak{f} \in \mathbf{1}_V \multimap \mathbf{A}$. $\odot$

§7.1.22 Soit $\mathbf{A}$ une conduite de support V^A et soit V un ensemble fini tel que $V \cap V^A = \emptyset$. On veut définir à partir de la conduite $\mathbf{A}$ une conduite de support $V^A \cup V$. Ceci peut être fait de deux manières différentes : on peut considérer la conduite $(\mathbf{A}_{\uparrow V})^{\perp\perp}$ ou bien considérer $((\mathbf{A}^\perp)_{\uparrow V})^\perp$. Ces deux définitions différentes sont au coeur de la définition des additifs.

§7.1.23 DÉFINITION (CONNECTEUR ADDITIFS).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites de supports disjoints. On définit les conduites $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ et $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} &= ((\mathbf{A}_{\uparrow B})^{\perp\perp} \cup (\mathbf{B}_{\uparrow A})^{\perp\perp})^{\perp\perp} \\ \mathbf{A} \& \mathbf{B} &= ((\mathbf{A}^\perp)_{\uparrow B})^\perp \cap ((\mathbf{B}^\perp)_{\uparrow A})^\perp \end{aligned}$$

§7.1.24 PROPOSITION.

$$(\mathbf{A} \& \mathbf{B})^\perp = \mathbf{A}^\perp \oplus \mathbf{B}^\perp$$

§7.1.25 Cependant, cette construction nous laisse un peu les mains vides : comment construire un projet additif de $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ à partir de deux projets additifs a, b dans $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ respectivement ? On aurait besoin d'une construction du connecteur $\&$ au niveau des projets additifs. Afin d'y parvenir, il est nécessaire de restreindre la classe des conduites que l'on considère, et de travailler avec les *comportements*.

Comportements

§7.1.26 DÉFINITION.

Un *comportement* $\mathbf{A}$ de support V est une conduite $\mathbf{A}$ de support V telle que :

1. si $a = (a, A) \in \mathbf{A}$, alors $\forall \lambda \in \mathbf{R}, a + \lambda \circ_V \in \mathbf{A}$;
2. si $a = (a, A) \in \mathbf{A}^\perp$, alors $\forall \lambda \in \mathbf{R}, a + \lambda \circ_V \in \mathbf{A}^\perp$.

§7.1.27 REMARQUE. L'orthogonal d'un comportement est un comportement.

§7.1.28 PROPOSITION.

Si A est un ensemble non vide de projets additifs de support V tel que $a \in \mathbf{A} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbf{R}, a + \lambda \circ_V \in \mathbf{A}$, alors tout projet additif dans $\mathbf{A}^\perp$ a une mise nulle.

Démonstration. On choisit un projet additif $a = (a, A) \in \mathbf{A}$, ce qui est possible puisque $\mathbf{A}$ est supposé non vide. Alors pour tout $b = (b, B) \in \mathbf{A}^\perp$, $\ll a, b \gg \neq 0$. Or $a + \lambda \circ_V \in \mathbf{A}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Donc $\ll a + \lambda \circ_V, b \gg = \ll a, b \gg + b \lambda$ doit être non nul, et par conséquent b doit être égal à 0. $\odot$

§7.1.29 PROPOSITION.

Si A est un ensemble non vide de projets additifs de même support tel que $(a, A) \in A$ implique $a = 0$, alors $b \in \mathbf{A}^\perp$ implique $b + \lambda \circ_V \in \mathbf{A}^\perp$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

Démonstration. On choisit un projet additif $a = (a, A) \in A$. Pour tout projet additif b , on a, par la Proposition §7.1.16, $\ll a, b + \lambda \circ_V \gg = \ll a, b \gg + \lambda a$. Puisque $a = 0$, on obtient $\ll a, b + \lambda \circ_V \gg = \ll a, b \gg$. Donc, si $b \in \mathbf{A}^\perp$, alors $b + \lambda \circ_V \in \mathbf{A}^\perp$. $\odot$

§7.1.30 COROLLAIRE.

Si $\mathbf{A}$ est une conduite de support V telle que :

1. si $a \in \mathbf{A}$, alors $\forall \lambda \in \mathbf{R}, a + \lambda o_V \in \mathbf{A}$;
2. si $a = (a, A) \in \mathbf{A}$, alors $a = 0$;
3. $\mathbf{A}$ est non vide.

Alors $\mathbf{A}$ est un comportement, et $\mathbf{A}^\perp$ satisfait à toutes les conditions ci-dessus. Un tel comportement sera qualifié de propre.

Démonstration. Par la proposition précédente et les deux dernières conditions, on sait que $\mathbf{A}^\perp$ vérifie $b \in \mathbf{A}^\perp \Rightarrow b + \lambda o \in \mathbf{A}^\perp$. Donc $\mathbf{A}$ est un comportement. De plus, $\mathbf{A}^\perp$ est non vide : si $\mathbf{A}^\perp$ était vide, tout projet additif a de même support que $\mathbf{A}$ serait dans l'orthogonal de $\mathbf{A}^\perp$, et par conséquent $\mathbf{A}$ ne serait pas une conduite, puisqu'il ne contient que des projets additifs ayant une mise nulle. Finalement, comme tout projet additif de $\mathbf{A}^\perp$ a une mise nulle par la proposition §7.1.28, $\mathbf{A}^\perp$ vérifie les trois conditions énoncées. ☺

§7.1.31 PROPOSITION.

Un comportement est soit propre, soit égal à $\mathbf{0}_V = \emptyset$, soit égal à $\mathbf{T}_V = \mathbf{0}_V^\perp$.

Démonstration. Soit $\mathbf{A}$ un comportement. S'il est vide, alors $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{A}^\perp$ est vide, alors $\mathbf{A} = \mathbf{T}$. Dans les autres cas, puisque $\mathbf{A}^\perp$ est non vide, $\mathbf{A}$ ne contient que des projets additifs ayant une mise nulle par la proposition §7.1.28. Donc $\mathbf{A}$ est propre puisqu'il satisfait aux conditions voulues. ☺

§7.1.32 PROPOSITION.

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des comportements, alors $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est un comportement.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux comportements propres. Soit $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}^\perp$ des projets additifs. Alors, en utilisant l'adjonction, nous avons : $f \perp a \otimes b$ si et seulement si $f :: a \perp b$. Puisque $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}^\perp$ est non vide et ne contient que des projets additifs sans mises, $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ implique $f + \lambda o \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $f :: a + \lambda o \in \mathbf{B}$, donc $f \mathbf{1}_A + f \lambda + \llbracket F, A \rrbracket = 0$. Ce qui signifie que $f = 0$. Donc $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ ne contient que des projets additifs sans mises. Finalement, soit $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est vide, et donc égal à $\mathbf{0}$, soit il est non vide et satisfait les conditions définissant les comportements propres.

Maintenant, si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{B} = \mathbf{T}$, il est clair que $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = \mathbf{T}$.

Le dernier cas à traiter : si $\mathbf{A} = \mathbf{T}$ et $\mathbf{B}$ est propre, ou bien si $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ alors que $\mathbf{A}$ est propre. Alors par définition de l'implication linéaire, on obtient $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = \mathbf{0}$ dans le second cas. Pour montrer que $\mathbf{T} \multimap \mathbf{A} = \mathbf{0}$ lorsque $\mathbf{A}$ est propre, remarquons que f est de support $V \cup V^A$, et qu'en appliquant f à un projet additif ayant une mise infinie on obtient un projet additif de mise infinie. Par conséquent, si $\mathbf{T} \multimap \mathbf{A}$ était non vide, $\mathbf{A}$ contiendrait un projet additif ayant une mise infinie, i.e. $\mathbf{A}$ ne serait pas propre. ☺

§7.1.33 COROLLAIRE.

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des comportements, alors $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est un comportement.

Démonstration. On prouve ceci en utilisant la dualité $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}^\perp)^\perp$ des connecteurs multiplicatifs. Puisque $\mathbf{A}, \mathbf{B}^\perp$ sont des comportements, $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}^\perp$ est un comportement. Par conséquent, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est l'orthogonal d'un comportement, donc un comportement. ☺

§7.1.34 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements. Alors $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ et $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ sont des comportements.

Démonstration. Soit $\mathbf{A}$ un comportement propre et soit V^B tel que $V^B \cap V^A = \emptyset$. Alors, si $a \otimes o \in \mathbf{A} \upharpoonright_B$, on a $a \otimes o + \lambda o \in \mathbf{A} \upharpoonright_B$ puisque $(a + \lambda o) \otimes o = a \otimes o + \lambda o$. De plus, $\mathbf{A}$ ne contient que des projets additifs sans mises, donc $\mathbf{A} \upharpoonright_B$ contient uniquement des projets additifs sans mises. Puisque $\mathbf{A} \upharpoonright_B$ est clos par extension, non vide, et ne contient que des projets additifs sans mises, il génère un comportement (propre) $(\mathbf{A} \upharpoonright_B)^{\perp\perp}$.

Si $\mathbf{A} = \mathbf{T}_{VA}$, on a $\mathbf{T}_{VA}^\perp = \mathbf{0}_{VA}$, donc $((\mathbf{T}_{VA}^\perp)^\dagger_B)^\perp = \mathbf{T}_{VA \cup VB}$. Par conséquent, $((\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B)^\perp$ est un comportement.

Si $\mathbf{A} = \mathbf{0}_{VA}$, alors $\mathbf{A}^\perp = \mathbf{T}_{VA}$, donc $((\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B)^\perp = \{a \otimes o_{VB} \mid a \in \mathbf{T}_{VA}\}^\perp = (\mathbf{T}_{VA} \otimes \mathbf{1}_{VB})^\perp = \mathbf{T} \multimap \perp_{VB}$. Or, étant donné qu'il existe des projets additifs de mise infinie dans $\mathbf{T}$, tout $f \in \mathbf{T} \multimap \perp_{VB}$ appliqué à un tel projet additif aurait pour résultat un projet additif avec une mise infinie. Donc $\perp_{VB}$ devrait contenir un projet additif avec une mise infinie. Mais ceci n'est pas possible, car $\perp_{VB} \neq \mathbf{T}_{VB}$. Finalement, $\mathbf{T} \multimap \perp_{VB}$ est nécessairement vide, i.e. $((\mathbf{0}_{VA}^\perp)^\dagger_B)^\perp = \mathbf{0}_{VA \cup VB}$ est un comportement.

Ceci implique que si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des comportements, la conduite $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ est un comportement, en tant qu'intersection de $((\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B)^\perp$ et $((\mathbf{B}^\perp)^\dagger_A)^\perp$ qui sont des comportements.

Puisque l'orthogonal d'un comportement est un comportement, si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des comportements alors $\mathbf{A}^\perp, \mathbf{B}^\perp$ sont des comportements. Donc $\mathbf{A}^\perp \& \mathbf{B}^\perp$ est un comportement, et finalement $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = (\mathbf{A}^\perp \& \mathbf{B}^\perp)^\perp$ est un comportement. ☺

§7.1.35 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements. Alors $(\{a \otimes o \uparrow_B \mid a \in \mathbf{A}\} \cup \{o \uparrow_A \otimes b \mid b \in \mathbf{B}\})^{\perp\perp} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$.

Démonstration. Pour tous ensembles A, B avec $\mathbf{A} = A^{\perp\perp}$ et $\mathbf{B} = B^{\perp\perp}$:

$$\begin{aligned} (A \cup B)^\perp &= A^\perp \cap B^\perp \\ (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^{\perp\perp} &= (\mathbf{A}^\perp \cup \mathbf{B}^\perp)^\perp \end{aligned}$$

En effet, la première égalité — valable pour tous ensembles A, B — vient du fait que $a \in (A \cup B)^\perp$ si et seulement si $a \in A^\perp$ et $a \in B^\perp$ si et seulement si $a \in A^\perp \cap B^\perp$. La seconde — valable uniquement lorsque $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des conduites — vient du fait que $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^{\perp\perp} = (\mathbf{A}^{\perp\perp} \cap \mathbf{B}^{\perp\perp})^{\perp\perp} = (\mathbf{A}^\perp \cup \mathbf{B}^\perp)^{\perp\perp} = (\mathbf{A}^\perp \cup \mathbf{B}^\perp)^\perp$.

On a alors — en notant $\mathbf{A}_{\neg VB}$ (resp. $\mathbf{B}_{\neg VA}$) l'ensemble $\{a \otimes o \uparrow_B \mid a \in \mathbf{A}\}$ (resp. l'ensemble $\{o \uparrow_A \otimes b \mid b \in \mathbf{B}\}$) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \uparrow_B \cup \mathbf{B} \uparrow_A)^{\perp\perp} &= ((\mathbf{A} \uparrow_B)^\perp \cap (\mathbf{B} \uparrow_A)^\perp)^\perp \\ &= ((\mathbf{A} \uparrow_B)^\perp \cap (\mathbf{B} \uparrow_A)^\perp)^{\perp\perp\perp} \\ &= ((\mathbf{A} \uparrow_B)^{\perp\perp} \cup (\mathbf{B} \uparrow_A)^{\perp\perp})^{\perp\perp} \end{aligned}$$

On en déduit que $\{a \uparrow_B \mid a \in \mathbf{A}\} \cup \{b \uparrow_A \mid b \in \mathbf{B}\}$ engendre bien $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$. ☺

§7.1.36 LEMME.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements non vides. Alors $\mathbf{A} + \mathbf{B} \subset \mathbf{A} \& \mathbf{B}$.

Démonstration. Soit $f = a \otimes o_{VB} + b \otimes o_{VA} \in \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Étant donné que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \& \mathbf{B} &= (\mathbf{A}^\perp \oplus \mathbf{B}^\perp)^\perp \\ &= (\{a \uparrow_B \mid a \in \mathbf{A}\} \cup \{b \uparrow_A \mid b \in \mathbf{B}\})^\perp \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que pour tout $c \in (\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B \cup (\mathbf{B}^\perp)^\dagger_A$ on a $f \perp c$. On suppose, sans perte de généralité, que $c \in (\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B$, donc $c = a' \otimes o_{VB}$ pour $a' \in \mathbf{A}^\perp$. On remarque que

$$\langle\langle b \otimes o_{VA}, a' \otimes o_{VB} \rangle\rangle = 0$$

car les mises de b et a' sont égales à 0. On a donc :

$$\begin{aligned} \langle\langle f, c \rangle\rangle &= \langle\langle a \otimes o_{VB} + b \otimes o_{VA}, a' \otimes o_{VB} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle a \otimes o_{VB}, a' \otimes o_{VB} \rangle\rangle + \langle\langle b \otimes o_{VA}, a' \otimes o_{VB} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle a, a' \rangle\rangle \end{aligned}$$

Et donc finalement $f \perp c$. ☺

§7.1.37 Cependant, comme dans² la GdI5 (versions 5.1 et 5.2), l'ensemble $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ n'engendre pas $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$. Nous verrons plus tard qu'il n'existe pas de projet dans $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ qui ne soit équivalent (voir Définition §7.1.42) à un élément de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

§7.1.38 PROPOSITION.

On suppose que la fonction $m : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ (voir §7.1) prend une valeur $\mu \neq 0, \infty$. Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des comportements propres, alors $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp\perp} \subsetneq \mathbf{A} \& \mathbf{B}$.

Démonstration. Soit $a' \in \mathbf{A}^\perp$, et o_u le projet $(0, U)$ où U est le graphe à une tranche avec une arête de source un sommet $s_a \in V^A$ et de but un sommet $s_b \in V^B$. Alors pour tout élément c de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, on a $\langle\langle c, o_u \rangle\rangle = 0$ et donc $\langle\langle c, a' \otimes o_{V^B} + o_u \rangle\rangle = \langle\langle c, a' \otimes o_{V^B} \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Donc $\vartheta = a' \otimes o_{V^B} + o_u \in (\mathbf{A} + \mathbf{B})^\perp$.

On montre maintenant que pour tout v , tout $0 < \lambda < 1$ et a, b dans respectivement $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, le projet $t_v = a + b + v o_{\lambda U^*}$ est dans $(\mathbf{A}^\perp \oplus \mathbf{B}^\perp)^\perp$ — où U^* est le graphe à une tranche et une arête ayant pour source s_b et pour but s_a . En effet, pour tout $a'' \otimes o \in (\mathbf{A}^\perp)^\uparrow_B$ (resp. $b'' \otimes o \in (\mathbf{B}^\perp)^\uparrow_A$), on a :

$$\begin{aligned} \langle\langle a'' \otimes o, t_v \rangle\rangle &= \langle\langle a'' \otimes o, a \rangle\rangle + \langle\langle a'' \otimes o, b \rangle\rangle + v \langle\langle a'' \otimes o, o_{\lambda U^*} \rangle\rangle = \langle\langle a'', a \rangle\rangle \\ \langle\langle b'' \otimes o, t_v \rangle\rangle &= \langle\langle b'' \otimes o, a \rangle\rangle + \langle\langle b'' \otimes o, b \rangle\rangle + v \langle\langle b'' \otimes o, o_{\lambda U^*} \rangle\rangle = \langle\langle b'', b \rangle\rangle \end{aligned}$$

Donc $a'' \otimes o \perp t_v$ (resp. $b'' \otimes o \perp t_v$). Par conséquent, $t_v \in (\mathbf{A}^\perp \oplus \mathbf{B}^\perp)^\perp$ (Proposition §7.1.35), c'est-à-dire $t_v \in \mathbf{A} \& \mathbf{B}$.

Or $\langle\langle t_v, a' \otimes o_{V^B} + o_u \rangle\rangle = \langle\langle a', a \rangle\rangle + v m(\lambda)$. Quitte à changer la valeur de λ , on peut supposer que $m(\lambda) = \mu \neq 0, \infty$. Comme $\langle\langle a', a \rangle\rangle$ et $m(\lambda)$ sont tous deux différents de 0 et ∞ , on peut définir $v = (-\langle\langle a', a \rangle\rangle)/\mu$. Alors $\langle\langle t_v, \vartheta \rangle\rangle = 0$, c'est-à-dire $t_v \notin (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp\perp} = \mathbf{A} \& \mathbf{B}$. Finalement, on a montré que l'inclusion $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp\perp} \subset \mathbf{A} \& \mathbf{B}$ — qui est conséquence de la Proposition §7.1.36 — est stricte. ☺

§7.1.39 Nous souhaitons maintenant montrer la propriété de distributivité, c'est-à-dire qu'il existe un projet $\mathfrak{Distr}$ dans les comportements

$$((\phi(\mathbf{A}) \multimap \theta(\mathbf{B})) \& (\psi(\mathbf{A}) \multimap \rho(\mathbf{C}))) \multimap (\mathbf{A} \multimap (\mathbf{B} \& \mathbf{C}))$$

où ϕ, θ, ψ, ρ sont des délocalisations disjointes et $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sont des comportements disjointes.

§7.1.40 Le projet implémentant la distributivité consiste essentiellement en deux $\mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ superposant les contextes. Il est nécessaire d'effectuer les deux délocalisations dans deux tranches distinctes afin d'éviter les interférences avec les éventuelles arêtes entre V^A et V^B . On remarque que si l'égalité $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp\perp} = \mathbf{A} \& \mathbf{B}$ était satisfaite, il serait possible d'effectuer les deux délocalisations dans la même tranche !

§7.1.41 PROPOSITION (DISTRIBUTIVITÉ).

Pour tous comportements $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ non vides, et délocalisations ϕ, ψ, θ, ρ de $\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ respectivement, il existe un projet additif $\mathfrak{Distr}$ dans le comportement

$$((\phi(\mathbf{A}) \multimap \theta(\mathbf{B})) \& (\psi(\mathbf{A}) \multimap \rho(\mathbf{C}))) \multimap (\mathbf{A} \multimap (\mathbf{B} \& \mathbf{C}))$$

Lorsque nous voudrions préciser les délocalisations, nous écrirons $\mathfrak{Distr}_{\theta, \rho}^{\phi, \psi}$.

Démonstration. Soit g un projet additif dans $(\phi(\mathbf{A}) \multimap \theta(\mathbf{B})) \& (\psi(\mathbf{A}) \multimap \rho(\mathbf{C}))$. En utilisant la définition du $\&$, et les Propositions §6.1.17 et §7.1.20, on obtient :

$$\begin{aligned} &(\phi(\mathbf{A}) \multimap \theta(\mathbf{B})) \& (\psi(\mathbf{A}) \multimap \rho(\mathbf{C})) \\ &= (((\phi(\mathbf{A}) \multimap \theta(\mathbf{B}))^\perp)^\uparrow_{\psi(\mathbf{A}), \rho(\mathbf{C})})^\perp \cap (((\psi(\mathbf{A}) \multimap \rho(\mathbf{C}))^\perp)^\uparrow_{\phi(\mathbf{A}), \theta(\mathbf{B})})^\perp) \\ &= (\phi(\mathbf{A}) \otimes \theta(\mathbf{B}) \otimes \mathbf{1}_{\phi(V^A) \cup \rho(V^C)})^\perp \cap (\psi(\mathbf{A}) \otimes \rho(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{1}_{\phi(V^A) \cup \theta(V^B)})^\perp \\ &= (\phi(\mathbf{A}) \multimap (\mathbf{1}_{\psi(V^A) \cup \rho(V^C)} \multimap \theta(\mathbf{B}))) \cap (\psi(\mathbf{A}) \multimap (\mathbf{1}_{\phi(V^A) \cup \theta(V^B)} \multimap \rho(\mathbf{C}))) \end{aligned}$$

2. On a en réalité obtenu le résultat équivalent dans la géométrie de l'interaction hyperfinie par une simple adaptation de la preuve sur les graphes.

Définissons maintenant les projets additifs :

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathfrak{F}ar_\phi \otimes \mathfrak{F}ar_\theta \otimes o_{\psi(V^A) \cup \rho(V^C)} \otimes o_{V^C} \\ f_2 &= \mathfrak{F}ar_\psi \otimes \mathfrak{F}ar_\rho \otimes o_{\phi(V^A) \cup \theta(V^B)} \otimes o_{V^B} \\ \mathfrak{distr} &= f_1 + f_2 \end{aligned}$$

On a donc $\mathfrak{Distr} :: g = f_1 :: g + f_2 :: g$. Calculons maintenant $(f_1 :: g) :: a$ pour un projet additif $a \in \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} (f_1 :: g) :: a &= ((\mathfrak{F}ar_\phi \otimes \mathfrak{F}ar_\theta \otimes o_{\psi(V^A) \cup \rho(V^C)} \otimes o_{V^C}) :: g) :: a \\ &= (\mathfrak{F}ar_\theta \otimes o_{\psi(V^A) \cup \rho(V^C)} \otimes o_{V^C}) :: (g :: \phi(a)) \\ &= (\mathfrak{F}ar_\theta \otimes o_{V^C}) :: ((g :: \phi(a)) :: o_{\psi(V^A) \cup \rho(V^C)}) \end{aligned}$$

Puisque, comme nous l'avons vu plus tôt, $g \in (\phi(\mathbf{A}) \multimap (\mathbf{1}_{\psi(V^A) \cup \rho(V^C)} \multimap \theta(\mathbf{B})))$, le projet additif $((g :: \phi(a)) :: o_{\psi(V^A) \cup \rho(V^C)})$ est dans $\theta(\mathbf{B})$, et il est donc égal à $\theta(b)$ pour un projet additif $b \in \mathbf{B}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} (f_1 :: g) :: a &= (\mathfrak{F}ar_\theta \otimes o_{V^C}) :: \theta(b) \\ &= b \otimes o_{V^C} \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que $(f_2 :: g) :: a = c \otimes o_{V^B}$ pour un projet additif $c \in \mathbf{C}$. Par conséquent $(\mathfrak{distr} :: g) :: a \in \mathbf{B} + \mathbf{C} \subset \mathbf{B} \& \mathbf{C}$.

Finalement, $\mathfrak{distr} :: g \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B} \& \mathbf{C}$, ce qui implique que le projet additif $\mathfrak{distr}$ implémente bien la distributivité. $\odot$

§7.1.42 DÉFINITION (ÉQUIVALENCE OBSERVATIONNELLE).

On définit, pour toute conduite $\mathbf{A}$, une relation d'équivalence observationnelle sur les projets additifs de $\mathbf{A}$:

$$a \cong_{\mathbf{A}} b \Leftrightarrow \forall c \in \mathbf{A}^\perp, \ll a, c \gg = \ll b, c \gg$$

On notera la classe d'équivalence de a par $[f]_{\mathbf{A}}$, en omettant l'indice lorsque le contexte ne portera pas à confusion.

§7.1.43 PROPOSITION.

Soit $a = (a, A)$ et $b = (a, B)$ deux projets additifs. Si A, B sont universellement équivalents, alors $a \cong_{\mathbf{A}} b$ pour toute conduite contenant a .

Démonstration. Par définition de l'équivalence universelle, on a $\ll A, C \gg = \ll B, C \gg$ pour tout graphe C . On en déduit que $\ll a, c \gg = a \mathbf{1}_C + c \mathbf{1}_A + \ll A, C \gg = a \mathbf{1}_C + c \mathbf{1}_B + \ll B, C \gg = \ll a, b \gg$. $\odot$

§7.1.44 LEMME.

Soit E un ensemble de projets additifs de support V , et a, b deux projets additifs dans $E^\perp$. Alors $a \cong_{E^\perp} b$ si et seulement si $\forall c \in E, \ll a, c \gg = \ll b, c \gg$.

Démonstration. Par définition, si $a \cong_{E^\perp} b$, on a $\forall f \in E^{\perp\perp}, \ll a, f \gg = \ll b, f \gg$, ce qui est équivalent à $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \ll \lambda a - \lambda b, f \gg = 0$. Donc l'équivalence de a et b peut être reformulée ainsi : $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall c \in E^{\perp}, c + \lambda a - \lambda b \in E^\perp$. Ceci est, par définition, équivalent à $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall c \in E^{\perp}, \forall e \in E, \ll c + \lambda a - \lambda b, e \gg \neq 0$, i.e. $\ll \lambda a - \lambda b, e \gg = 0$. Finalement, on a montré que $a \cong_{E^\perp} b$ si et seulement si $\forall e \in E, \ll a, e \gg = \ll b, e \gg$. $\odot$

§7.1.45 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements propres, et $f \in \mathbf{A} \& \mathbf{B}$. Alors il existe $g \in \mathbf{A}$ et $h \in \mathbf{B}$ tels que

$$f \cong_{\mathbf{A} \& \mathbf{B}} g + h$$

Démonstration. On commence par choisir un projet additif $f \in \mathbf{A} \& \mathbf{B}$. Étant donné que $f \in ((\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B)^\perp \cap ((\mathbf{B}^\perp)^\dagger_A)^\perp$, on a $\langle\langle f, a' \otimes o \rangle\rangle \neq 0, \infty$ et $\langle\langle f, o \otimes b' \rangle\rangle \neq 0, \infty$ pour tous $a' \in \mathbf{A}^\perp, b' \in \mathbf{B}^\perp$. Donc $g = f :: o_{VB} \in \mathbf{A}$ et $h = f :: o_{VA} \in \mathbf{B}$. On va montrer que $f \cong_{\mathbf{A} \& \mathbf{B}} g + h$.

Remarquons dans un premier temps que $((\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B \cup (\mathbf{B}^\perp)^\dagger_A)^\perp = ((\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B)^\perp \cap ((\mathbf{B}^\perp)^\dagger_A)^\perp = \mathbf{A} \& \mathbf{B}$. Donc, par le lemme §7.1.44, il suffit de montrer que l'on a l'égalité $\langle\langle f, c \rangle\rangle = \langle\langle g + h, c \rangle\rangle$ pour tous $c \in (\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B \cup (\mathbf{B}^\perp)^\dagger_A$ pour montrer que $f \cong_{\mathbf{A} \& \mathbf{B}} g + h$.

Prenons par exemple $a' \otimes o$ dans $(\mathbf{A}^\perp)^\dagger_B$. Comme $\langle\langle a \otimes o_V, b \otimes o_V \rangle\rangle = \langle\langle a, b \rangle\rangle$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle\langle g + h, a' \otimes o \rangle\rangle &= \langle\langle g \otimes o, a' \otimes o \rangle\rangle + \langle\langle o \otimes h, a' \otimes o \rangle\rangle \\ &= \langle\langle g \otimes o, a' \otimes o \rangle\rangle \\ &= \langle\langle (f :: o) \otimes o, a' \otimes o \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f :: o, a' \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f, a' \otimes o \rangle\rangle \end{aligned}$$

On a de même, pour tout $b' \otimes o$ dans $(\mathbf{B}^\perp)^\dagger_A$,

$$\langle\langle g + h, b' \otimes o \rangle\rangle = \langle\langle g, b' \otimes o \rangle\rangle = \langle\langle f, b' \otimes o \rangle\rangle$$

Finalement, on a montré que $g + h \cong_{\mathbf{A} \& \mathbf{B}} f$. ☺

§7.1.46 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements propres, et $f \in \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$. Alors il existe $h \in \mathbf{A}^\dagger_B \cup \mathbf{B}^\dagger_A$ tel que

$$f \cong_{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}} h$$

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$. Puisque $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \subset (\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp$, alors f est orthogonal à $a' + b'$ pour tous $a' \in \mathbf{A}^\perp$ et $b' \in \mathbf{B}^\perp$. Puisque $\mathbf{A}^\perp, \mathbf{B}^\perp$ sont non vides, on peut y choisir a_o, b_o . Alors, pour tous λ, μ , les projets additifs λa_o et μb_o sont dans $\mathbf{A}^\perp, \mathbf{B}^\perp$ respectivement, et donc $\langle\langle f, \lambda a_o + \mu b_o \rangle\rangle = \lambda \langle\langle f, a_o \rangle\rangle + \mu \langle\langle f, b_o \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Puisque ceci doit être vérifié pour tous $\lambda, \mu \neq 0$, soit $\langle\langle f, a_o \rangle\rangle = 0$ et $\langle\langle f, b_o \rangle\rangle \neq 0, \infty$, soit $\langle\langle f, b_o \rangle\rangle = 0$ et $\langle\langle f, a_o \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Sans perte de généralité, supposons que l'on est dans le premier cas, i.e. $\langle\langle f, a_o \rangle\rangle = 0$ et $\langle\langle f, b_o \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Alors, pour tout $a' \in \mathbf{A}^\perp$, $\langle\langle f, a' \rangle\rangle = 0$ puisque $\forall \lambda, \mu, \langle\langle f, \lambda a' + \mu b_o \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Donc, pour tout $b' \in \mathbf{B}^\perp$, $\langle\langle f, b' \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Ceci implique que $\langle\langle f, b' \otimes o_{VA} \rangle\rangle = \langle\langle f :: o, b' \rangle\rangle \neq 0, \infty$, i.e. $f :: o_{VA}$ est dans $\mathbf{B}$.

Maintenant, on veut montrer que $f \cong_{\mathbf{A}^\perp \& \mathbf{B}^\perp} f :: o_{VA} \otimes o_{VA}$.

Choissant un élément $g \in \mathbf{A}^\perp \& \mathbf{B}^\perp$, on veut montrer que $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \langle\langle (f :: o) \otimes o, g \rangle\rangle$. Or, en utilisant la proposition précédente, nous savons qu'il existe deux projets additifs g_1 et g_2 dans $\mathbf{A}^\perp, \mathbf{B}^\perp$ respectivement, tels que $\langle\langle g, c \rangle\rangle = \langle\langle g_1 + g_2, c \rangle\rangle$ pour tout $c \in \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$. Donc, $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \langle\langle f, g_1 + g_2 \rangle\rangle$ et $\langle\langle (f :: o) \otimes o, g \rangle\rangle = \langle\langle (f :: o) \otimes o, g_1 + g_2 \rangle\rangle$. Or

$$\langle\langle f, g_1 + g_2 \rangle\rangle = \langle\langle f, g_1 \rangle\rangle + \langle\langle f, g_2 \rangle\rangle = \langle\langle f, g_2 \rangle\rangle$$

puisque $\langle\langle f, a' \rangle\rangle = 0$ pour tout $a' \in \mathbf{A}^\perp$. D'un autre côté,

$$\langle\langle (f :: o) \otimes o, g_1 + g_2 \rangle\rangle = \langle\langle (f :: o) \otimes o, g_2 \rangle\rangle + \langle\langle (f :: o) \otimes o, g_1 \rangle\rangle$$

Étant donné que $\langle\langle (f :: o) \otimes o, g_1 \rangle\rangle = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \langle\langle (f :: o) \otimes o, g_1 + g_2 \rangle\rangle &= \langle\langle (f :: o) \otimes o, g_2 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle (f :: o) \otimes o, g_2 \otimes o \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f :: o, g_2 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f, g_2 \otimes o \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f, g_2 \rangle\rangle \end{aligned}$$

Finalement on a obtenu pour tout $g \in \mathbf{A}^\perp \& \mathbf{B}^\perp$ l'égalité $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \langle\langle (f :: o) \otimes o, g \rangle\rangle$. ☺

§7.1.47 PROPOSITION.

La règle *Mix* n'est jamais satisfaite pour les comportements.

Démonstration. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements, et soient a, a', b, b' des projets additifs dans, respectivement, les comportements $\mathbf{A}, \mathbf{A}^\perp, \mathbf{B}, \mathbf{B}^\perp$. Alors, en remarquant que :

$$\begin{aligned} \ll A \cup B, A' \cup B' \gg &= \sum_{i,j,k,l} \alpha_i^A \alpha_j^B \alpha_k^{A'} \alpha_l^{B'} \ll A_i \cup B_j, A'_k \cup B'_l \gg \\ &= \sum_{i,j,k,l} \alpha_i^A \alpha_j^B \alpha_k^{A'} \alpha_l^{B'} (\ll A_i, A'_k \gg + \ll B_j, B'_l \gg) \\ &= \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{B'} \ll A, A' \gg + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A'} \ll B, B' \gg \end{aligned}$$

on peut calculer aisément $\ll a \otimes b, a' \otimes b' \gg$ ainsi :

$$\begin{aligned} \ll a \otimes b, a' \otimes b' \gg &= \mathbf{1}_{A'} \mathbf{1}_{B'} (\mathbf{1}_A b + \mathbf{1}_B a) + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B (\mathbf{1}_{A'} b' + \mathbf{1}_{B'} a') + \ll A \cup B, A' \cup B' \gg \\ &= \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A'} (\mathbf{1}_{B'} b + \mathbf{1}_B b') + \ll B, B' \gg + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{B'} (\mathbf{1}_{A'} a + \mathbf{1}_A a') + \ll A, A' \gg \\ &= \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A'} \ll b, b' \gg + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{B'} \ll a, a' \gg \end{aligned}$$

Puisque $\ll a, a' \gg$ et $\ll b, b' \gg$ sont différents de 0 et ∞ , il est possible d'annuler cette dernière expression en changeant la valeur de $\mathbf{1}_A$. Par exemple, en utilisant le fait que si $c = a + \lambda o$, alors $\ll c, a' \gg = \ll a, a' \gg$ et $\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A + \lambda$. ☺

§7.1.48 PROPOSITION.

L'affaiblissement n'est pas satisfait par les comportements propres.

Démonstration. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ des comportements, et $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$. Alors $f \otimes o_{V_C}$ n'est pas un élément de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{C} \multimap \mathbf{B}$. En effet, choisissons $a \otimes c$ dans $\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$. Alors $\ll f \otimes o, a \otimes c \gg = \mathbf{1}_C \ll f, a \gg$. De plus, $(f \otimes o) :: (A \otimes C) = \mathbf{1}_C f :: A$. Cela implique que $(f \otimes o) :: (a \otimes c) = \mathbf{1}_C f :: a$. Puisque $\mathbf{C}$ est un comportement, il est possible d'annuler $\mathbf{1}_C$ en considérant le projet additif $c - \mathbf{1}_C o \in \mathbf{C}$. Finalement, cela implique que $f \otimes o$ n'est pas dans $\mathbf{A} \otimes \mathbf{C} \multimap \mathbf{B}$ à moins que $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \multimap \mathbf{B} = \mathbf{T}$, c'est-à-dire que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{T}$ ou $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. ☺

§7.1.49 REMARQUE. Cela revient à montrer qu'il n'existe pas de morphisme de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{1}$ lorsque $\mathbf{C}$ est un comportement propre.

7.2 Sémantique dénotationnelle

Catégorie *-autonome

§7.2.1 DÉFINITION.

Soit $a = (a, A)$ un projet additif de support V^A , V^B un ensemble tel que $V^A \cap V^B = \emptyset$ et $\phi : V^A \rightarrow V^B$ une bijection. La *délocalisation* de a selon ϕ est le projet additif $\phi(a) = (a, \phi(A))$, où $\phi(A)$ est le graphe tranché $\sum_{i \in I^A} \alpha_i^A \phi(A_i)$ où $\phi(A_i)$ est le graphe décrit dans la Définition §6.1.20.

Comme dans le chapitre précédent, il est possible d'obtenir une catégorie *-autonome en appliquant un "quotient par délocalisations". On définit, cette fois encore, les fonctions $\psi_i : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \{0, 1\}$ ($i = 0, 1$) :

$$\psi_i : x \mapsto (x, i)$$

§7.2.2 DÉFINITION (OBJETS ET MORPHISMES DE $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$).

On définit la catégorie :

$$\mathcal{O}bj = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp} \text{ de support } X_{\mathbf{A}} \subset \mathbf{N}\}$$

$$\mathcal{M}or[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \{f \in \psi_0(\mathbf{A}) \multimap \psi_1(\mathbf{B})\}$$

Pour définir la composition des morphismes, on utilise à nouveau trois copies de $\mathbf{N}$, en s'aidant des deux bijections suivantes :

$$\begin{aligned}\mu : \mathbf{N} \times \{0, 1\} &\rightarrow \mathbf{N} \times \{1, 2\}, & (x, i) &\mapsto (x, i + 1) \\ \nu : \mathbf{N} \times \{0, 2\} &\rightarrow \mathbf{N} \times \{0, 1\}, & (x, i) &\mapsto (x, i/2)\end{aligned}$$

§7.2.3 DÉFINITION (COMPOSITION DANS $\mathfrak{Graph}_{MLL}$).

Étant donnés f et g deux morphismes dans $\mathfrak{Mor}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ et $\mathfrak{Mor}[\mathbf{B}, \mathbf{C}]$ respectivement, on définit :

$$g \circ f = \nu(f :: \mu(g))$$

On montre alors que ceci définit bien une catégorie. On ne présentera pas ici la démonstration qui est une simple adaptation du résultat obtenu dans le cas des graphes non tranchés (voir Chapitre 6.2).

On définit le bifoncteur induit par $\otimes$, en s'aidant des fonctions $\phi : \mathbf{N} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbf{N}$ définies par $\phi((x, i)) = 2x + i$, et τ

$$\tau : \begin{cases} \mathbf{N} \times \{0, 1\} &\rightarrow \mathbf{N} \times \{0, 1\} \\ (2x + 1, 0) &\mapsto (2x, 1) \\ (2x, 1) &\mapsto (2x + 1, 0) \\ (x, i) &\mapsto (x, i) \text{ sinon} \end{cases}$$

§7.2.4 DÉFINITION.

On définit sur $\mathfrak{Graph}_{MLL}$ le bifoncteur $\bar{\otimes}$ sur les objets :

$$\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B} = \phi(\psi_0(\mathbf{A}) \otimes \psi_1(\mathbf{B}))$$

et sur les morphismes :

$$f \bar{\otimes} g = \tau(\psi_0(\phi(f)) \otimes \psi_1(\phi(g)))$$

§7.2.5 THÉORÈME.

La catégorie $\mathfrak{Graph}_{MLL}$ est $*$ -autonome. Plus précisément, $(\mathfrak{Graph}_{MLL}, \bar{\otimes}, \mathbf{1}_{\bar{\otimes}})$ est symétrique monoidale close et l'objet $\perp_{\bar{\otimes}} = \mathbf{1}_{\bar{\otimes}}^{\perp}$ est dualisant.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition §6.2.13 présentée dans la Section 6.2.2 du Chapitre 6. ☺

Produits et Coproduits

Afin d'obtenir une sémantique catégorique pour MALL, on doit maintenant définir un produit. La construction qui semble naturelle est de définir la sous-catégorie pleine $\mathfrak{Comp}_{MALL}$ de $\mathfrak{Graph}_{MLL}$ et le bifoncteur $\bar{\&}$ induit par le connecteur $\&$.

§7.2.6 DÉFINITION (OBJETS ET MORPHISMES DE $\mathfrak{Comp}_{MALL}$).

On définit la catégorie :

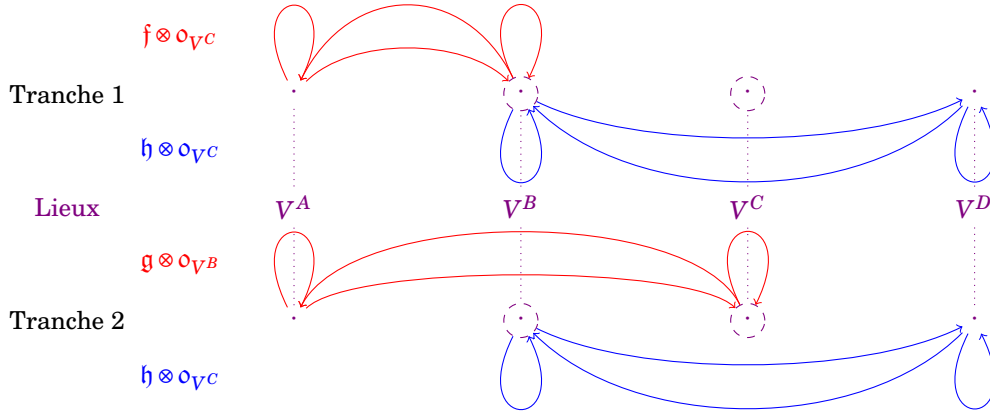
$$\begin{aligned}\mathfrak{Obj} &= \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp} \text{ comportement de support } X_{\mathbf{A}} \subset \mathbf{N}\} \\ \mathfrak{Mor}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= \{f \in \psi_0(\mathbf{A}) \multimap \psi_1(\mathbf{B})\}\end{aligned}$$

On définit alors le bifoncteur $\bar{\&}$ par $\mathbf{A}, \mathbf{B} \mapsto \phi(\psi_0(\mathbf{A}) \& \psi_1(\mathbf{B}))$ sur les objets, et :

$$f \bar{\&} g = \tau(\mathfrak{Dist} :: (\psi_0(\phi(f)) \& \psi_1(\phi(g))))$$

sur les morphismes.

§7.2.7 Cependant, ceci ne définit pas un produit catégorique. En effet, comme c'est le cas dans les autres géométries de l'interaction traitant les additifs, le problème vient de l'élimination d'une coupure entre les connecteurs additifs.



Une arête de V^i à V^j représente l'ensemble des arêtes dont la source est dans V^i et le but est dans V^j . Les ensembles d'arêtes nécessairement vides ont été omis (par exemple de V^C à V^C dans le graphe de $f \otimes o$). Les points entourés représentent le lieu de la coupure, c'est-à-dire les sommets disparaissant durant l'exécution.

FIGURE 7.1 – Représentation graphique du branchement de $f\bar{\&}g$ avec $h \otimes o_{VC}$.

§7.2.8 Nous allons essayer d'expliquer ce qui se passe. Soit deux projets additifs f, g respectivement dans $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $\mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$. Supposons de plus que chacun de ces projets additifs ne possède qu'une seule tranche afin de simplifier la discussion ; on pensera à f, g comme à des interprétations de preuves π_f et π_g en calcul des séquents. Alors, $f\bar{\&}g$ est un projet additif avec deux tranches dans $\mathbf{A} \multimap (\mathbf{B} \& \mathbf{C})$, où la première tranche contient le graphe $F \cup \emptyset^{V^C}$, et la seconde contient le graphe $G \cup \emptyset^{V^B}$. On définit alors $f\bar{\&}g$ comme l'interprétation de la preuve obtenue à partir de π_f et π_g en appliquant une règle $\&$; on notera cette preuve $\pi_{\&}$. Prenons maintenant un projet additif h (avec une seule tranche) dans $\mathbf{B} \multimap \mathbf{D}$, que nous considérerons comme l'interprétation d'une preuve π_h en calcul des séquents. Le projet additif $h \otimes o_{VC}$ est alors dans $(\mathbf{B} \& \mathbf{C}) \multimap \mathbf{D}$, et c'est l'interprétation de la preuve obtenue en appliquant une règle $\oplus$ à π_h , preuve que nous noterons $\pi_{\oplus}$. La coupure entre les projets additifs $f\bar{\&}g$ et $h \otimes o_{VC}$ est alors l'interprétation de la preuve π obtenue en appliquant une règle de coupure entre $\pi_{\&}$ et $\pi_{\oplus}$. Après une étape de la procédure d'élimination des coupures à cette preuve π , on obtient une preuve π' dont l'interprétation devrait être $f :: h$. D'où la question naturelle : est-ce que $p' = f :: h$ est égal à $(f\bar{\&}g) :: (h \otimes o_{VC})$? Or ceci n'est jamais le cas. En effet, $(f\bar{\&}g) :: h$ est égal à $p = ((f \otimes o_{VC}) :: h) \bar{\&} ((g \otimes o_{VB}) :: o_{VC})$ (voir la représentation graphique de la Figure 7.1). Il est alors clair que p n'est pas égal à p' puisque p possède deux tranches tandis que p' n'en possède qu'une. De plus, même si l'une des tranches de p est égale à p' , l'autre tranche n'est en général pas une tranche vide : lors de l'exécution $(G \cup (V^B, \emptyset)) :: (H \cup (V^C, \emptyset))$ les arêtes de G dont la source et le but sont dans V^A (ainsi que les arêtes de H dont la source et le but sont dans V^D) ne sont pas effacées.

Équivalence Observationnelle

§7.2.9 Comme nous venons de l'expliquer, le connecteur $\&$ ne définit pas un produit car, si $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, $g \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$ et $h \in \mathbf{B}^\perp$ sont trois projets additifs, le résultat de l'élimination de la coupure $(f\bar{\&}g) :: (h \otimes o)_{VC}$ est égal à $f + \text{res}$ où res est un résidu égal à $(g \otimes o_{VB}) :: (h \otimes o_{VC})$. La proposition suivante montre que ce résidu n'est pas détecté par les éléments de $\mathbf{A}^\perp$, i.e. que $\langle\langle \text{res}, a' \rangle\rangle = 0$ pour tout $a' \in \mathbf{A}^\perp$. Cela signifie que le connecteur $\&$ définit un produit catégorique à *équivalence observationnelle près*.

§7.2.10 PROPOSITION.

Soit $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $g \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$ des projets additifs, et $h = f \& g$. Pour tout $b \in \mathbf{B}^\perp$, $f :: b \cong_{\mathbf{B}} h :: b \otimes_{V^A} 0$.

Démonstration. On a $h :: (b \otimes_{V^A} 0) = f :: b + g :: 0$. Soit $b \in \mathbf{B}^\perp$ un projet additif. Alors

$$\langle\langle h :: (b \otimes_{V^A} 0), a \rangle\rangle = \langle\langle f :: b, a \rangle\rangle + \langle\langle g :: 0, a \rangle\rangle$$

Supposons $\langle\langle g :: 0, a \rangle\rangle = \lambda \neq 0$. Puisque $f :: b \in \mathbf{A}$, on a $\langle\langle f :: b, a \rangle\rangle = \mu \neq 0$. Or, par le lemme d'homothétie §7.1.17, on obtient $g = -\frac{\lambda}{\mu} f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$. Puisque $g :: b = -\frac{\lambda}{\mu} f :: b$, on a finalement $\langle\langle \text{distr} :: (f \& g), a \rangle\rangle = 0$, qui est une contradiction.

Finalement $\langle\langle g :: 0, a \rangle\rangle = 0$. ☺

On souhaiterait donc quotienter la catégorie $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$ par équivalence observationnelle. On doit donc montrer que la structure catégorique que l'on avait ne s'effondre pas lors de ce quotient, i.e. que l'équivalence observationnelle est une *congruence* sur les morphismes. La proposition suivante — une conséquence directe de la propriété cyclique (voir Chapitre 5) — et ses corollaires³ nous assurent que c'est le cas.

§7.2.11 PROPOSITION.

Soit $f \cong_{\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}} f'$ et $g \in \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ des projets additifs. Alors $f :: g \cong_{\mathbf{A} \multimap \mathbf{C}} f' :: g$.

Démonstration. Pour tout $c \in \mathbf{C} \multimap \mathbf{A}$, on a $\langle\langle f :: g, c \rangle\rangle = \langle\langle f', g :: c \rangle\rangle$. Finalement, il suffit de faire le simple calcul $\langle\langle f :: g, c \rangle\rangle = \langle\langle f, g :: c \rangle\rangle = \langle\langle f', g :: c \rangle\rangle = \langle\langle f' :: g, c \rangle\rangle$. ☺

§7.2.12 COROLLAIRE.

Soit f, f', g, g' des projets additifs tels que $f \cong_{\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}} f'$ et $g \cong_{\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}} g'$. Alors $f :: g \cong f' :: g'$.

§7.2.13 COROLLAIRE.

Soit $a \cong_{\mathbf{A}} a'$ et $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ des projets additifs. Alors $f :: a \cong_{\mathbf{B}} f :: a'$.

§7.2.14 COROLLAIRE.

Si $a \cong_{\mathbf{A}} a'$ et $b \cong_{\mathbf{B}} b'$, alors $a \otimes b \cong_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}} a' \otimes b'$.

Le Corollaire §7.2.12 nous permet donc de définir la catégorie obtenue en quotientant $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$ par l'équivalence observationnelle.

§7.2.15 DÉFINITION.

On définit la catégorie $\mathcal{C}\text{on}\delta$ par :

$$\mathcal{O}bj = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp} \text{ de support } X_{\mathbf{A}} \subset \mathbf{N}\}$$

$$\mathcal{M}or[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \{[f] \mid f \in \psi_0(\mathbf{A}) \multimap \psi_1(\mathbf{B})\}$$

§7.2.16 PROPOSITION.

La catégorie $\mathcal{C}\text{on}\delta$ hérite de la structure *-autonome de la catégorie $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'on se contente de quotienter les hom-sets. Les trois corollaires de la Proposition §7.2.11 nous assurent que l'on a bien défini une catégorie, et que celle-ci hérite de la structure symétrique monoïdale de $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$. Pour montrer que $\mathcal{C}\text{on}\delta$ est fermée, il suffit de montrer que l'isomorphisme entre $\mathcal{M}or[\mathbf{A}, \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}]$ et $\mathcal{M}or[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ dans $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$ est compatible avec l'équivalence observationnelle. Cette compatibilité est claire : l'équivalence observationnelle est préservée par les délocalisations. Le fait que $\perp$ soit dualisant est ensuite une conséquence directe de la préservation des isomorphismes lorsque l'on quotiente une catégorie. ☺

3. Ces corollaires montrent un peu plus : ils nous assurent que la catégorie quotient hérite de la structure monoïdale symétrique de $\mathcal{G}\text{raph}_{MLL}$.

§7.2.17 DÉFINITION.

On définit la catégorie $\mathcal{B}chav$ par

$$\mathcal{O}bj = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \text{ comportement de support } X_{\mathbf{A}} \subset \mathbf{N}\}$$

$$\mathcal{M}or[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \{[f] \mid f \in \psi_0(\mathbf{A}) \multimap \psi_1(\mathbf{B})\}$$

§7.2.18 PROPOSITION.

La catégorie $\mathcal{B}chav$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}ond$, close pour le produit monoïdal, l'internalisation des hom-sets et la dualité, qui a des produits et des coproduits, et dans laquelle le *Mix* et l'*Affaiblissement* ne sont pas satisfaits.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\oplus$ est un coproduit, puisque $\mathcal{B}chav$ est close par orthogonalité. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ des comportements, et $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$, $g \in \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ des projets additifs. Alors le projet additif $f \& g$ est dans $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \multimap \mathbf{C}$. On définit $\iota_{\mathbf{A}}$ (resp. $\iota_{\mathbf{B}}$) comme le produit monoïdal de l'identité sur $\mathbf{A}$ (resp. sur $\mathbf{B}$) et de $\circ_{VB}$ (resp. $\circ_{VA}$). On obtient alors, comme conséquence immédiate de la Proposition §7.2.10, que pour tout représentant h de $[f \& g]$ et tout représentant i de $[\iota_{\mathbf{A}}]$ on a $h :: i \in [f]$. La vérification concernant $\iota_{\mathbf{B}}$ est similaire. $\odot$

7.3 Vérité et Adéquation

§7.3.1 Comme dans le chapitre précédent, on supposera dans cette section que Ω contient 1 et que la fonction m choisie (voir §7.1) satisfait $m(1) = \infty$. On définit alors une notion de vérité, on montre un résultat d'adéquation forte, et on montre un résultat de complétude interne pour le tenseur.

Vérité

§7.3.2 DÉFINITION (GAIN).

Un projet additif $a = (a, A)$ est *gagnant* lorsque $a = 0$ et $A = \sum_{i \in I^A} \lambda A_i$, où $\mathbf{1}_A = 1$ et pour tout $i \in I^A$ le graphe A_i est une union disjointe de transpositions (voir Définition §6.3.3).

§7.3.3 DÉFINITION (VÉRITÉ).

Une conduite $\mathbf{A}$ est *vraie* lorsqu'elle contient un projet additif gagnant.

§7.3.4 PROPOSITION (CONSISTANCE).

Les conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ ne peuvent être simultanément vraies.

Démonstration. Soit $a = (0, A)$ et $a' = (0, A')$ deux projets additifs de même support V^A . Leur interaction est calculée par la somme

$$\sum_{(i,j) \in I^A \times I^{A'}} \frac{1}{\text{Card}(I^A) \text{Card}(I^{A'})} \llbracket A_i, A'_j \rrbracket$$

Il est facile de montrer (voir la démonstration de la Proposition §6.3.6) que les deux seuls cas possibles sont $\llbracket a, a' \rrbracket = 0$ et $\llbracket a, a' \rrbracket = \infty$. Cela montre que a et a' ne peuvent être orthogonaux. $\odot$

§7.3.5 PROPOSITION (COMPOSITIONALITÉ).

Soit $f = (0, F)$ et $a = (0, A)$ deux projets additifs gagnants dans les conduites $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ respectivement. Alors $\mathbf{B}$ est une conduite vraie. De plus, si $\mathbf{B} \neq \mathbf{T}_{VB}$, alors $f :: a$ est un projet additif gagnant.

Démonstration. Puisque les mises de f et a sont nulles, on a

$$\llbracket f, a \rrbracket = \llbracket F, A \rrbracket = \sum_{(i,j) \in I^F \times I^A} \frac{1}{\text{Card}(I^F) \text{Card}(I^A)} \llbracket F_i, A_j \rrbracket$$

Or chacun des termes $\llbracket F_i, A_j \rrbracket$ sont soit nuls soient égaux à ∞ . On en déduit que $\ll f, a \gg$ est soit nul, soit égal à ∞ .

- Supposons que $\ll f, a \gg = \infty$. Puisque $f :: a$ est, par définition de $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, un projet additif dans $\mathbf{B}$ de mise $\ll f, a \gg$, on en déduit que $\mathbf{B}$ contient un projet additif de mise infinie, et donc $\mathbf{B} = \mathbf{T}_{VB}$ par la Proposition §7.1.6. Donc $\mathbf{B}$ est vraie puisqu'elle contient le projet additif $\circ_{VB}$.
- Supposons maintenant que $\ll f, a \gg = 0$. Dans ce cas, le raisonnement de la proposition §6.3.7, appliqué à chaque couple de tranches $(i, j) \in I^F \times I^A$, montre que $F_i :: A_j$ est une union disjointe de transpositions. On conclut que

$$f :: a = (0, \sum_{(i,j) \in I^F \times I^A} \frac{1}{\text{Card}(I^F)\text{Card}(I^A)} F_i :: A_j)$$

est un projet additif gagnant dans $\mathbf{B}$.

En particulier, si l'on suppose que $\mathbf{B} \neq \mathbf{T}_{VB}$, on se trouve nécessairement dans le second cas (c'est-à-dire $\ll f, a \gg = 0$) car $\ll f, a \gg = \infty$ implique $\mathbf{B} = \mathbf{T}_{VB}$. $\odot$

Calcul des séquents

§7.3.6 DÉFINITION.

On fixe $\mathcal{V} = \{X_i(j)\}_{i,j \in \mathbf{N}}$ un ensemble de *variables localisées*⁴. Pour $i \in \mathbf{N}$, l'ensemble $X_i = \{X_i(j)\}_{j \in \mathbf{N}}$ sera appelé le *nom de variable* X_i , et on appellera un élément de X_i une *variable de nom*⁴ X_i . On suppose de plus que chaque nom de variable X_i est associé à une *taille* n_i et que pour chaque $m \in \mathbf{N}^*$, il existe une infinité d'entiers $i \in \mathbf{N}$ tels que $n_i = m$.

Pour $i, j \in \mathbf{N}$ on définit le *lieu* $\sharp X_i(j)$ de la variable $X_i(j)$ comme l'ensemble

$$\{(i, m) \mid j n_i \leq m \leq (j+1)n_i - 1\}$$

§7.3.7 DÉFINITION (FORMULES DE locMALL).

On définit inductivement les formules de la *logique linéaire multiplicative additive localisée* locMALL ainsi que leur *lieu* comme suit :

- Une variable $X_i(j)$ de nom X_i est une formule dont le lieu est défini comme $\sharp X_i(j)$;
- Si $X_i(j)$ est une variable de nom X_i , alors $(X_i(j))^\perp$ est une formule de lieu $\sharp X_i(j)$.
- Si A, B sont des formules de lieux X, Y tels que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \otimes B$ (resp. $A \wp B$, resp. $A \& B$, resp. $A \oplus B$) est une formule de lieu $X \cup Y$;
- Les constantes $\mathbf{T}_\Gamma$ sont des formules de lieu $\sharp \Gamma$;
- Les constantes $\mathbf{0}_\Gamma$ sont des formules de lieu $\sharp \Gamma$.

Si A est une formule, on écrira $\sharp A$ le lieu de A . On définit également les séquents $\vdash \Gamma$ de locMALL lorsque les formules de Γ ont des lieux deux à deux disjoints⁵.

§7.3.8 DÉFINITION (FORMULES DE MALL_{T,0}).

Les formules de MALL_{T,0} sont définies par la grammaire suivante :

$$F := X_i \mid X_i^\perp \mid F \otimes F \mid F \wp F \mid F \& F \mid F \oplus F \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{T}$$

où les X_i sont les noms de variables.

§7.3.9 REMARQUE. À toute formule de locMALL_{T,0} correspond une unique formule de MALL_{T,0} obtenue simplement en remplaçant les variables par leur nom, c'est-à-dire en appliquant la transformation $X_i(j) \mapsto X_i$ pour chaque variable localisée $X_i(j)$. Inversement, il est possible de *localiser* une formule de MALL_{T,0} : si e est une énumération des occurrences des noms de variables dans A , on peut définir une formule de locMALL_{T,0} A^e .

4. Les noms de variables sont les variables au sens habituel, tandis que la notion de variable localisée se rapproche de la notion usuelle d'occurrence.

5. Cette condition est des plus naturelles, puisque la virgule des séquents correspond à un $\wp$.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash X_i(j)^\perp, X_i(j')} \text{Ax } (j \neq j') \\
\frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash B, \Gamma}{\vdash A \otimes B, \Delta, \Gamma} \otimes^6 \\
\frac{\vdash A_i, \Gamma}{\vdash A_0 \oplus A_1, \Gamma} \oplus^i \\
\frac{}{\vdash \top, \Gamma} \top_{\sharp\Gamma}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash A^\perp, \Gamma}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{Cut}^6 \\
\frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \wp B, \Gamma} \wp \\
\frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash B, \Gamma}{\vdash A \& B, \Gamma} \& \\
\text{Pas de règle pour } \mathbf{0}.
\end{array}$$

FIGURE 7.2 – Calcul des séquents localisé locMALL

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash X_i^\perp, X_i} \text{Ax} \\
\frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash B, \Gamma}{\vdash A \otimes B, \Delta, \Gamma} \otimes \\
\frac{\vdash A_i, \Gamma}{\vdash A_0 \oplus A_1, \Gamma} \oplus^i \\
\frac{}{\vdash \top, \Gamma} \top
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash A^\perp, \Gamma}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{Cut} \\
\frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \wp B, \Gamma} \wp \\
\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} \& \\
\text{Pas de règle pour } \mathbf{0}.
\end{array}$$

FIGURE 7.3 – Calcul des séquents MALL_{T,0}§7.3.10 DÉFINITION (PREUVES DE locMALL_{T,0}).

Une preuve de locMALL_{T,0} est une preuve obtenue à partir des règles de calcul des séquents de la figure 7.2, et telle que toute variable $X_i(j)$ et toute négation de variable $(X_i(j))^\perp$ apparaît dans au plus une règle sans prémisses (axiome ou $\top$).

§7.3.11 DÉFINITION (PREUVES DE MALL_{T,0}).

Une preuve de MALL_{T,0} est une preuve obtenue à partir des règles de calcul des séquents de la figure 7.3.

§7.3.12 REMARQUE. À toute preuve de locMALL_{T,0} correspond une preuve de MALL_{T,0} en remplaçant chaque variable par son nom. Inversement, étant donnée une énumération e des occurrences de noms de variables dans les règles axiomes d'une preuve de MALL_{T,0} π , on peut étendre cette énumération à l'ensemble de l'arbre de dérivation afin d'obtenir une preuve de locMALL_{T,0} π^e .

Adéquation forte

§7.3.13 DÉFINITION (INTERPRÉTATIONS).

On définit une *base d'interprétation* comme une fonction Φ qui associe à chaque nom de variable X_i un comportement de support $\{0, \dots, n_i - 1\}$.

§7.3.14 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES FORMULES DE locMALL_{T,0}).

Soit Φ une base d'interprétation. On définit l'interprétation $I_\Phi(F)$ selon Φ d'une formule F inductivement :

- Si $F = X_i(j)$, alors $I_\Phi(F)$ est la délocalisation (i.e. un comportement) de $\Phi(X_i)$ suivant la bijection $x \mapsto (i, jn_i + x)$;
- Si $F = (X_i(j))^\perp$, on définit le comportement $I_\Phi(F) = (I_\Phi(X_i(j)))^\perp$;
- Si $F = \top_{\sharp\Gamma}$ (resp. $F = \mathbf{0}_{\sharp\Gamma}$), on définit $I_\Phi(F)$ comme le comportement $\top_{\sharp\Gamma}$ (resp. $\mathbf{0}_{\sharp\Gamma}$);

6. Il est nécessaire que $(\sharp A \cup \sharp \Delta) \cap (\sharp B \cup \sharp \Gamma) = \emptyset$ pour appliquer la règle $\otimes$ et que $\sharp \Delta \cap \sharp \Gamma = \emptyset$ pour appliquer les règles de coupure et de mix. De même, on demande que $(\sharp A) \cap (\sharp B) = \emptyset$ pour appliquer la règle $\&$.

- Si $F = A \otimes B$, on définit le comportement $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \otimes I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \wp B$, on définit le comportement $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \wp I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \oplus B$, on définit le comportement $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \oplus I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \& B$, on définit le comportement $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \& I_\Phi(B)$.

De plus, un séquent $\vdash \Gamma$ sera interprété comme le $\wp$ des formules de Γ , que l'on écrira $\wp \Gamma$.

§7.3.15 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES PREUVES DE $\text{LOCMALL}_{\mathbf{T},0}$).

Soit Φ une base d'interprétation. On définit l'interprétation d'une preuve $I_\Phi(\pi)$ — un projet additif — inductivement :

- si π consiste uniquement en une règle axiome introduisant $\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j')$, on définit $I_\Phi(\pi)$ comme le projet additif $\wp$ obtenu par la bijection $(i, jn_i + x) \mapsto (i, j'n_i + x)$;
- si π consiste uniquement en une règle $\mathbf{T}_{\sharp\Gamma}$, on définit $I_\Phi(\pi) = (0, (\sharp\Gamma, \emptyset))$;
- si π est obtenue à partir de π' par une règle $\wp$, alors $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi')$;
- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle $\otimes$, on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) \otimes I_\Phi(\pi_2)$;
- si π est obtenue à partir de π' par une règle $\oplus^i$ introduisant une formule de lieu V , on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi') \otimes \mathbf{o}_V$;
- si π de conclusion $\vdash \Gamma, A_0 \& A_1$ est obtenue à partir de π_0 et π_1 de conclusions respectives $\vdash \Gamma, A_0$ et $\vdash \Gamma, A_1$ par une règle $\&$, on définit :

$$\begin{aligned} \psi_i &: x \mapsto (x, i) \quad (i = 0, 1) \\ \tilde{\psi}_i &= ((\psi_i)_{\upharpoonright_{\sharp\Gamma}})^{-1} \quad (i = 0, 1) \\ \dot{\psi}_i &= ((\psi_i)_{\upharpoonright_{\sharp A_i}})^{-1} \quad (i = 0, 1) \end{aligned}$$

L'interprétation de π est alors définie comme :

$$I_\Phi(\pi) = \text{Distr}_{\psi_0, \psi_1}^{\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1} :: (\psi_0(I_\Phi(\pi_0)) \otimes \mathbf{o}_{\sharp A_1} + \psi_1(I_\Phi(\pi_1)) \otimes \mathbf{o}_{\sharp A_0})$$

- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle de coupure, on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) :: I_\Phi(\pi_2)$.

§7.3.16 La figure 7.4 représente les étapes de la formation de l'interprétation de la règle $\&$.

§7.3.17 LEMME.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ des comportements. Alors $(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C} \subset \mathbf{A} \multimap (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C})$.

Démonstration. Il est équivalent de montrer l'inclusion $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}^\perp \& \mathbf{C}^\perp) \subset (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp) \& \mathbf{C}^\perp$. En utilisant la définition de $\&$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}^\perp \& \mathbf{C}^\perp) &= \mathbf{A} \otimes ((\mathbf{B} \upharpoonright_C)^\perp \cap (\mathbf{C} \upharpoonright_B)^\perp) \\ &= \{a \otimes d \mid a \in \mathbf{A}, d \in ((\mathbf{B} \upharpoonright_C)^\perp \cap (\mathbf{C} \upharpoonright_B)^\perp)\}^{\perp\perp} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp) \& \mathbf{C}^\perp &= (((\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp) \upharpoonright_C)^\perp \cap (\mathbf{C} \upharpoonright_{A,B})^\perp \\ &= ((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \upharpoonright_C)^\perp \cap (\mathbf{C} \upharpoonright_{A,B})^\perp \\ &= ((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \upharpoonright_C \cup \mathbf{C} \upharpoonright_{A,B})^\perp \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que tout projet additif de la forme $a \otimes d$, où a est un élément de $\mathbf{A}$ et $d \in ((\mathbf{B} \upharpoonright_C)^\perp \cap (\mathbf{C} \upharpoonright_B)^\perp)$, est orthogonal à tout projet additif dans $\mathbf{E} = (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \upharpoonright_C \cup \mathbf{C} \upharpoonright_{A,B}$. Soit e un projet additif dans $\mathbf{E}$. Alors :

1. Soit $e \in \mathbf{C} \upharpoonright_{A,B}$, c'est-à-dire $e = c \otimes \mathbf{o}_{V_A \cup V_B}$. Alors $\langle\langle a \otimes d, e \rangle\rangle = \langle\langle d, c \otimes \mathbf{o}_{V_B} \rangle\rangle$. Or, puisque $d \in (\mathbf{C} \upharpoonright_B)^\perp$, on a $\langle\langle d, c \otimes \mathbf{o}_{V_B} \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Donc $e \perp a \otimes d$.
2. Soit $e \in (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \upharpoonright_C$, c'est-à-dire $e = f \otimes \mathbf{o}_{V_C}$ pour $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle\langle e, a \otimes d \rangle\rangle &= \langle\langle f \otimes \mathbf{o}_{V_C}, a \otimes d \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f, (a \otimes d) :: \mathbf{o}_{V_C} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f, a \otimes (d :: \mathbf{o}_{V_C}) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f :: a, d :: \mathbf{o}_{V_C} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle (f :: a) \otimes \mathbf{o}_{V_C}, d \rangle\rangle \end{aligned}$$

Or, comme $f :: a \in \mathbf{B}$, $(f :: a) \otimes o_{VC} \in \mathbf{B} \upharpoonright_C$. Or $\mathfrak{d}$ est par définition dans $(\mathbf{B} \upharpoonright_C)^\perp$. Finalement, $e \perp a \otimes \mathfrak{d}$. $\odot$

§7.3.18 PROPOSITION (ADÉQUATION FORTE LOCALISÉE).

Soit Φ une base d'interprétation. Si π est une preuve de conclusion $\vdash \Delta$, alors $I_\Phi(\pi)$ est un projet additif gagnant dans le comportement $I_\Phi(\vdash \Delta)$.

Démonstration. On montre le résultat par induction sur la dernière règle de π . Par définition, l'interprétation de la règle axiome introduisant $\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j')$ est un projet additif gagnant dans $I_\Phi(X_i(j)) \multimap I_\Phi(X_i(j'))$ qui est égale à $I_\Phi((X_i(j))^\perp \wp X_i(j'))$. Ensuite :

- si π est la règle $\mathbf{T}_{\# \Gamma}$, alors $I_\Phi(\pi) = (0, o_{\# \Gamma})$ est gagnant et dans $\mathbf{T}_{\# \Gamma}$;
- les cas correspondant aux connecteurs additifs sont traités de manière similaire à ce qui a été fait dans la démonstration de la Proposition §6.3.19 ;
- si la dernière règle est une règle $\oplus$ — on supposera sans perte de généralité qu'il s'agit d'une règle $\oplus^1$:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdash \pi' \\ \vdash \Gamma, A_1 \end{array}}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2} \oplus^1$$

Alors $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi') \otimes o_V$, et $I_\Phi(\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2) = (\wp \Gamma) \wp (A_1 \oplus A_2)$. On utilise le fait que $(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C} \subset \mathbf{A} \multimap (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C})$ (voir Lemme §7.3.17) pour montrer que l'on a l'inclusion $I_\Phi(\vdash \Gamma, A_1) \oplus I^\Phi(A_2) \subset I_\Phi(\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2)$. Or, comme $I_\Phi(\pi')$ est un projet additif gagnant dans $I_\Phi(\vdash \Gamma, A_1)$, $I_\Phi(\pi)$ est un projet additif gagnant dans $I_\Phi(\vdash \Gamma, A_1) \oplus I^\Phi(A_2)$, et par conséquent c'est un projet additif gagnant dans $I_\Phi(\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2)$;

- si la dernière règle est une règle $\&$:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdash \pi_0 \\ \vdash \Gamma, A_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdash \pi_1 \\ \vdash \Gamma, A_1 \end{array}}{\vdash \Gamma, A_0 \& A_1} \&$$

Dans ce cas, en utilisant les notations de la Définition §7.3.15, on a :

$$I_\Phi(\pi) = \mathfrak{Distr}_{\psi_0, \psi_1}^{\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1} :: (\psi_0(I_\Phi(\pi_0)) \otimes o_{\# A_1} + \psi_1(I_\Phi(\pi_1)) \otimes o_{\# A_0})$$

Par définition, les interprétations $I_\Phi(\pi_i)$ sont des projets additifs gagnants dans les comportements $I_\Phi(\vdash \Gamma, A_i)$. On en déduit que les projets additifs $\psi_i(I_\Phi(\pi_i))$ sont gagnants et dans les comportements $\psi_i(I_\Phi(\vdash \Gamma, A_i))$ (il est évident que les délocalisations préservent le gain). Étant donné que $\mathbf{A} + \mathbf{B} \subset \mathbf{A} \& \mathbf{B}$ lorsque $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des comportements non vides, on en déduit⁷ que

$$\psi_0(I_\Phi(\pi_0)) \otimes o_{\# A_1} + \psi_1(I_\Phi(\pi_1)) \otimes o_{\# A_0}$$

est un projet additif gagnant dans

$$\psi_0(I_\Phi(\vdash \Gamma, A_0)) \& \psi_1(I_\Phi(\vdash \Gamma, A_1))$$

Étant donné que la délocalisation d'un projet additif gagnant est un projet additif gagnant et que le projet additif implémentant la distributivité est la somme de deux délocalisations, $I_\Phi(\pi)$ est un projet additif gagnant. De plus, il est dans l'interprétation $I_\Phi(\vdash \Gamma, A_0 \& A_1)$ de $\vdash \Gamma, A_0 \& A_1$ par la Proposition §7.1.41.

- si π est obtenue par une coupure entre π_1 et π_2 , de conclusions respectives $\vdash A, \Gamma_1$ et $\vdash A^\perp, \Gamma_2$, alors le Théorème §7.3.5 nous assure⁸ que $I_\Phi(\pi_1) :: I_\Phi(\pi_2)$ est un projet additif gagnant dans $\wp \Gamma$.

7. En effet, par hypothèse d'induction, les interprétations des séquents $\vdash \Gamma, A_0$ et $\vdash \Gamma, A_1$ sont non vides.

8. On passe ici sur un détail technique. Il faut pour utiliser le Théorème §7.3.5 dans le cas où une formule $\mathbf{T}_{\# \Gamma}$ apparaît dans un des séquents coupés que l'on est dans le cas où la mise produite par la coupure est nulle. Ceci est cependant immédiat puisque le graphe de l'interprétation de la règle d'introduction de $\mathbf{T}_{\# \Gamma}$ est vide et ne peut donc produire de cycles.

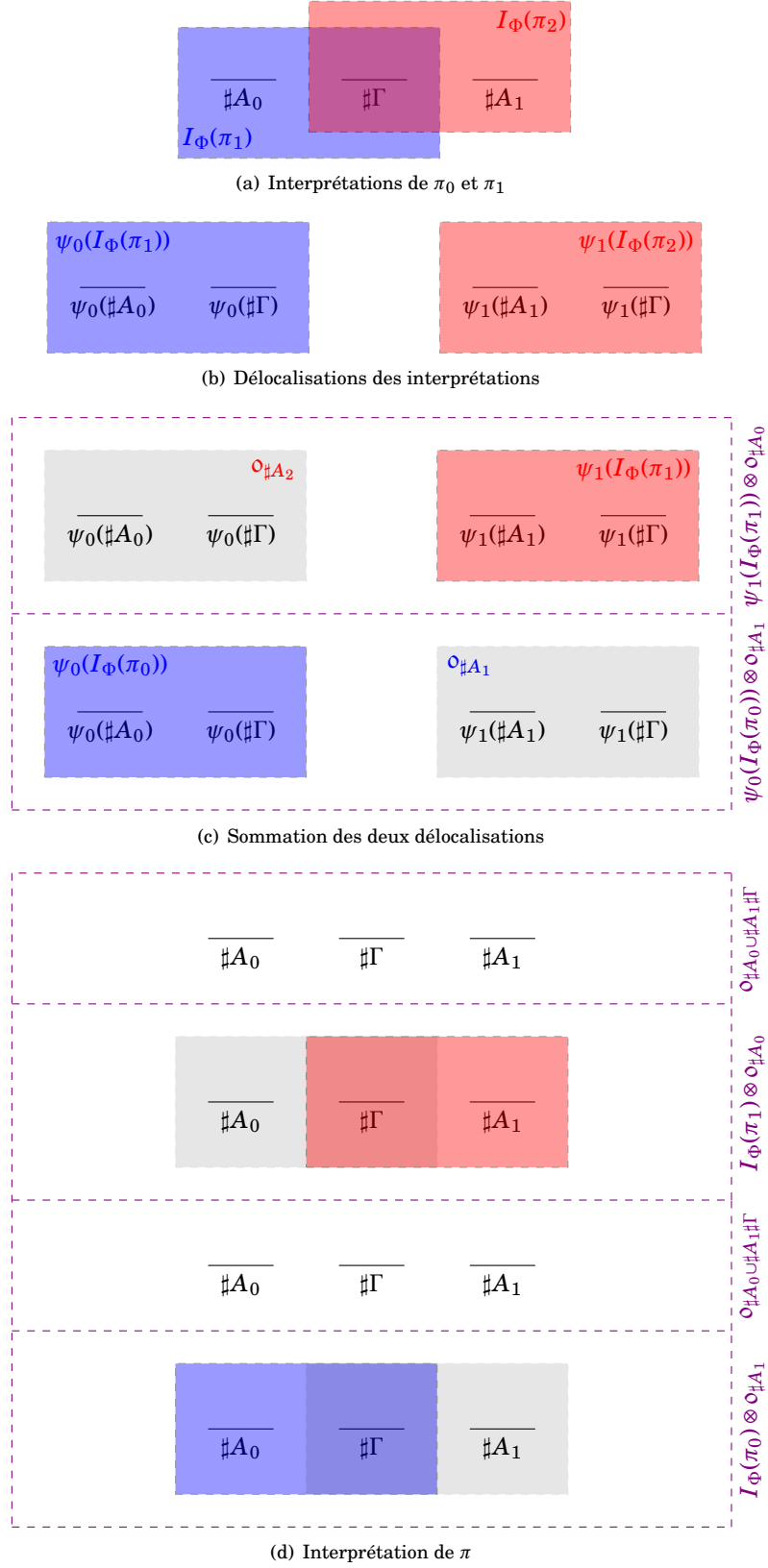


FIGURE 7.4 – Interprétation de la règle $\&$ (de conclusion $\vdash \Gamma, A_0 \& A_1$) entre deux preuves π_0 et π_1 de conclusions respectives $\vdash \Gamma, A_0$ et $\vdash \Gamma, A_1$

§7.3.19 En suivant les remarques §6.3.12 et §6.3.15, on peut également choisir des énumérations des occurrences de variables afin de « localiser » les formules A et les preuves π de $\text{MALL}_{\mathbf{T},\mathbf{0}}$: on obtient des formules A^e et des preuves π^e de $\text{locMALL}_{\mathbf{T},\mathbf{0}}$. Le théorème suivant est alors une simple conséquence du précédent.

§7.3.20 THÉORÈME (ADÉQUATION FORTE POUR $\text{MALL}_{\mathbf{T},\mathbf{0}}$).

Soit Φ une base d'interprétation, π une preuve de $\text{MALL}_{\mathbf{T},\mathbf{0}}$ de conclusion $\vdash \Gamma$, et e une énumération des occurrences de variables dans les axiomes de π . Alors $I_\Phi(\pi^e)$ est un projet additif gagnant dans $I_\Phi(\vdash \Gamma^e)$.

CHAPITRE 8

EXPONENTIELLES

Table des matières

8.1	Changement de tranches et contraction	154
8.2	Graphages	158
8.2.1	Définitions	158
8.2.2	Chemins et Cycles	161
8.2.3	Découpages, Cycles et Exécution	164
8.2.4	Raffinements	166
8.2.5	Mesure des circuits	169
8.2.6	Graphages épais et tranchés	172
8.3	Géométrie de l'interaction	173
8.3.1	Quantification des circuits	173
8.3.2	Conduites Pérennes et Co-Pérennes	176
8.3.3	Second Ordre	179
8.3.4	Une construction des exponentielles	180
8.4	Adéquation	186
8.5	Contraction, Conduites polarisées et ELL_{pol}	191
8.5.1	Définition et propriétés	191
8.5.2	Conduites Polarisées	194

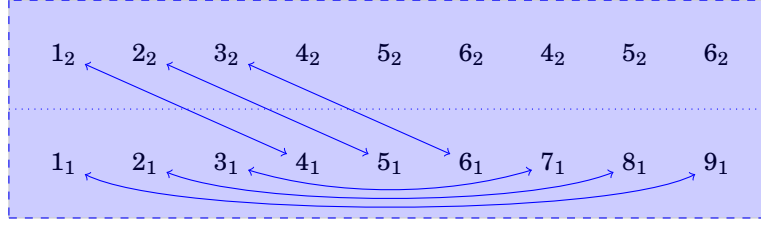


FIGURE 8.1 – Le graphe d'un projet de contraction

8.1 Changement de tranches et contraction

§8.1.1 Dans cette section, nous allons expliquer comment le fait d'avoir des arêtes entre différentes tranches permet d'interpréter la contraction. Pour cela, nous travaillerons uniquement avec des graphes épais tranchés. Le principe de la contraction par changement de tranche est très simple, et le graphe qui implémentera cette transformation sera essentiellement le graphe de la contraction additive (i.e. le graphe qui implémente la distributivité — Proposition §7.1.41 — restreint aux lieux des contextes) auquel on ajoute des changements de tranches.

Le graphe que l'on obtient est donc la superposition de deux $\mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{r}$, mais où l'un des deux change de tranche.

§8.1.2 DÉFINITION (CONTRACTION).

Soit $\phi : V^A \rightarrow W_1$ et $\psi : V^A \rightarrow W_2$ deux bijections avec $V^A \cap W_1 = V^A \cap W_2 = W_1 \cap W_2 = \emptyset$. On définit alors le projet $\mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{r}_\psi^\phi = (0, \text{Ctr}_\psi^\phi)$, où le graphe Ctr_ψ^ϕ est défini par :

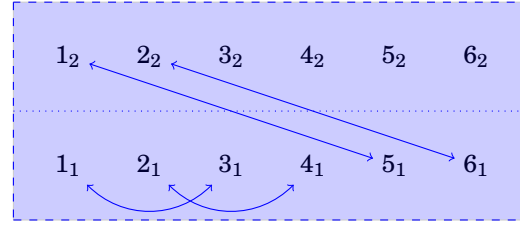
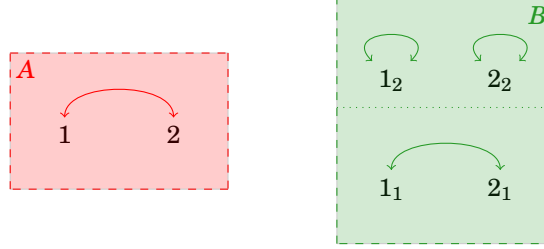
$$\begin{aligned} V^{\text{Ctr}_\psi^\phi} &= V^A \cup W_1 \cup W_2 \\ D^{\text{Ctr}_\psi^\phi} &= \{1, 2\} \\ E^{\text{Ctr}_\psi^\phi} &= V^A \times \{1, 2\} \times \{i, o\} \\ s^{\text{Ctr}_\psi^\phi} &= \begin{cases} (v, 1, o) \mapsto (\phi(v), 1) \\ (v, 1, i) \mapsto (v, 1) \\ (v, 2, o) \mapsto (\psi(v), 1) \\ (v, 2, i) \mapsto (v, 2) \end{cases} \\ t^{\text{Ctr}_\psi^\phi} &= \begin{cases} (v, 1, o) \mapsto (v, 1) \\ (v, 1, i) \mapsto (\phi(v), 1) \\ (v, 2, o) \mapsto (v, 2) \\ (v, 2, i) \mapsto (\psi(v), 1) \end{cases} \\ \omega^{\text{Ctr}_\psi^\phi} &\equiv 1 \end{aligned}$$

§8.1.3 La figure 8.1 illustre le graphe du projet $\mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{r}_\phi^\psi$, avec les fonctions $\phi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}, x \mapsto x + 3$ et $\psi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{7, 8, 9\}, x \mapsto 10 - x$.

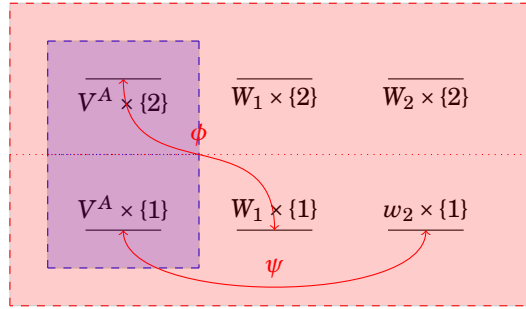
§8.1.4 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{a} = (0, A)$ un projet dans un comportement $\mathbf{A}$, tel que $D^A \cong \{1\}$. Soit ϕ, ψ deux délocalisations $V^A \rightarrow W_1, V^A \rightarrow W_2$ de codomaines disjoints. Alors $\mathfrak{C}\mathfrak{t}\mathfrak{r}_\phi^\psi :: \mathfrak{a} \in \phi(\mathbf{A}) \otimes \psi(\mathbf{A})$.

Démonstration. On notera Ctr le graphe Ctr_ϕ^ψ pour simplifier les notations. On calcule tout d'abord $A :: \text{Ctr}$. On a $A^{\ddagger(1,2)} = (V^A \times \{1, 2\}, E^A \times \{1, 2\}, s^A \times \text{Id}_{\{1,2\}}, t^A \times \text{Id}_{\{1,2\}}, \omega^A \circ \pi)$ où π est

(a) Le graphe du dessin $\mathcal{C}tr_{\psi}^{\phi}$ (b) Les graphes A et B des dessins a et bFIGURE 8.2 – Les graphes des projets $\mathcal{C}tr_{\psi}^{\phi}$, a et b.

la projection : $E^A \times \{1, 2\} \rightarrow E^A, (x, i) \mapsto x$. D'un autre côté, le graphe $\text{Ctr}^{\dagger D^A}$ est un variant du graphe Ctr puisque $D^A \cong \{1\}$. Voici donc à quoi ressemble le branchement de $\text{Ctr}^{\dagger D^A}$ avec $A^{\ddagger(1,2)}$:

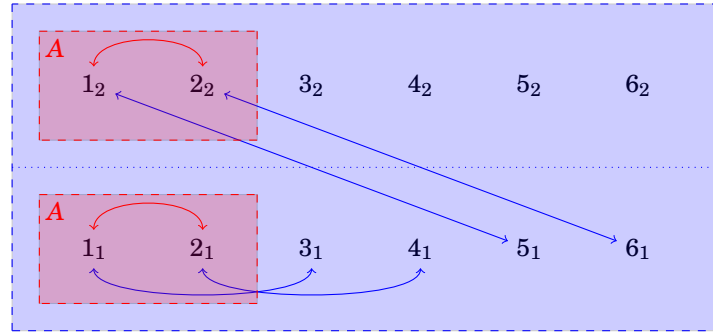
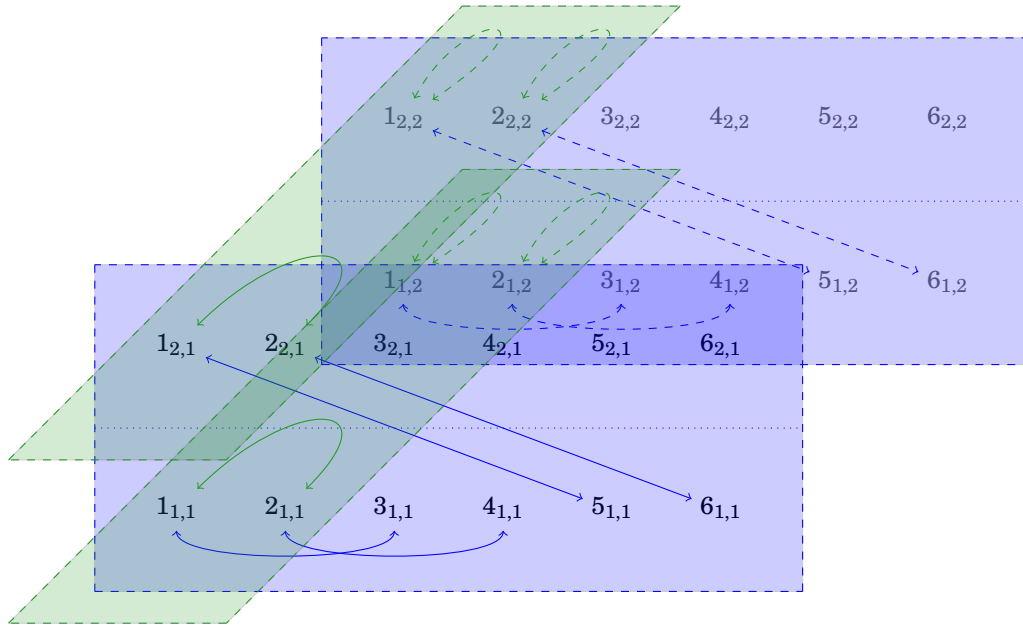
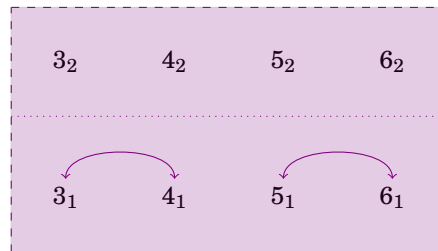
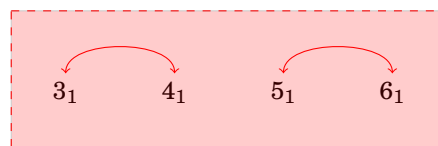


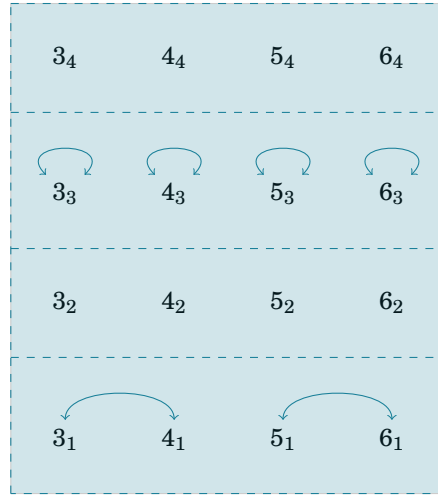
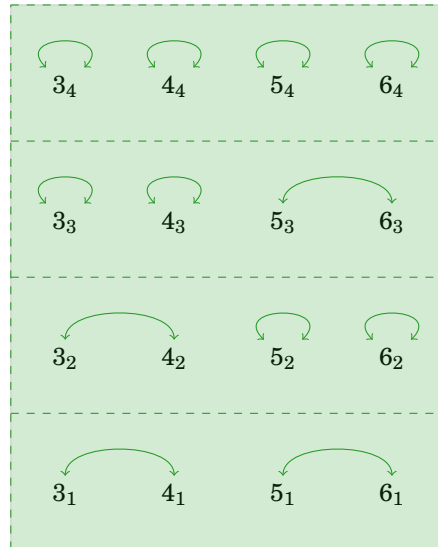
Le résultat de l'exécution est donc un graphe à deux tranches, c'est-à-dire de dialecte $D^A \times \{1, 2\} \cong \{1, 2\}$, qui contient le graphe $\phi(A) \cup \psi(A)$ dans la tranche 1 et qui contient le graphe vide dans la tranche 2.

On en déduit que $\mathcal{C}tr_{\phi}^{\psi} :: a$ est universellement équivalent (Définition §5.3.43) au projet $\frac{1}{2}\phi(a) \otimes \psi(a) + \frac{1}{2}o$ par la Proposition §5.3.47. Comme $\phi(a) \otimes \psi(a) \in \phi(A) \otimes \psi(A)$, alors le projet $\frac{1}{2}(\phi(a) \otimes \psi(a))$ est un élément de $\phi(A) \otimes \psi(A)$ par le lemme d'homothétie §7.1.17. De plus, A est un comportement, et par conséquent $\phi(A) \otimes \psi(A)$ est un comportement et on en déduit que $\frac{1}{2}\phi(a) \otimes \psi(a) + \frac{1}{2}o$ est dans $\phi(A) \otimes \psi(A)$. ☺

§8.1.5 Les figures 8.3, 8.4 et 8.5 illustrent le branchement et l'exécution d'une contraction avec deux graphes : l'un — A — n'ayant qu'une tranche, et l'autre — B — ayant deux tranches (les graphes sont ceux présentés Figure 8.2). On voit ici que l'hypothèse que $D^A \equiv \{1\}$ dans la Proposition précédente est nécessaire, et que les changements de tranches permettent seulement d'implémenter la contraction des graphes n'ayant qu'une tranche.

§8.1.6 On rappelle la proposition §7.1.14

(a) Branchement de Ctr_ψ^ϕ et A (b) Branchement de Ctr_ψ^ϕ et B FIGURE 8.3 – Branchements de Ctr_ψ^ϕ avec les deux graphes A et B (a) Résultat de l'exécution de Ctr_ψ^ϕ et A (b) Le graphe de $\phi(a) \otimes \psi(a)$ FIGURE 8.4 – Les graphes des projets $\text{Ctr}_\psi^\phi :: a$ et $\phi(a) \otimes \psi(a)$

(a) Résultat de l'exécution de Ctr_ψ^ϕ et B (b) Graphe du projet $\phi(b) \otimes \psi(b)$ FIGURE 8.5 – Graphes des projets $\mathcal{C}\text{tr}_\psi^\phi :: b$ et $\phi(b) \otimes \psi(b)$

§8.1.7 PROPOSITION.

Si E est un ensemble non vide de projets de même support V^E , $\mathbf{F}$ est une conduite non vide et $\mathfrak{f}$ est tel que $\forall \epsilon \in E, \mathfrak{f} :: \epsilon \in \mathbf{F}$, alors $\mathfrak{f} \in E^{\perp\perp} \multimap \mathbf{F}$.

§8.1.8 Cette proposition nous assure que si $\mathbf{A}$ est une conduite telle qu'il existe un ensemble E de projets n'ayant qu'une seule tranche avec $\mathbf{A} = E^{\perp\perp}$, alors un projet de contraction $\mathsf{Ct}_{\phi}^{\psi}$ appartient à la conduite $\mathbf{A} \multimap \phi(\mathbf{A}) \otimes \psi(\mathbf{A})$.

Nous trouvons donc ici une raison géométrique à l'introduction des exponentielles. En effet, afin d'utiliser la contraction, nous devons nous assurer d'avoir uniquement des graphes à une tranche. Nous allons donc définir, pour tout comportement $\mathbf{A}$, un comportement $!\mathbf{A}$ engendré par des projets n'ayant qu'une tranche.

§8.1.9 Il faut remarquer qu'une conduite $!\mathbf{A}$ engendrée par un ensemble de projets sans tranches ne peut être un comportement : les projets $(a, \emptyset)$ sont dans l'orthogonal de $!\mathbf{A}$. Il faudra donc introduire les *conduites pérennes* comme les conduites engendrées par un ensemble de projets sans tranches et de mise nulle. Dualelement, nous introduirons les *conduites co-pérennes* comme les conduites orthogonales à des conduites pérennes.

Dans un premier temps, il faudra définir une manière d'associer à un projet sans mise un projet sans mise et sans tranches. On introduit pour cela les *graphes mesurés*, qui sont une généralisation des graphes orientés pondérés : un graphe mesuré sur un ensemble mesurable $(X, \mathcal{B}, m)$ est un graphe orienté pondéré dont les sommets sont des ensembles mesurables, et dont les arêtes sont des transformations préservant la mesure.

8.2 Graphages

Définitions

§8.2.1 L'idée des graphages est de considérer des graphes dont les sommets sont des intervalles de la droite réelle, et les arêtes représentent des transformations préservant la mesure entre leurs intervalles source et but. Certaines difficultés apparaissent lorsque l'on veut définir une notion de graphage qui soit maniable. En effet, un phénomène nouveau apparaît lorsque les sommets sont des intervalles : que faire dans le cas où deux sommets, donc deux intervalles, sont d'intersection non vide ? Les sommets ne sont alors ni disjoints ni égaux. L'une des solutions est de considérer des graphages où les différents sommets sont des intervalles nécessairement disjoints. Cependant, des problèmes complexes se posent très rapidement dans la définition de l'exécution.

§8.2.2 Considérons par exemple deux graphages ayant chacun une arête, et dont le branchement est représenté dans la Figure 8.6. Pour représenter les différents chemins alternants dont la source et le but sont dans la différence symétrique des supports — c'est-à-dire représenter l'exécution — il va falloir découper chacun des intervalles en plusieurs morceaux, chacun correspondant au domaine et/ou codomaine d'un chemin. Dans le cas que nous avons représenté, cette opération n'est pas très compliquée : il suffit de considérer les différents ensembles $(\phi\psi)^{-k}(U_t - V_s) \cap (U_s - V_t)$. Cependant, cela se complique très rapidement avec l'ajout de nouveaux cycles. La Figure 8.7 représente le cas de deux graphages avec deux arêtes chacun. Définir le découpage des sommets induit par l'exécution est — déjà dans ce cas — difficile à définir. En particulier, étant donné que nous considérons des ensembles d'arêtes éventuellement infinis, le nombre de cycles peut être infini, et l'opération est alors d'une extrême complexité.

§8.2.3 Par conséquent, nous avons décidé de travailler avec une présentation différente, où deux sommets distincts peuvent être d'intersection non négligeable, voire même égaux. Il est également nécessaire de considérer que les sommets sont des boréliens quelconques, puisque le découpage ne produit pas nécessairement des intervalles. De plus, il est intéressant de travailler dans un espace mesuré quelconque plutôt que de se restreindre à la droite réelle, en particulier afin d'introduire les tranches. Nous introduisons donc la notion de graphage pondéré en tenant compte de ces remarques. La terminologie est empruntée à un article de

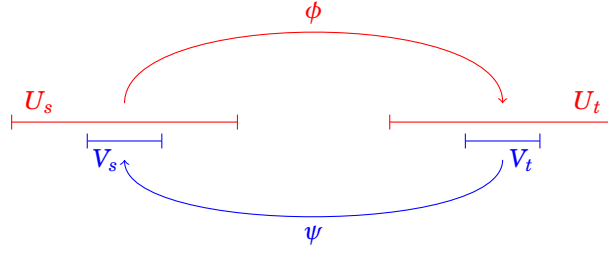


FIGURE 8.6 – Exemple de branchement de graphages

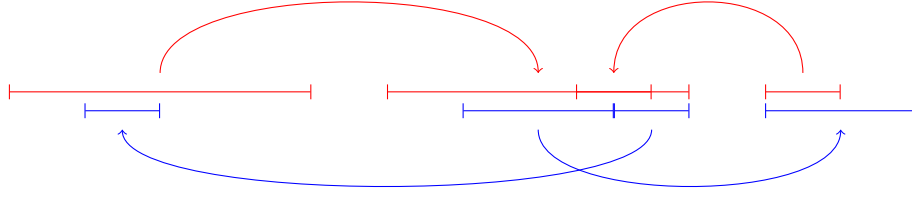


FIGURE 8.7 – Exemple de branchement de graphages

Damien Gaboriau [Gab00], dans lequel est définie la notion de graphage sous-jacente (en oubliant la pondération).

§8.2.4 Comme c'était déjà le cas dans le Chapitre 5, nous fixons un ensemble Ω clos par multiplication qui sera l'ensemble de pondération des graphages. Dans la pratique et pour les exemples nous considérerons $\Omega =]0, 1]$.

§8.2.5 DÉFINITION (GRAPHAGE PONDÉRÉ).

Soit $X = (X, \mathcal{B}, \lambda)$ un espace mesuré et $V^F \in \mathcal{B}$ un ensemble de mesure finie. Un *graphage* sur X de lieu V^F est une famille dénombrable $F = \{(\omega_e^F, \phi_e^F : S_e^F \rightarrow T_e^F)\}_{e \in E^F}$, où, pour tout $e \in E^F$, ω_e^F est un élément de Ω , et ϕ_e^F est une transformation préservant la mesure entre les ensembles mesurables $S_e^F \subset V^F$ et $T_e^F \subset V^F$.

On définit de plus le *lieu effectif* du graphage F comme l'ensemble mesurable $\cup_{e \in E^F} S_e^F \cup T_e^F$ qui est par définition un sous-ensemble du lieu V^F de F .

§8.2.6 REMARQUE. En particulier, on peut remarquer que si F est un graphage pondéré, alors pour tout $e \in E^F$, $\lambda(S_e^F) = \lambda(T_e^F)$.

§8.2.7 REMARQUE. Il est naturel, suite aux constructions proposées au Chapitre 5, de considérer les notions de *graphage cohérents stricts* et de *graphages cohérents*. Un graphage cohérent (resp. cohérent strict) F est un graphage pondéré muni d'une relation de cohérence (resp. cohérence stricte) sur l'ensemble E^F . Les résultats de cette section peuvent être adaptés aux cas de ces types de graphages, mais on se contentera ici de traiter le cas des graphages pondérés.

§8.2.8 Il est usuel, en théorie de la mesure, de travailler à un ensemble négligeable près, c'est-à-dire à un ensemble de mesure nulle près. De la même manière, nous allons travailler avec des graphages à égalité presque partout près. Il faut donc dans un premier temps définir ce que signifie l'égalité presque partout de deux graphages. Nous utiliserons pour cela la notion de graphage vide. Un graphage vide sera égal presque partout au graphage sans arêtes.

§8.2.9 DÉFINITION (GRAPHAGES VIDES).

Un graphage F est dit *vide* si son lieu effectif est de mesure nulle.

§8.2.10 DÉFINITION (ÉGALITÉ PRESQUE PARTOUT).

Deux graphages F, G sont dit *égaux presque partout* s'il existe deux graphages vides $0_F, 0_G$ et

une bijection θ de $E^F \uplus E^{0_F} \rightarrow E^G \uplus E^{0_G}$ telle que :

- pour tout $e \in E^F \uplus E^{0_F}$, $\omega_e^{F \cup 0_F} = \omega_{\theta(e)}^{G \cup 0_G}$;
- pour tout $e \in E^F \uplus E^{0_F}$, $S_e^{F \cup 0_F} \Delta S_{\theta(e)}^{G \cup 0_G}$ est de mesure nulle ;
- pour tout $e \in E^F \uplus E^{0_F}$, $T_e^{F \cup 0_F} \Delta T_{\theta(e)}^{G \cup 0_G}$ est de mesure nulle ;
- pour tout $e \in E^F \uplus E^{0_F}$, $\phi_{\theta(e)}^{G \cup 0_G}$ et $\phi_e^{F \cup 0_F}$ sont égales presque partout sur $S_{\theta(e)}^{G \cup 0_G} \cap S_e^{F \cup 0_F}$;

§8.2.11 REMARQUE. Dans le cas de graphages cohérents ou de graphages cohérents stricts, on ajoute naturellement à ces conditions une condition portant sur la relation de cohérence : pour tout $e, f \in E^F \uplus E^{0_F}$, $e \subset^{F \cup 0_F} f$ si et seulement si $\theta(e) \subset^{G \cup 0_G} \theta(f)$.

§8.2.12 PROPOSITION.

On définit la relation $\sim_{p.p.}$ entre graphages pondérés par :

$$F \sim_{p.p.} G \text{ si et seulement si } F \text{ et } G \text{ sont égaux presque partout}$$

Cette relation est une relation d'équivalence.

Démonstration. Il est clair que cette relation est réflexive et symétrique (il suffit de prendre la bijection θ^{-1}). On montre que celle-ci est transitive. Soit donc F, G, H trois graphages tels que $F \sim_{p.p.} G$ et $G \sim_{p.p.} H$. Il existe donc quatre graphages vides $0_F, 0_{G^F}, 0_{G^H}, 0_H$ et deux bijections $\theta_{F,G} : E^F \uplus E^{0_F} \rightarrow E^G \uplus E^{0_{G^F}}$ et $\theta_{G,H} : E^G \uplus E^{0_{G^H}} \rightarrow E^H \uplus E^{0_H}$ satisfaisant les propriétés listées dans la définition précédente. On remarque que $0_F \uplus 0_{G^H}$ et $0_{G^F} \uplus 0_H$ sont des graphages vides. On définit alors $\theta_{F,H} = (\theta_{G,H} \uplus \text{Id}_{E^{0_{G^F}}}) \circ (\text{Id}_{E^G \uplus E^{0_{G^H}}} \circ \tau) \circ (\theta_{F,G} \uplus \text{Id}_{E^{0_{G^H}}})$, où τ représente la symétrie $E^{0_{G^F}} \uplus E^{0_{G^H}} \rightarrow E^{0_{G^H}} \uplus E^{0_{G^F}}$;

$$\begin{array}{ccc} E^F \uplus E^{0_F} \uplus E^{0_{G^H}} & \xrightarrow{\theta_{F,G} \uplus \text{Id}_{E^{0_{G^H}}}} & E^G \uplus E^{0_{G^F}} \uplus E^{0_{G^H}} \\ \downarrow \theta_{F,H} & & \downarrow \text{Id}_{E^G} \uplus \tau \\ E^H \uplus E^{0_H} \uplus E^{0_{G^F}} & \xleftarrow{\theta_{G,H} \uplus \text{Id}_{E^{0_{G^F}}}} & E^G \uplus E^{0_{G^H}} \uplus E^{0_{G^F}} \end{array}$$

Il est alors facile de vérifier que les trois premières propriétés listées dans la définition précédente sont satisfaites. On se contente donc de montrer que la quatrième propriété est également satisfaite. On oubliera les exposants correspondant aux graphes pour simplifier les notations. On notera de plus $\tilde{\theta}_{F,G}$ (resp. $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\theta}_{G,H}$) la fonction $\theta_{F,G} \uplus \text{Id}_{E^{0_{G^H}}}$ (resp. $\text{Id}_{E^G} \uplus \tau$ et $\theta_{G,H} \uplus \text{Id}_{E^{0_{G^F}}}$).

Soit $e \in E^F \uplus E^{0_F} \uplus E^{0_{G^H}}$:

- si $e \in E^{0_{G^H}}$, alors $\tilde{\theta}_{F,G}(e) = e$, et surtout $\phi_{\tilde{\theta}(e)} = \phi(e)$;
- si $e \in E^F \uplus E^{0_F}$ alors, par définition de $\theta_{F,G}$, $\phi_{\tilde{\theta}(e)}$ est presque partout égale à ϕ_e sur $S_e \cap S_{\tilde{\theta}(e)}$.

Donc $\phi_{\tilde{\theta}(e)}$ et ϕ_e sont égales presque partout sur $S_e \cap S_{\tilde{\theta}(e)}$ dans tous les cas. Un raisonnement similaire montre que pour tout $f \in E^G \uplus E^{0_H} \uplus E^{0_{G^F}}$, les fonctions $\phi_{\theta_{G,H}(f)}$ et ϕ_f sont égales presque partout sur $S_{\theta_{G,H}(f)} \cap S_f$.

De plus, $\phi_{\tilde{\theta}_{F,G}(e)}$ et $\phi_{\tilde{\tau}(\tilde{\theta}_{F,G}(e))}$ sont égales et de même domaine $S_{\tilde{\theta}_{F,G}(e)} = S_{\tilde{\tau}(\tilde{\theta}_{F,G}(e))}$. D'où $\phi_{\tilde{\tau}(\tilde{\theta}_{F,G}(e))}$ et ϕ_e sont égales presque partout sur $S_{\tilde{\tau}(\tilde{\theta}(e))} \cap S_e$. Or $\phi_{\tilde{\tau}(\tilde{\theta}_{F,G}(e))}$ et $\phi_{\tilde{\theta}_{G,H}(\tilde{\tau}(\tilde{\theta}_{F,G}(e)))}$ sont presque partout égales sur $S_{\tilde{\tau}(\tilde{\theta}_{F,G}(e))} \cap S_{\tilde{\theta}_{G,H}(\tilde{\tau}(\tilde{\theta}_{F,G}(e)))}$. On en déduit que les fonctions ϕ_e et $\phi_{\theta_{F,H}(e)}$ sont égales presque partout sur

$$S_e \cap S_{\theta_{F,H}(e)} \cap S_{\tilde{\tau}(\tilde{\theta}_{F,G}(e))} = S_e \cap S_{\theta_{F,H}(e)} \cap S_{\tilde{\theta}_{F,G}(e)}$$

On note Z l'ensemble de mesure nulle sur lequel elles diffèrent. Or, comme $S_e \Delta S_{\tilde{\theta}_{F,G}(e)}$ est de mesure nulle, il existe des ensembles X, Y de mesure nulle tels que $S_e \cup X = S_{\tilde{\theta}_{F,G}(e)} \cup Y$. On en déduit¹ que $S_{\tilde{\theta}_{F,G}(e)} = S_e \cup X - Y$. D'où

$$S_e \cap S_{\theta_{F,H}(e)} \cap S_{\tilde{\theta}_{F,G}(e)} = S_e \cap S_{\tilde{\theta}_{F,H}(e)} \cap (S_e \cup X - Y) = S_e \cap S_{\tilde{\theta}_{F,H}(e)} \cap S_e - Y = S_e \cap S_{\tilde{\theta}_{F,H}(e)} - Y$$

On en conclut alors que les fonctions ϕ_e et $\phi_{\tilde{\theta}_{F,H}(e)}$, restreintes à $S_e \cap S_{\tilde{\theta}_{F,H}(e)}$, diffèrent au plus sur $Y \cup Z$ qui est un ensemble de mesure nulle. $\odot$

Chemins et Cycles

§8.2.13 Le choix consistant à autoriser différents sommets à avoir une intersection non nulle rend le branchement plus facile à définir à première vue. Il faut cependant définir ce qu'est un chemin, puisque nous ne pouvons garder la notion de chemin dans un graphe définie au Chapitre 5. Comme auparavant, un chemin sera une suite d'arêtes. On remplacera la condition qui demandait que le but d'une arête soit égal à la source de l'arête qui lui succède par le fait que l'intersection de ces mêmes source et but soit de mesure non nulle, c'est-à-dire non négligeable.

§8.2.14 DÉFINITION (BRANCHEMENT).

Étant donné deux graphages pondérés F, G on définit leur branchement $F \tilde{\square} G$ comme le graphage $F \uplus G$ muni de la fonction de coloriage $\delta : E^{F \uplus G} \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\delta(e) = 1$ si et seulement si $e \in E^G$.

§8.2.15 DÉFINITION (CHEMINS ALTERNÉS).

Un chemin dans un graphage F est une suite finie $\{e_i\}_{i=0}^n$ d'éléments de E^F telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $T_{e_i}^F \cap S_{e_{i+1}}^F$ est de mesure non nulle.

Un *chemin alterné* entre deux graphages F, G est un chemin $\{e_i\}_{i=0}^n$ dans le graphage $F \tilde{\square} G$ tel que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $\delta(e_i) \neq \delta(e_{i+1})$. On notera $\text{Ch}^m(F, G)$ l'ensemble des chemins alternés dans $F \tilde{\square} G$.

On définit de plus le *poids* d'un chemin $\pi = \{e_i\}_{i=0}^n$ dans un graphage F comme le scalaire $\omega_\pi^F = \prod_{i=0}^n \omega_{e_i}^F$.

§8.2.16 Étant donné un chemin $\{e_i\}_{i=0}^n$ dans un graphage F , on peut définir une fonction ϕ_π^F comme la transformation partielle :

$$\phi_\pi^F = \phi_{e_n}^F \circ \chi_{T_{e_n}^F \cap S_{e_{n-1}}^F} \circ \phi_{e_{n-1}}^F \circ \chi_{T_{e_{n-1}}^F \cap S_{e_{n-2}}^F} \circ \cdots \circ \chi_{T_{e_1}^F \cap S_{e_0}^F} \circ \phi_{e_0}^F$$

où pour tout mesurable A , la fonction χ_A est l'identité partielle $A \rightarrow A$.

On note respectivement S_π et T_π les domaines et codomaines de cette transformation partielle $S_{e_0}^F \rightarrow T_{e_n}^F$. Il est alors clair que la transformation $\phi_\pi^F : S_\pi \rightarrow T_\pi$ est une transformation qui préserve la mesure.

§8.2.17 DÉFINITION (CYCLES ALTERNÉS).

Un cycle dans un graphage F est un chemin $\{e_i\}_{i=0}^n$ dans F tel que $S_{e_0}^F \cap T_{e_n}^F$ soit de mesure non nulle.

Un cycle alterné entre deux graphages pondérés F, G est un cycle $\{e_i\}_{i=0}^n$ dans $F \tilde{\square} G$ qui est un chemin alterné et tel que $\delta(e_0) \neq \delta(e_n)$. On notera $\text{Cy}^m(F, G)$ l'ensemble des cycles alternants entre F et G .

§8.2.18 On va maintenant introduire la notion de *découpage* d'un graphage suivant un ensemble mesurable C . Cela consiste à remplacer une arête par quatre arêtes disjointes selon que la source (resp. le but) est dans l'ensemble C ou dans son complémentaire.

§8.2.19 DÉFINITION (DÉCOUPAGE).

Soit $\phi : S \rightarrow T$ une transformation préservant la mesure, C un ensemble mesurable et C^c son

1. On peut choisir X de manière à ce que $S_{\tilde{\theta}_{F,G}(e)} \cap Y = \emptyset$.

complémentaire. On définit les transformations préservant la mesure :

$$\begin{aligned} [\phi]_i^i &= \phi|_{C \cap \phi^{-1}(C)} : A \cap C \cap \phi^{-1}(C) \rightarrow B \cap \phi(C) \cap C \\ [\phi]_i^o &= \phi|_{C \cap \phi^{-1}(C^c)} : A \cap C \cap \phi^{-1}(C^c) \rightarrow B \cap \phi(C) \cap C^c \\ [\phi]_o^i &= \phi|_{C^c \cap \phi^{-1}(C)} : A \cap C^c \cap \phi^{-1}(C) \rightarrow B \cap \phi(C^c) \cap C \\ [\phi]_o^o &= \phi|_{C^c \cap \phi^{-1}(C^c)} : A \cap C^c \cap \phi^{-1}(C^c) \rightarrow B \cap \phi(C^c) \cap C^c \end{aligned}$$

On notera $[S]_a^b, [T]_a^b$ ($a, b \in \{i, o\}$) les domaines et codomaines de $[\phi]_a^b$.

Si F est un graphage, on définit alors $F^{\vee C} = \{(\omega_e^F, [\phi_e^F]_a^b) \mid e \in E^F, a, b \in \{i, o\}\}$.

§8.2.20 Dans certains cas, le découpage d'un graphage G selon un ensemble mesurable C ne modifie pas vraiment G . En effet, si chacune des arêtes a sa source et son but inclus (à un ensemble de mesure nulle près) dans C ou bien son complémentaire, le graphage obtenu après le découpage est égal presque partout au graphage G .

§8.2.21 DÉFINITION.

Soit A, B deux ensembles mesurables. On dira que A est d'intersection triviale avec B si $\lambda(A \cap B) = 0$ ou $\lambda(A \cap B^c) = 0$.

Si F est un graphage et que pour tout $e \in E^F$, S_e^F et T_e^F sont d'intersection triviale avec C , alors on dit que F est C -résistant.

§8.2.22 LEMME.

Soit F un graphage, et C un ensemble mesurable. Si F est C -résistant, alors $F^{\vee C} \sim_{p.p.} F$.

Démonstration. Soit $e \in E^F$. Comme F est C -résistant, on est dans l'un des quatre cas suivants :

- $S_e^F \cap C$ et $T_e^F \cap C$ sont de mesure nulle ;
- $S_e^F \cap C$ et $T_e^F \cap C^c$ sont de mesure nulle ;
- $S_e^F \cap C^c$ et $T_e^F \cap C$ sont de mesure nulle ;
- $S_e^F \cap C^c$ et $T_e^F \cap C^c$ sont de mesure nulle ;

Les quatre cas se traitent de manière similaire. En effet, des fonctions $[\phi_e^F]_a^b$, $a, b \in \{i, o\}$, une seule est de domaine (et donc de codomaine) de mesure non nulle. On définit donc un graphage vide 0_F , avec $E^{0_F} = E^F \times \{1, 2, 3\}$, et on peut définir une bijection $E^{F^{\vee C}} \rightarrow E^F \uplus E^{0_F}$ qui associe à l'élément (e, a, b) ($e \in E^F, a, b \in \{i, o\}$) l'élément $e \in E^F$ si le domaine de $[\phi_e^F]_a^b$ est de mesure non nulle, et un des éléments $(e, i) \in E^{0_F}$ sinon. On peut alors vérifier que cette bijection vérifie les propriétés voulues. Finalement, $F \sim_{p.p.} F^{\vee C}$. ☺

§8.2.23 Grâce à la notion de découpage, on peut maintenant définir l'exécution de deux graphages F et G : on considère l'ensemble des chemins alternés entre F et G , puis on ne garde que la partie de ce chemin qui est externe à l'intersection C des lieux de F et G . On peut définir, pour chacun des cadres définis dans le Chapitre 5, sa généralisation aux graphages. Ainsi, l'exécution sur les graphages pondérés est la généralisation de l'exécution sur les graphes orientés pondérés.

§8.2.24 DÉFINITION (EXÉCUTION).

Soit F, G deux graphages pondérés de lieux respectifs V^F, V^G et soit $C = V^F \cap V^G$. On définit le graphage $F \text{ :m: } G$ comme la famille

$$\{(\omega_\pi^{F \text{ :m: } G}, \phi_\pi^{F \text{ :m: } G} : [S_\pi]_o^o \rightarrow [T_\pi]_o^o) \mid \pi \in \text{Ch}^m(F, G), \lambda([S_\pi]_o^o) \neq 0\}$$

§8.2.25 On veut maintenant définir l'ensemble des fonctions représentant les circuits entre les graphages. C'est là que les choses se compliquent : si π_1 et π_2 sont deux cycles représentant le même circuit (c'est-à-dire que π_1 est une permutation cyclique de π_2) les fonctions ϕ_{π_1} et ϕ_{π_2} ne sont en général pas égales ! On se contente alors pour le moment de définir un tel ensemble pour chaque choix de famille de représentants des circuits. Il faudra cependant tenir compte

de cette non-uniformité plus tard, lors de la définition des fonctions de quantification des circuits (dans les cas — ceux qui nous intéressent — où celle-ci dépend des fonctions $\phi_{\pi_1}, \phi_{\pi_2}$ associées aux représentants des circuits).

§8.2.26 DÉFINITION.

Soit F, G deux graphages pondérés. On note $\text{Cy}^m(F, G)$ l'ensemble des cycles alternants entre F et G . Un *choix de représentant des circuits* est un ensemble $\text{Rep}(F, G)$ tel que pour tout élément ρ de $\text{Cy}^m(F, G)$ il existe un unique élément π de $\text{Rep}(F, G)$ tel que $\bar{\rho} = \bar{\pi}$ (on rappelle que $\bar{\pi}$ est la classe d'équivalence de π modulo l'action des permutations cycliques, voir Proposition §5.1.12).

§8.2.27 DÉFINITION (CIRCUITS ET 1-CIRCUITS).

Si F, G sont des graphages pondérés et $\text{Rep}(F, G)$ est un choix de représentant des circuits alternants entre F et G , on définit :

$$\text{Circ}^m(F, G) = \{[\phi_\pi]_i^i \mid \pi \in \text{Rep}(F, G)\}$$

§8.2.28 PROPOSITION.

Soit F, F', G des graphages tels que $F \sim_{p.p.} F'$. Alors il existe une bijection

$$\theta : \text{Ch}^m(F, G) \rightarrow \text{Ch}^m(F', G)$$

telle que $\phi_\pi = \phi_{\theta(\pi)}$ pour tout chemin π .

Démonstration. Par définition, il existe deux graphages vides $0_F, 0_{F'}$ et une bijection θ de $E^{F'} \uplus E^{0_{F'}} \rightarrow E^F \uplus E^{0_F}$ telle que :

- pour tout $e \in E^{F'} \uplus E^{0_{F'}}$, $\omega_e^{F' \cup 0_{F'}} = \omega_{\theta(e)}^{F \cup 0_F}$;
- pour tout $e \in E^{F'} \uplus E^{0_{F'}}$, $S_e^{F' \cup 0_{F'}} \Delta S_{\theta(e)}^{F \cup 0_F}$ est de mesure nulle ;
- pour tout $e \in E^{F'} \uplus E^{0_{F'}}$, $T_e^{F' \cup 0_{F'}} \Delta T_{\theta(e)}^{F \cup 0_F}$ est de mesure nulle ;
- pour tout $e \in E^{F'} \uplus E^{0_{F'}}$, $\phi_e^{F' \cup 0_{F'}}$ et $\phi_{\theta(e)}^{F \cup 0_F}$ sont égales presque partout ;

Soit π un chemin alterné dans $F \square G$. On traite par exemple le cas $\pi = f_0 g_0 \dots f_n g_n$. On peut alors définir un chemin $\theta^{-1}(\pi)$ dans $F' \square G$ par $\pi' = \theta^{-1}(f_0) g_0 \theta^{-1}(f_1) \dots \theta^{-1}(f_n) g_n$. En effet, comme les ensembles $S_{f_{i+1}} \cap T_{g_i}$ (resp. $S_{g_i} \cap T_{f_i}$) sont de mesure non nulle, alors $\theta^{-1}(f_{i+1})$ (resp. $\theta^{-1}(f_i)$) est de mesure non nulle (donc un élément de $E^{F'}$) et vérifie de plus $S_{\theta^{-1}(f_{i+1})} \cap T_{g_i}$ (resp. $S_{g_i} \cap T_{\theta^{-1}(f_i)}$).

Inversement, un chemin $\pi' = e_0 g_0 \dots e_n g_n$ dans $F' \square G$ permet de définir un chemin $\theta(\pi') = \theta(e_0) g_0 \theta(e_1) \dots \theta(e_n) g_n$. Il est clair que $\theta(\theta^{-1}(\pi)) = \pi$ (resp. $\theta^{-1}(\theta(\pi')) = \pi'$) pour tout chemin π (resp. π') dans $F \square G$ (resp. $F' \square G$). ☺

§8.2.29 On vérifie également que la notion d'exécution est compatible avec la notion d'égalité presque partout. En effet, étant donné que nous souhaitons travailler avec des classes d'équivalences de graphages pondérés, il faut que l'exécution ne dépende pas des représentants choisis.

§8.2.30 COROLLAIRE.

Soit F, F', G des graphages tels que $F \sim_{p.p.} F'$. Alors $F :_m G \sim_{p.p.} F' :_m G$.

Démonstration. Soit θ la bijection définie par la proposition précédente. On remarque que $\omega_\pi = \omega_{\theta^{-1}(\pi)}$, et que ϕ_π et $\phi_{\theta^{-1}(\pi)}$ sont égales presque partout car composition de fonctions égales presque partout. En particulier, leurs domaines et codomaines ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle. Cela nous permet de conclure que $\theta : E^{F' :_m G} \rightarrow E^{F :_m G}$ vérifie toutes les propriétés voulues : $F' :_m G$ et $F :_m G$ sont égaux presque partout. ☺

§8.2.31 COROLLAIRE.

Soit F, F', G des graphages tels que $F \sim_{p.p.} F'$. Alors $\text{Cy}^m(F, G) \cong \text{Cy}^m(F', G)$.

Démonstration. Soit θ la bijection définie dans la preuve de la Proposition §8.2.28. Les fonctions ϕ_π et $\phi_{\theta(\pi)}$ sont égales presque partout et leurs domaines et codomains ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle. On en déduit que $[\phi_\pi]_i^i$ et $[\phi_{\theta^{-1}(\pi)}]_i^i$ sont égales presque partout, et que leurs domaines et codomains ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle. $\odot$

Découpages, Cycles et Exécution

§8.2.32 Nous allons maintenant montrer un résultat technique qui sera utile pour la suite, et qui permet de mieux appréhender l'exécution entre deux graphages. L'exécution des graphages F et G est définie comme une restriction de l'ensemble des chemins alternés entre F et G . Nous aurions également pu découper F et G selon l'intersection C des lieux de F et de G , puis définir l'exécution comme l'ensemble des chemins dont la source et le but sont à l'extérieur de la coupure C . Le lemme technique que nous allons présenter énonce que ces deux opérations sont équivalentes.

§8.2.33 Soit F, G deux graphages et $C = V^F \cap V^G$. On peut remarquer qu'il doit y avoir une correspondance bijective entre les arêtes de $F : m : G$ et celles de $F^{\check{Y}C} : m : G^{\check{Y}C}$. En effet, pour que deux arêtes e, f soient consécutives dans un chemin, alors nécessairement $S_e \cap T_f$ est de mesure non nulle. Or on peut remarquer, puisque $S_g \cap T_f$ et $S^f \cap S_g$ sont inclus dans C , que les termes suivants sont égaux :

$$\chi_{S_g \cap T_f} \circ \phi_f^F \circ \chi_{S^f \cap S_g} \quad \text{et} \quad \chi_{S_g \cap T_f \cap C \cap \phi_f^F(C)} \circ (\phi_f^F)_{\downarrow_{C \cap (\phi_f^F)^{-1}(C)}} \circ \chi_{S^f \cap S_{g_i} \cap C \cap (\phi_f^F)^{-1}(C)}$$

On en déduit :

$$\chi_{S_g \cap T_f} \circ \phi_f^F \circ \chi_{S^f \cap S_g} = \chi_{S_g \cap [T_f]_i^i} \circ [\phi_f^F]_i^i \circ \chi_{[S^f]_i^i \cap S_g}$$

De la même manière, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \chi_{C^c} \circ \phi_f \circ \chi_{S_f \cap T_g} &= \chi_{C^c} \circ [\phi_f]_i^o \circ \chi_{[S_f]_i^o \cap T_g} \\ \chi_{S_g \cap T_f} \circ \phi_f \circ \chi_{C^c} &= \chi_{S_g \cap [T_f]_i^o} \circ [\phi_f]_i^o \circ \chi_{C^c} \\ \chi_{C^c} \circ \phi_f \circ \chi_{C^c} &= \chi_{C^c} \circ [\phi_f]_i^o \circ \chi_{C^c} \end{aligned}$$

§8.2.34 LEMME.

Soit F, G deux graphages, V^F, V^G leurs lieux et $C = V^F \cap V^G$. Alors :

$$F : m : G = F^{\check{Y}C} : m : G$$

Démonstration. Par définition, l'exécution $F : m : G$ est le graphage

$$\{(\omega_\pi^{F \check{\square} G}, \phi_\pi^{F \check{\square} G} : [S_\pi]_o^o \rightarrow [T_\pi]_o^o) \mid \pi \in \text{Ch}^m(F, G), \lambda([S_\pi]_o^o) \neq 0\}$$

De même, l'exécution $F^{\check{Y}C} : m : G$ est le graphage

$$\{(\omega_\pi^{F^{\check{Y}C} \check{\square} G}, \phi_\pi^{F^{\check{Y}C} \check{\square} G} : [S_\pi]_o^o \rightarrow [T_\pi]_o^o) \mid \pi \in \text{Ch}^m(F^{\check{Y}C}, G), \lambda([S_\pi]_o^o) \neq 0\}$$

Soit π un chemin alterné dans $F \check{\square} G$. Alors π est une suite alternée d'éléments de E^F et d'éléments de E^G . On suppose par exemple que $\pi = f_0 g_0 f_1 \dots f_k g_k f_{k+1}$, et on notera $\tilde{\pi} = [f_0]_i^o g_0 [f_1]_i^i \dots [f_k]_i^i g_k [f_{k+1}]_i^o$. La fonction $[\phi_\pi^{F \check{\square} G}]_o^o$ est égale à :

$$\begin{aligned} \chi_{C^c \cap \phi_\pi^{F \check{\square} G}(C^c)} \circ \phi_{f_{k+1}}^F \circ \chi_{S_{f_{k+1}} \cap T_{g_k}} \circ \phi_{g_k}^G \circ \dots \\ \dots \circ \phi_{g_{i+1}}^G \circ \chi_{S_{g_{i+1}} \cap T_{f_{i+1}}} \circ \phi_{f_{i+1}}^F \circ \chi_{S_{f_{i+1}} \cap T_{g_i}} \circ \phi_{g_i}^G \circ \dots \\ \dots \circ \phi_{g_0}^G \circ \chi_{S_{g_0} \cap T_{f_0}} \circ \phi_{f_0}^F \circ \chi_{C^c \cap (\phi_\pi^{F \check{\square} G})^{-1}(C^c)} \end{aligned}$$

En utilisant les remarques précédentes, on obtient alors que $[\phi_\pi^{F\check{\square}G}]_o^o$ est égale à :

$$\begin{aligned} \chi_{C^c \cap \phi_\pi^{F\check{\square}G}(C^c)} \circ [\phi_{f_{k+1}}^F]_i^o \circ \chi_{[S_{f_{k+1}}]_i^o \cap T_{g_k}} \circ \phi_{g_k}^G \circ \dots \\ \dots \circ \phi_{g_{i+1}}^G \circ \chi_{S_{g_{i+1}} \cap [T_{f_{i+1}}]_i^i} \circ [\phi_{f_{i+1}}^F]_i^i \circ \chi_{[S_{f_{i+1}}]_i^i \cap T_{g_i}} \circ \phi_{g_i}^G \circ \dots \\ \dots \circ \phi_{g_0}^G \circ \chi_{S_{g_0} \cap [T_{f_0}]_o^o} \circ [\phi_{f_0}^F]_o^o \circ \chi_{C^c \cap (\phi_\pi^{F\check{\square}G})^{-1}(C^c)} \end{aligned}$$

On a donc $[\phi_\pi^{F\check{\square}G}]_o^o = [\phi_\pi^{F\check{\square}G}]_o^o$. Inversement, chaque chemin alterné dans $F\check{\square}G$ dont la première arête est dans $F\check{\square}G$ est nécessairement de la forme $[f_0]_i^o g_0 [f_1]_i^i \dots [f_k]_i^i g_k [f_{k+1}]_o^i$ où $f_0 g_0 f_1 \dots f_k g_k f_{k+1}$ est un chemin alterné dans $F\check{\square}G$.

Les autres cas sont traités de manière similaire. $\odot$

§8.2.35 COROLLAIRE.

Soit F, G deux graphages, V^F, V^G leur lieux et $C = V^F \cap V^G$. Alors :

$$F :_m G = F^{\check{\square}C} :_m G^{\check{\square}C}$$

§8.2.36 De la même manière, les ensembles de cycles sont égaux.

§8.2.37 LEMME.

Soit F, G deux graphages, V^F, V^G leurs lieux, et $C = V^F \cap V^G$. Alors :

$$\text{Cy}^m(F, G) = \text{Cy}^m(F^{\check{\square}C}, G)$$

Démonstration. Le raisonnement est similaire à celui de la proposition précédente. En effet, si $\pi = e_0 \dots e_n$ est un cycle alterné entre F et G , alors on lui associe le cycle $[\pi] = [e_0]_i^i [e_1]_i^i \dots [e_n]_i^i$. Inversement, si π' est un cycle dans $F\check{\square}G$, alors chaque arête de π' est nécessairement de la forme $[e]_i^i$ pour un élément e de F . De plus, les fonctions associées sont égales, c'est-à-dire que $[\phi_\pi]_i^i = \phi_{[\pi]}$. $\odot$

§8.2.38 LEMME.

Soit F un graphage, et $\pi = e_0 \dots e_n$ un chemin dans F tel que S_π soit de mesure non nulle. On note, pour tout couple d'entiers $i < j$ par $\rho_{i,j}$ le chemin $e_i e_{i+1} \dots e_j$. Alors :

- pour tout $0 < i < j \leq n$, $S_{\rho_{i,j}} \cap T_{e_{i-1}}$ est de mesure non nulle ;
- pour tout $0 \leq i < j < n$, $T_{\rho_{i,j}} \cap S_{e_{j+1}}$ est de mesure non nulle,

Démonstration. Soit i, j fixés. On suppose que $S_{\rho_{i,j}} \cap T_{e_{i-1}}$ est de mesure nulle. Alors pour tout $x \in S_{\rho_{i,j}}$, $\phi_{e_0 \dots e_{i-1}}$ est défini en x , et tel que $\phi_{e_i \dots e_n}$ soit défini en $\phi_{e_0 \dots e_{i-1}}(x)$. Donc en particulier, $\phi_{e_i \dots e_j}$ est défini en $\phi_{e_0 \dots e_{i-1}}(x)$, c'est-à-dire que $\phi_{e_0 \dots e_{i-1}}(x)$ appartient à $S_{\rho_{i,j}}$. De plus, et par définition, $\phi_{e_0 \dots e_{i-1}}(x)$ appartient à $T_{e_{i-1}}$. Donc $\phi_{e_0 \dots e_{i-1}}(S_\pi) \subset S_{\rho_{i,j}} \cap T_{e_{i-1}}$. Comme $\phi_{e_0 \dots e_{i-1}}$ est une transformation préservant la mesure définie en tout $x \in S_\pi$, on en déduit que $\lambda(S_\pi) \leq \lambda(S_{\rho_{i,j}} \cap T_{e_{i-1}})$. Ce qui mène à une contradiction, puisque cela implique que $\lambda(S_\pi) = 0$.

Un raisonnement similaire montre que $T_{\rho_{i,j}} \cap S_{e_{j+1}}$ est également de mesure non nulle. $\odot$

§8.2.39 REMARQUE. On a montré dans la preuve précédente que $\lambda(S_\pi) \leq \lambda(S_{\rho_{i,j}} \cap T_{e_{i-1}})$ pour tout i, j . En particulier, $\lambda(S_\pi) \leq \lambda(S_{e_i} \cap T_{e_{i-1}})$, et donc :

$$\lambda(S_\pi) \leq \min\{\lambda(S_{e_i} \cap T_{e_{i-1}}) \mid i = 1 \dots n\}$$

§8.2.40 Comme dans le cas des graphes, nous pouvons montrer que l'exécution est une opération associative sous réserve que l'intersection des lieux des trois graphages soit négligeable.

§8.2.41 PROPOSITION (ASSOCIATIVITÉ DE L'EXÉCUTION).

Soit F, G, H trois graphages tels que $\lambda(V^F \cap V^G \cap V^H) = 0$. Alors :

$$F :_m (G :_m H) = (F :_m G) :_m H$$

Démonstration. On peut tout d'abord supposer que F (resp. G , resp. H) est $C_F = V^F \cap (V^G \cup V^H)$ -résistant (resp. $C_G = V^G \cap (V^F \cup V^H)$ -résistant, resp. $C_H = V^H \cap (V^F \cup V^G)$ -résistant), puisque s'ils ne le sont pas, il suffit de les découper selon C_F (resp. C_G , resp. C_H). Cela permet de simplifier l'argument qui suit puisque nous considérons simplement des chemins, et non des restrictions de chemins. La preuve est alors similaire à celle de l'associativité de l'exécution dans les graphes orientés pondérés (Théorème §5.2.5).

On peut définir le branchement simultané de F, G, H comme le graphage $F \uplus G \uplus H$ muni de la fonction de coloriage δ définie par $\delta(e) = 0$ lorsque $e \in E^F$, $\delta(e) = 1$ lorsque $e \in E^G$ et $\delta(e) = 2$ si $e \in E^H$. On définit alors simplement l'ensemble des chemins 3-alternés entre F, G, H comme les chemins $e_0 e_1 \dots e_n$ tels que si $\delta(e_i) \neq \delta(e_{i+1})$.

Si $e_0 f_0 e_1 \dots f_{k-1} e_k f_k$ est un chemin alterné dans $F :_{\text{m}} (G :_{\text{m}} H)$, où chaque e_i est un chemin alterné $e_i = g_0^i h_0^i \dots g_{n_i}^i h_{n_i}^i$, alors la suite d'arêtes obtenue en remplaçant e_i par la suite (en oubliant les parenthèses) est un chemin. En effet, on sait par exemple que $S_{e_i} \cap T_{f_{i-1}}$ est de mesure non nulle, or $S_{e_i} \subset S_{g_0}$ donc $S_{g_0} \cap T_{f_{i-1}}$ est de mesure non nulle et on a défini un chemin 3-alterné entre F, G et H . Les deux chemins définissent la même transformation partielle préservant la mesure, et possèdent le même domaine et codomaine.

Inversement, si $e_0 e_1 \dots e_n$ est un chemin 3-alterné entre F, G et H , alors on peut le voir comme une suite alternée d'arêtes dans F et de suites alternées entre G et H . Soit $\pi = g_0 h_0 \dots g_k h_k$ le chemin défini par une telle suite apparaissant dans le chemin $e_0 \dots e_n$. On utilise le lemme précédent pour montrer que $S_\pi \cap T_{e_j}$ est de mesure non nulle. De même, $T_\pi \cap S_{e_k}$ est de mesure non nulle. On a donc montré que l'on avait une arête dans $F :_{\text{m}} (G :_{\text{m}} H)$. Les deux chemins définissent la même transformation partielle préservant la mesure, et ont donc le même domaine et codomaine. $\odot$

Raffinements

§8.2.42 Afin de gérer le second ordre, nous allons définir la notion de raffinement d'un graphage. Obtenir un raffinement d'un graphage est une opération relativement naturelle. L'exemple le plus simple est de prendre un graphage F et une arête $e \in E^F$, et de découper cette arête en deux arêtes disjointes f, f' avec $S_f \cup S_{f'} = S_e$ et $S_f \cap S_{f'}$ négligeable (il faut alors définir $T_f = \phi_e(S_f)$ et $T_{f'} = \phi_e(S_{f'})$).

§8.2.43 DÉFINITION (RAFFINEMENTS).

Soit F, G deux graphages. On dit que F est un *raffinement* de G — noté parfois $F \leq G$ — s'il existe une fonction $\theta : E^F \rightarrow E^G$ telle que :

- pour tout $e, e' \in E^F$ tels que $\theta(e) = \theta(e')$ et $e \neq e'$, $S_e^F \cap S_{e'}^F$ et $T_e^F \cap T_{e'}^F$ sont de mesure nulle ;
- pour tout $e \in E^F$, $\omega_{\theta(e)}^G = \omega_e^F$;
- pour tout $f \in E^G$, S_f^G et $\bigcup_{e \in \theta^{-1}(f)} S_e^F$ ne diffèrent que d'un ensemble négligeable ;
- pour tout $f \in E^G$, T_f^G et $\bigcup_{e \in \theta^{-1}(f)} T_e^F$ ne diffèrent que d'un ensemble négligeable ;
- pour tout $e \in E^F$, $\phi_{\theta(e)}^G$ et ϕ_e^F sont égales presque partout sur $S_{\theta(e)}^G \cap S_e^F$.

On dira que F est un *raffinement* de G selon $g \in E^G$ s'il existe un ensemble D d'éléments de E^F tel que :

- $\theta^{-1}(g) = D$;
- $\theta|_{E^F - D} : E^F - D \rightarrow E^G - \{g\}$ est bijective.

Si D est de cardinal 2, on dira que F est un *raffinement simple* selon g . On notera parfois les raffinements (F, θ) afin de préciser la fonction θ .

§8.2.44 PROPOSITION.

On définit la relation $\sim \leq$ sur les graphages pondérés par :

$$F \sim \leq G \Leftrightarrow \exists H, (H \leq F) \wedge (H \leq G)$$

Cette relation est une relation d'équivalence.

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont évidentes. On traite le cas de la transitivité : soit F, G, H trois graphages pondérés tels que $F \sim_{\leq} G$ et $G \sim_{\leq} H$. On notera $(P_{F,G}, \theta)$ (resp. $(P_{G,H}, \rho)$) le raffinement commun à F et G (resp. à G et H). On va construire un graphage P tel que $P \leq P_{F,G}$ et $P \leq P_{G,H}$. On définit :

- $E^P = \{(e, f) \in E^{P_{F,G}} \times E^{P_{G,H}} \mid \theta(e) = \rho(f)\}$;
- $S_{(e,f)}^P = S_e^{P_{F,G}} \cap S_f^{P_{G,H}}$ lorsque $\theta(e) = \rho(f)$;
- $T_{(e,f)}^P = T_e^{P_{F,G}} \cap T_f^{P_{G,H}}$ lorsque $\theta(e) = \rho(f)$;
- $\omega_{(e,f)}^P = \omega_e^{P_{F,G}} = \omega_f^{P_{G,H}}$;
- $\phi_{(e,f)}^P$ est la restriction de $\phi_e^{P_{F,G}}$ à $S_{(e,f)}^P$;
- $\mu_{F,G} : (e, f) \mapsto e$ et $\mu_{G,H} : (e, f) \mapsto f$.

Il est alors aisé de vérifier que $(P, \mu_{F,G})$ (resp. $(P, \mu_{G,H})$) est un raffinement de $P_{F,G}$ (resp. de $P_{G,H}$).

Comme $(P_{F,G}, \theta)$ est un raffinement de F et $(P, \mu_{F,G})$ est un raffinement de $P_{F,G}$, il est clair que $(P, \theta \circ \mu_{F,G})$ est un raffinement de F . De même, $(P, \theta \circ \mu_{G,H})$ est un raffinement de H . Finalement $P \leq F$ et $P \leq H$, et donc $F \sim_{\leq} H$. $\odot$

§8.2.45 PROPOSITION.

La relation $\sim_{\leq}$ contient la relation $\sim_{p.p.}$.

Démonstration. Soit F, G deux graphages tels que $F \sim_{p.p.} G$. On va montrer que $F \sim_{\leq} G$. On utilisera les notations de la Définition §8.2.10 : $0_F, 0_G$ pour les graphages vides et θ la bijection entre les ensembles de sommets. On peut dans un premier temps remarquer que $F \leq F \uplus 0_F$ et $G \leq G \uplus 0_G$. Par conséquent $F \sim_{\leq} F \uplus 0_F$ et $G \sim_{\leq} 0_G$. De plus, la bijection $\theta : E^F \uplus E^{0_F} \rightarrow E^G \uplus E^{0_G}$ satisfait clairement les conditions nécessaires pour affirmer que $(F \uplus 0_F, \theta)$ est un raffinement de $G \uplus 0_G$, ce qui implique que $F \uplus 0_F \sim_{\leq} G \uplus 0_G$. Par transitivité de $\sim_{\leq}$, on conclut alors que $F \sim_{\leq} G$. $\odot$

§8.2.46 Bien entendu, le découpage d'un graphage G selon un ensemble mesurable C est un raffinement où chaque arête est remplacée par quatre arêtes disjointes. Ceci permettra de simplifier certaines conditions par la suite : une mesure ne dépendant pas du raffinement ne dépendra pas du découpage non plus.

§8.2.47 PROPOSITION.

Soit G un graphage et C un ensemble mesurable. Le graphage $G^{\vee C}$ est un raffinement de G .

Démonstration. Il suffit de vérifier que la fonction $\theta : E^{G^{\vee C}} \rightarrow E^G, (e, a, b) \mapsto e$ satisfait les conditions nécessaires. Premièrement, par définition, les poids $\omega_{(e,a,b)}^{G^{\vee C}}$ et ω_e^G sont égaux. Ensuite, les ensembles $[S_e^G]_a^b, a, b \in \{i, o\}$ (resp. $[T_e^G]_a^b$) forment une partition de S_e^G (resp. T_e^G). Ensuite, par définition, $[\phi_e^G]_a^b$ est égale à ϕ_e^G sur son domaine. $\odot$

§8.2.48 LEMME.

Soit F, G deux graphages, $e \in E^F$ et $F^{(e)}$ un raffinement simple de F selon e . Alors $F^{(e)} :_m G$ est un raffinement de $F :_m G$.

Démonstration. Par définition,

$$F :_m G = \{(\omega_{\pi}^{F \boxdot G}, \phi_{\pi}^{F \boxdot G} : [S_{\pi}]_o^o \rightarrow [T_{\pi}]_o^o \mid \pi \in \text{Ch}^m(F, G), \lambda([S_{\pi}]_o^o) \neq 0\}$$

Étant donné que $F^{(e)}$ est un raffinement simple de F selon e , il existe une partition de S_e^F en deux ensembles S_1, S_2 , et une partition de T_e^F en deux ensembles T_1, T_2 telles que $\phi_e^F(S_i) = T_i$. On peut supposer sans perte de généralité que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ car il existe un graphage égal à $F^{(e)}$ presque partout vérifiant cette condition et que l'exécution est compatible avec l'égalité presque partout. Cette condition implique en particulier que $T_1 \cap T_2$ est également négligeable. On note f_1, f_2 les deux éléments de $E^{F^{(e)}}$ envoyés sur e par θ .

À tout élément $\pi = \{e_i\}_{i=0}^n$ de $F^{(e)} : m : G$, on associe le chemin $\theta(\pi) = \{\theta(a_i)\}_{i=0}^n$. Il faut maintenant vérifier que ceci définit un raffinement. Soit π_1, π_2 deux chemins distincts tels que $\theta(\pi_1) = \theta(\pi_2)$. On veut montrer que $S_{\pi_1} \cap S_{\pi_2}$ est de mesure nulle. Puisque $\pi_1 = \{p_i\}_{i=0}^{n_1}$ et $\pi_2 = \{q_i\}_{i=0}^{n_2}$ sont distincts, alors ils diffèrent au moins d'une arête. On notera k le plus petit entier tel que $p_k \neq q_k$. On peut alors supposer sans perte de généralité que $p_k = f_1$ et $q_k = f_2$. Si $x \in S_{\pi_1}$, alors $x \in \phi_{p_0 \dots p_{k-1}}^{-1}(S_1)$. De même, si $x \in S_{\pi_2}$, alors $x \in \phi_{q_0 \dots q_{k-1}}^{-1}(S_2) = \phi_{p_0 \dots p_{k-1}}^{-1}(S_2)$. Comme nous avons supposé $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, on en déduit que $S_{\pi_1} \cap S_{\pi_2} = \emptyset$.

Par définition, le poids d'un chemin π est égal au poids de tout chemin π' tel que $\theta(\pi') = \pi$. De même, les fonctions $\phi_{\pi'}$ et $\phi_{\theta(\pi')}$ sont par définition égales presque partout sur l'intersection de leurs domaines puisque chaque ϕ_e est égale presque partout à $\phi_{\theta(e)}$.

Il reste à montrer que $S_\pi = \cup_{\pi' \in \theta^{-1}(\pi)} S_{\pi'}$ (le résultat concernant T_π est alors évident). Il est évident que $S_{\pi'} \subset S_\pi$ lorsque $\theta(\pi') = \pi$, donc il nous suffit de montrer une inclusion : que pour tout $x \in S_\pi$ il existe un π' avec $\theta(\pi') = \pi$ tel que $x \in S_{\pi'}$. Soit $\pi = \pi_0 e_0 \pi_1 e_1 \dots \pi_n e_n \pi_{n+1}$ où pour tout i , $e_i = e$, et π_i est un chemin (éventuellement vide lorsque $i = 0$ ou $i = n + 1$). Soit maintenant $x \in S_\pi$. Alors pour tout $i = 0, \dots, n$, $\phi_{\pi_0 e_0 \dots \pi_i}(x) \in S_{e_i} = S_e$, donc $\phi_{\pi_0 e_0 \dots \pi_i}(x)$ est soit dans S_1 soit dans S_2 . On obtient donc une suite $a_0, \dots, a_n$ dans $\{1, 2\}^n$. Il est alors facile de voir que $x \in S_{\pi'}$ où $\pi' = \pi_0 f_{a_0} \pi_1 f_{a_1} \dots \pi_n f_{a_n} \pi_{n+1}$. ☺

§8.2.49 LEMME.

Soit F, G deux graphages, $e \in E^F$ et (F', θ) un raffinement de F selon e . Alors $F' : m : G$ est un raffinement de $F : m : G$.

Démonstration. C'est une simple adaptation de la preuve du lemme précédent. Soit D l'ensemble des éléments tels que $\theta^{-1}(e) = D$; on peut supposer, quitte à considérer un graphage équivalent presque partout, que les ensembles S_d ($d \in D$) sont deux à deux disjoints. À tout chemin $\pi = (f_i)_{i=0}^n$ dans $F' : m : G$, on associe $\tilde{\theta}(\pi) = \{\theta(f_i)\}_{i=0}^n$. Inversement, un chemin $\pi = (g_i)_{i=0}^n$ dans $F : m : G$ définit un ensemble dénombrable de chemins :

$$C_\pi = \{(f_i)_{i=0}^n \mid \theta(f_i) = g_i\}$$

Il nous reste à vérifier que $\tilde{\theta} : \pi \mapsto \tilde{\theta}(\pi)$ est un raffinement. On considère alors deux chemins π_1 et π_2 tels que $\tilde{\theta}(\pi_1) = \tilde{\theta}(\pi_2)$. Par le même argument que dans la preuve précédente, on montre aisément que $S_{\pi_1} \cap S_{\pi_2}$ est négligeable. La vérification concernant les poids est immédiate, et le fait que les fonctions soient égales presque partout sur l'intersection de leur domaines également. Il reste donc à montrer que $S_\pi = \cup_{\pi' \in C_\pi} S_{\pi'}$. À nouveau, le raisonnement est le même que précédemment : un élément $x \in S_\pi$ est dans le domaine d'un et un seul $S_{\pi'}$ pour $\pi' \in C_\pi$. ☺

§8.2.50 THÉORÈME.

Soit F, G des graphages et (F', θ) un raffinement de F . Alors $F' : m : G$ est un raffinement de $F : m : G$.

Démonstration. Si π est un chemin alterné $f_0 g_0 f_1 \dots f_n g_n$ entre F' et G , on définit $\theta(\pi) = \theta(f_0) g_0 \dots \theta(f_1) \dots g_n \theta(f_n)$. Il est clair que ceci définit un chemin, car $S_{f_i} \subset S_{\theta(f_i)}$ (resp. $T_{f_i} \subset T_{\theta(f_i)}$) et que π est un chemin.

Soit $f_0, \dots, f_n, \dots$ les arêtes de F . On définit les graphages F^n comme les restrictions de F suivantes : $\{(\omega_{f_i}^F, \phi_{f_i}^F)\}_{i=0}^n$. On définit également les restrictions correspondantes de F' comme les graphages $(F')^n = \{(\omega_e^{F'}, \phi_e^{F'}) \mid e \in \theta^{-1}(f_i)\}_{i=0}^n$. Par une itération du lemme précédent, on a clairement que $((F')^n : m : G, \theta)$ est un raffinement de $F^n : m : G$ pour tout entier n . Il n'est alors pas difficile de voir que $(F' : m : G, \theta) = (\cup_{n \geq 0} (F')^n : m : G, \theta)$ est un raffinement de $\cup_{n \geq 0} F^n : m : G$, c'est-à-dire de $F : m : G$. ☺

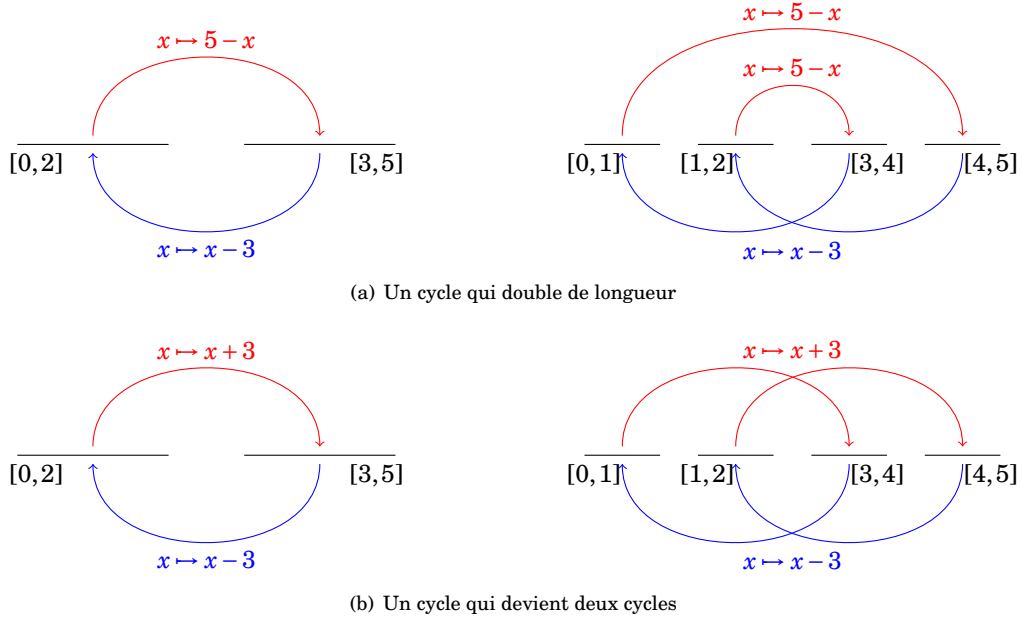


FIGURE 8.8 – Exemples d'évolution d'un cycle lors d'un raffinement

Mesure des circuits

§8.2.51 On voudrait définir une mesure des circuits entre deux graphages F et G de telle manière que si (F', θ) est un raffinement de F , les mesures $\llbracket F, G \rrbracket$ et $\llbracket F', G \rrbracket$ soient égales. Pour être une fonction de quantification des *circuits*, il faut dans un premier temps tenir compte du fait que si π_1, π_2 sont deux représentants d'un même circuit, les fonctions ϕ_{π_1} et ϕ_{π_2} ne sont pas égales.

§8.2.52 Dans un deuxième temps, supposons que l'on dispose d'une telle fonction q (ne dépendant pas du choix des représentants), que π est un cycle alternant entre F et G et que (F', θ) est un raffinement de F . On va essayer de comprendre quels sont les cycles « engendrés » par π dans $F' \sqcap G$. On peut tout d'abord remarquer que le cycle π correspond à une famille E_π de cycles alternant entre F' et G . Si par exemple $\pi = f_0 g_0 \dots f_n g_n$, il est nécessaire de considérer l'ensemble des suites $\{f'_0 g_0 \dots f'_n g_n \mid \forall i, f'_i \in \theta^{-1}(f_i)\}$. Cependant, chacune de ces suites n'est pas nécessairement un chemin : il est possible que $S_{g_i} \cap T_{f'_i}$ (ou bien $S_{f'_{i+1}} \cap T_{g_i}$) soit de mesure nulle. Il est même possible qu'une telle suite soit un chemin sans pour autant être un cycle, et qu'un cycle de longueur l , une fois décomposé selon le raffinement, devienne un cycle de longueur $m \times l$, pour un entier m quelconque. La Figure 8.8 montre comment un cycle de longueur 2 peut soit se transformer en un cycle de longueur 4 soit se transformer en deux cycles de longueur 2 après raffinement. Cependant, un cycle de longueur 4 peut aussi bien être engendré par le cycle π^2 si celui-ci est dans $\text{Cy}^m(F, G)$. La définition suivante permet de tenir compte de toutes ces remarques.

§8.2.53 DÉFINITION.

Soit π un cycle entre deux graphages F, G , et $\pi^\omega = \{\pi^k \mid k \in \mathbf{N}\} \cap \text{Cy}^m(F, G)$. Soit (F', θ) un raffinement de F . On fixe $\text{Rep}(F', G)$ un choix de représentants des circuits, et on note

$$E_\pi^{(F', \theta)} = \{\rho = f'_0 g_0 f'_1 g_1 \dots f'_n g_n \in \text{Rep}(F', G) \mid \exists k \in \mathbf{N}, \theta(\rho) = \pi^k\}$$

On dit qu'une fonction q de l'ensemble² des cycles dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$ est *invariante par raffinement* si

2. Comme dans le cadre des graphes, nous travaillerons à renommage des arêtes près. Ainsi, si la classe des cycles

pour tous graphages F, G et tout raffinement simple (F', θ) de F , l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{\rho \in \pi^\omega} q(\rho) = \sum_{\rho \in E_\pi^{(F', \theta)}} q(\rho)$$

§8.2.54 Cette définition est la plus générale possible et permet de définir ce que signifie être invariant par raffinement dans le cadre général des circuits ou bien dans le cadre des circuits eulériens. Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire le cas des 1-circuits, on remarque que cette définition est bien plus simple. En effet, l'ensemble π^ω est réduit au singleton $\{\pi\}$, et l'égalité à vérifier est donc

$$q(\pi) = \sum_{\rho \in E_\pi^{(F', \theta)}} q(\rho)$$

§8.2.55 DÉFINITION (FONCTION DE QUANTIFICATION DES CIRCUITS).

Une fonction q de l'ensemble des cycles dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$ est une fonction de quantification des circuits si :

1. pour tous représentants π_1, π_2 d'un circuit π , $q(\pi_1) = q(\pi_2)$;
2. q est invariante par raffinement.

§8.2.56 Une fonction de quantification des circuits doit donc satisfaire à des contraintes assez complexes et il est donc parfaitement naturel de se demander s'il existe au moins une telle fonction. Nous définirons dans la section suivante une famille de telles fonctions mesurant l'ensemble des 1-circuits. On définit maintenant la mesure associée à une fonction de quantification des circuits. Si la définition formelle de celle-ci dépend d'un choix de représentants des circuits, le résultat $\llbracket F, G \rrbracket$ ne dépend bien évidemment pas de ce choix du fait de la définition des fonctions de quantification des circuits.

§8.2.57 DÉFINITION (MESURE).

Soit q une fonction de quantification des circuits. On définit la mesure associée à q comme la fonction $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ qui à tout couple de graphages pondérés F, G associe :

$$\llbracket F, G \rrbracket = \sum_{\pi \in \text{Circ}^m(F, G)} q(\pi)$$

Où $\text{Circ}^m(F, G)$ dépend d'un choix de représentants des circuits.

§8.2.58 LEMME.

Soit F, G deux graphages, $e \in E^F$, et $F^{(e)}$ un raffinement simple selon e de F . Alors :

$$\llbracket F, G \rrbracket = \llbracket F^{(e)}, G \rrbracket$$

Démonstration. On note $\theta : E^{F^{(e)}} \rightarrow E^F$ et $\{f, f'\} = \theta^{-1}(e)$. On utilisera les notations introduites dans la Définition §8.2.53.

On notera également $O(\{e\}, G)$ l'ensemble des 1-circuits dans $\text{Cy}^m(\{e\}, G)$. Alors la famille $\{\pi^\omega\}_{\pi \in O(\{e\}, G)}$ est une partition de $\text{Cy}^m(\{e\}, G)$: il est clair que si π, π' sont deux éléments distincts de $O(\{e\}, G)$, π^ω et $(\pi')^\omega$ sont disjoints, et il est tout aussi évident que $\text{Cy}^m(\{e\}, G) = \cup_{\pi \in O(\{e\}, G)} \pi^\omega$ car chacune des notions de cycles que nous avons considérées sont telles que si $\pi^k \in \text{Cy}^m(F, G)$, alors $\pi \in \text{Cy}^m(F, G)$.

n'est à priori pas un ensemble, la fonction q ne dépendra pas du nom des arêtes, mais seulement du poids et de la fonction associée au cycle. On peut donc bien définir q comme une fonction sur l'ensemble des classes d'équivalence de cycles modulo renommage.

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\llbracket F^{(e)}, G \rrbracket &= \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F^{(e)}, G)} q(\pi) \\
&= \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F^{(e)} - \{f, f'\}, G)} q(\pi) + \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(\{f, f'\}, G)} q(\pi) \\
&= \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F - \{e\}, G)} q(\pi) + \sum_{\pi \in O(\{e\}, G)} \sum_{\rho \in E_\pi^{(F^{(e)}, \theta)}} q(\rho) \\
&= \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F - \{e\}, G)} q(\pi) + \sum_{\pi \in O(\{e\}, G)} \sum_{\rho \in \pi^\omega} q(\rho) \\
&= \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F - \{e\}, G)} q(\pi) + \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(\{e\}, G)} q(\pi) \\
&= \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F, G)} q(\pi)
\end{aligned}$$

Et on a donc bien $\llbracket F^{(e)}, G \rrbracket = \llbracket F, G \rrbracket$. ☺

§8.2.59 THÉORÈME.

Soit F, G des graphages et (F', θ) un raffinement de F . Alors :

$$\llbracket F, G \rrbracket = \llbracket F', G \rrbracket$$

Démonstration. L'argument est maintenant classique. On commence par énumérer les arêtes de F , que l'on notera $f_0, \dots, f_n, \dots$. On notera alors

$$\begin{aligned}
F^n &= \{(\omega_{f_i}^F, \phi_{f_i}^F)\}_{i=0}^n \\
(F')^n &= \{(\omega_e^{F'}, \phi_e^{F'}) \mid \theta(e) = f_i\}_{i=0}^n
\end{aligned}$$

Alors $((F')^n, \theta)$ est un raffinement de F^n , et par une itération du lemme précédent, on a :

$$\llbracket (F')^n, G \rrbracket = \llbracket F^n, G \rrbracket$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\llbracket F', G \rrbracket &= \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F', G)} q(\pi) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\pi \in \text{Cy}^m((F')^n, G)} q(\pi) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \llbracket (F')^n, G \rrbracket \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \llbracket F^n, G \rrbracket \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F^n, G)} q(\pi) \\
&= \sum_{\pi \in \text{Cy}^m(F, G)} q(\pi)
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien $\llbracket F', G \rrbracket = \llbracket F, G \rrbracket$. ☺

§8.2.60 PROPOSITION.

Soit F, G, H des graphages tels que $\lambda(V^F \cap V^G \cap V^H) = 0$. Alors :

$$\llbracket F, G : m : H \rrbracket + \llbracket G, H \rrbracket = \llbracket H : m : F, G \rrbracket + \llbracket H, F \rrbracket$$

Démonstration. On considère l'expression $\llbracket F, G : m : H \rrbracket + \llbracket G, H \rrbracket$. On peut supposer sans perte de généralité que F (resp. G , resp. H) est $V^F \cap (V^G \cup V^H)$ -résistant (resp. $V^G \cap (V^F \cup V^H)$ -résistant, resp. $V^H \cap (V^F \cup V^G)$ -résistant). En effet, la Proposition précédente permet de remplacer F, G, H par les découpages nécessaires sans changer la mesure.

Le reste de la preuve est essentiellement similaire aux preuves des propriétés cycliques dans le cas des graphes (voir Chapitre 5).

Soit π un élément de $\text{Circ}^m(F, G :_m H)$. Alors π est un chemin alternant entre F et $G :_m H$, par exemple, $\pi = f_0 \rho_0 f_1 \dots f_n \rho_n$. Dans ce cas, chacun des ρ_i est un chemin alternant entre G et H . Deux cas se présentent : soit chacun des ρ_i est un élément de G , et dans ce cas π est un chemin alternant entre F et G , et correspond donc à un élément de $\text{Circ}^m(F, G)$, soit au moins l'un des ρ_i contient une arête de H . Dans ce second cas, il est clair que π est un élément de $\text{Cy}^m(F :_m G, H)$ (on utilise le Lemme §8.2.38 pour s'assurer que les chemins alternés entre F et G apparaissant dans π ont un domaine — et donc un codomaine — de mesure non nulle). De même, un élément de $\text{Cy}^m(G, H)$ est un élément de $\text{Cy}^m(F :_m G, H)$. $\odot$

- §8.2.61 Nous allons maintenant travailler avec les classes d'équivalence de graphages pondérés modulo l'équivalence $\sim_{\leq}$. Les théorèmes §8.2.59 et §8.2.50 nous assurent que les opérations d'exécution et de mesure ne dépendent pas du représentant choisi et que nous pouvons donc tout à fait travailler modulo cette équivalence. Si le fait de travailler modulo l'équivalence $\sim_{p.p.}$ (qui est contenue dans $\sim_{\leq}$, Proposition §8.2.45) est très naturel, il peut sembler étrange de vouloir travailler modulo l'équivalence $\sim_{\leq}$. La raison devrait apparaître claire lorsque nous traiterons la quantification du second ordre : travailler modulo $\sim_{\leq}$ permet de définir la quantification universelle par une intersection de manière très naturelle.

Graphages épais et tranchés

- §8.2.62 Les graphages tranchés sont construits de manière similaire aux graphes tranchés : on considère des sommes pondérées formelles $F = \sum_{i \in I^F} \alpha_i^F F_i$ où les F_i sont des graphages de lieu V^{F_i} . On définit le *lieu de F* comme l'ensemble mesurable $\cup_{i \in I^F} V^{F_i}$. Les constructions sont alors généralisées de la même manière qu'au Chapitre 5, l'exécution et la mesure sont définies par :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in I^F} \alpha_i^F F_i \right) :: \left(\sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i \right) &= \sum_{(i,j) \in I^F \times I^G} \alpha_i^F \alpha_j^G F_i :: G_j \\ \left\| \sum_{i \in I^F} \alpha_i^F F_i, \sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i \right\| &= \sum_{(i,j) \in I^F \times I^G} \alpha_i^F \alpha_j^G \|F_i :: G_j\| \end{aligned}$$

On obtient alors aisément la propriété cyclique et l'adjonction.

- §8.2.63 On considère maintenant la notion la plus générale possible de *graphage épais*. Comme dans le cas des graphes, un graphage épais est un graphage dont le lieu est de la forme $V \times D$. Ce qui fait la différence entre un graphage et un graphage épais provient principalement de la manière dont deux graphages pondérés interagissent.

- §8.2.64 DÉFINITION.

Soit $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ un espace mesuré et $(D, \mathcal{D}, \mu)$ un espace de probabilité (un espace mesuré tel que $\mu(D) = 1$). Un graphage épais de lieu $V \in \mathcal{B}$ et de dialecte D est un graphage sur $X \times D$ de lieu $V \times D$.

- §8.2.65 DÉFINITION (INTERACTION DIALECTALE).

Soit $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ un espace mesuré et $(D, \mathcal{D}, \mu), (E, \mathcal{E}, \nu)$ deux espaces de probabilité. Soit F, G des graphages épais de lieux respectifs $V^F, V^G \in \mathcal{B}$ et de dialectes respectifs D, E . On définit les graphages $F^{\dagger E}$ et $G^{\ddagger D}$ comme les graphages de lieux respectifs V^F, V^G et de dialectes $E \times F$:

$$\begin{aligned} F^{\dagger E} &= \{(\omega_e^F, \phi_e^F \times \text{Id}_E : S_e^F \times D \times E \rightarrow T_e^F \times D \times E)\}_{e \in E^F} \\ G^{\ddagger D} &= \{(\omega_e^G, \text{Id}_X \times \tau(\phi_e^G \times \text{Id}_D) : S_e^G \times D \times E \rightarrow T_e^G \times D \times E)\}_{e \in E^G} \end{aligned}$$

- §8.2.66 DÉFINITION (BRANCHEMENT).

Le branchement $F :: G$ de deux graphages épais de dialectes respectifs D^F, D^G est défini comme $F^{\dagger D^G} \sqcap G^{\ddagger D^F}$.

- §8.2.67 DÉFINITION (EXÉCUTION).

Soit F, G deux graphages épais de dialectes respectifs D^F, D^G . Leur exécution est égale à $F^{\dagger D^G} :_m G^{\ddagger D^F}$.

§8.2.68 DÉFINITION (MESURE).

Soit F, G deux graphages épais de dialectes respectifs D^F, D^G , et q une fonction de quantification des circuits. La mesure de l'interaction correspondante est égale à $\llbracket F^{\dagger_{D^G}}, G^{\ddagger_{D^F}} \rrbracket$.

§8.2.69 Tout comme dans le cas des graphes, on peut montrer que l'on conserve les propriétés importantes lors du passage aux graphages épais.

§8.2.70 PROPOSITION.

Soit F, G, H des graphages épais tels que $V^F \cap V^G \cap V^H$ est de mesure nulle. Alors :

$$\begin{aligned} F :: (G :: H) &= (F :: G) :: H \\ \llbracket F, G :: H \rrbracket + \llbracket G, H \rrbracket &= \llbracket G, H :: F \rrbracket + \llbracket H, F \rrbracket \end{aligned}$$

§8.2.71 De même, la considération des graphages épais tranchés est maintenant bien comprise. On étend les opérations par « linéarité » aux sommes formelles pondérées de graphages épais, et on obtient, dans le cas où F, G, H sont des graphages épais tranchés tels que $V^F \cap V^G \cap V^H$ soit de mesure nulle :

$$\begin{aligned} F :: (G :: H) &= (F :: G) :: H \\ \llbracket F, G :: H \rrbracket + \mathbf{1}_F \llbracket G, H \rrbracket &= \llbracket G, H :: F \rrbracket + \mathbf{1}_G \llbracket H, F \rrbracket \end{aligned}$$

8.3 Géométrie de l'interaction

§8.3.1 L'existence d'une fonction de quantification des circuits n'est pas évidente. On va maintenant se fixer l'espace mesuré $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ de la droite réelle munie de la tribu des boréliens et la mesure de Lebesgue. On considèrera à partir de maintenant l'adjonction des 1-circuits sur les graphages épais tranchés uniquement, et on va montrer qu'il existe une famille de fonctions de quantification des circuits. Celles-ci sont les généralisations naturelles des fonctions de quantification des circuits sur les graphes orientés pondérés.

Quantification des circuits

§8.3.2 DÉFINITION.

Soit $\phi : X \rightarrow Y$ une transformation préservant la mesure. On définit l'ensemble mesurable :

$$\{\phi\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \phi^n(X) \cap \phi^{-n}(Y)$$

§8.3.3 THÉORÈME.

Soit $\phi : X \rightarrow X$ une transformation préservant la mesure, où $X \subset \mathbf{R}$ est un ensemble mesurable de mesure finie. Alors la fonction suivante est mesurable :

$$\rho_\phi : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\} \\ x & \mapsto \inf\{n \in \mathbf{N} \mid \phi^n(x) = x\} & \text{si } \{n \in \mathbf{N} \mid \phi^n(x) = x\} \neq \emptyset \\ x & \mapsto \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On commence par montrer que les ensembles X_i sont mesurables. Premièrement, remarquons que $\mathbf{R}$ peut s'écrire comme l'union disjointe dénombrable $\uplus_{i \in \mathbf{Z}} [\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}[$ pour tout entier naturel k . On notera $I_i^k = [\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}[$. On peut alors, pour tout k , définir la famille $(X_i^k)_{i \in \mathbf{Z}}$ où $X_i^k = I_i^k \cap X$. Par définition, les ensembles X_i^k sont des ensembles mesurables. Comme X est de mesure finie et que ϕ préserve la mesure, on peut alors définir la fonction mesurable $\rho_i^k : X_i^k \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ qui à $x \in X_i^k$ associe l'entier $\min\{n \in \mathbf{N} \mid \phi^n(x) \in X_i^k\}$ lorsqu'il est défini, et ∞ sinon. On a donc, pour chaque $k \in \mathbf{N}$, une fonction mesurable $\rho^k : X \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ construite comme l'union des fonctions ρ_i^k . Il est facile de remarquer que, pour un $x \in X$ fixé,

la suite $\phi^k(x)$ est une suite croissante dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$, et possède donc une limite. On peut alors définir la fonction $\rho : X \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ comme la limite point par point des fonctions ρ^k . Cette fonction est en particulier mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables. Il suffit maintenant de vérifier que cette fonction coïncide bien avec la fonction définie plus haut. $\odot$

§8.3.4 REMARQUE. Le théorème de récurrence de Poincaré permet d'affirmer que l'ensemble des x tels que $\rho^k(x) = \infty$ est de mesure nulle et on pourrait éventuellement négliger ces points. Cependant, c'est la limite $\rho(x)$ des $\rho^k(x)$ lorsque k tend vers l'infini qui nous intéresse, et l'ensemble des points x tels que $\rho(x) = \infty$ n'a aucune raison d'être de mesure nulle. Il est même possible que cet ensemble soit de même mesure que X : si ϕ est une transformation apériodique, alors $\lambda(\rho_\phi^{-1}(\infty)) = \lambda(X)$.

On ne considérera pas ici dans nos mesures l'ensemble des éléments appartenant à l'ensemble $\rho_\phi^{-1}(\infty)$, mais il est tout à fait possible de tenir compte de ce dernier en considérant une variante des fonctions de quantification des circuits que nous allons définir.

§8.3.5 DÉFINITION.

Soit π un cycle dans un graphage F . Alors la fonction ϕ_π restreinte à $X = \{\phi_\pi\}$ est bien une transformation préservant la mesure $X \rightarrow X$. On peut alors définir la fonction $\rho_{(\phi_\pi)}$ sur X , que l'on notera abusivement ρ_π dans la suite. On définit le *support* $\text{supp}(\pi)$ de π comme l'ensemble $\rho_\pi^{-1}(\mathbf{N})$.

§8.3.6 DÉFINITION.

Soit m une fonction mesurable $\Omega \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. On définit q_m comme la fonction :

$$q_m : \pi \mapsto \int_{\text{supp}(\pi)} \frac{m(\omega(\pi)^{\rho_{\phi_\pi}(x)})}{\rho_{\phi_\pi}(x)} d\lambda(x)$$

§8.3.7 LEMME.

Pour toute fonction m , la fonction q_m est constante sur les classes d'équivalence de cycles modulo l'action des permutations cycliques.

Démonstration. Soit $\pi = e_0 e_1 \dots e_n$ un cycle, $\text{supp}(\pi)$ son support. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on note $(\text{supp}(\pi))_i = \rho_\pi^{-1}(i)$. Soit maintenant $\pi' = e_1 e_2 \dots e_n e_0$, $\text{supp}(\pi')$ son support. On notera alors $(\text{supp}(\pi'))_i = \rho_{\pi'}^{-1}(i)$. On montre dans un premier temps que $(\text{supp}(\pi'))_i = \phi_{e_0}((\text{supp}(\pi))_i)$ pour tout entier i .

Soit $x \in (\text{supp}(\pi'))_i$, c'est-à-dire $x \in \text{supp}(\pi')$ et $\phi_{\pi'}^i(x) = x$. Puisque $\phi_{\pi'}(x) = \phi_{e_0}(\phi_{e_1 \dots e_n}(x))$, on a $x = \phi_{e_0}(\phi_{e_1 \dots e_n} \phi_{\pi'}^{i-1}(x))$. On pose $y = \phi_{e_1 \dots e_n} \phi_{\pi'}^{i-1}(x)$ et on va montrer que $y \in (\text{supp}(\pi))_i$. Comme $\phi_{e_0}(y) \in \text{supp}(\pi')$, on a $\phi_{e_0} \in S_{e_1 \dots e_n}$, et donc $y \in S_\pi$. De plus,

$$\begin{aligned} \phi_\pi^k(y) &= \phi_\pi^i(\phi_{e_1 \dots e_n} \phi_{\pi'}^{i-1}(x)) \\ &= \phi_\pi(\phi_\pi^{i-2}(\phi_{e_1 \dots e_n} \phi_{\pi'}^{i-1}(x))) \\ &= \phi_{e_1 \dots e_n}(\phi_{e_0}(\phi_\pi^{i-1}(\phi_{e_1 \dots e_n}(\phi_{\pi'}^{i-1}(x))))) \\ &= \phi_{e_1 \dots e_n}(\phi_{\pi'}^i(\phi_{\pi'}^{i-1}(x))) \\ &= \phi_{e_1 \dots e_n}(\phi_{\pi'}^{i-1}(\phi_{\pi'}^i(x))) \\ &= \phi_{e_1 \dots e_n}(\phi_{\pi'}^{i-1}(x)) \\ &= y \end{aligned}$$

Donc y est dans $\text{supp}(\pi')$ et plus particulièrement dans $(\text{supp}(\pi'))_i$. On a donc montré l'inclusion $(\text{supp}(\pi'))_i \subset \phi_{e_0}((\text{supp}(\pi))_i)$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, on prend $x = \phi_{e_0}(y)$ avec $y \in (\text{supp}(\pi))_i$. Alors $y \in S_{\pi^k}$ donc $y \in S_{e_0 e_1 \dots e_n e_0}$, et finalement $\phi_{e_0}(y) \in S_{\pi'}$. On a de plus

$$\begin{aligned} \phi_{\pi'}^k(x) &= \phi_{\pi'}^k(\phi_{e_0}(y)) \\ &= \phi_{e_0}(\phi_\pi^k(y)) \\ &= \phi_{e_0}(y) \\ &= x \end{aligned}$$

Donc x est bien dans $(\text{supp}(\pi))_i$, ce qui montre la seconde inclusion.

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} q_m(\pi) &= \int_{\text{supp}(\pi)} \frac{m(\omega_\pi^{\rho_{\phi_\pi}(x)})}{\rho_{\phi_\pi}(x)} d\lambda(x) \\ &= \sum_{i \geq n} \int_{(\text{supp}(\pi))_i} \frac{m(\omega_\pi^i)}{i} d\lambda(x) \\ &= \sum_{i \geq n} \int_{(\text{supp}(\pi'))_i} \frac{m(\omega_{\pi'}^i)}{i} d\lambda(x) \\ &= \int_{\text{supp}(\pi')} \frac{m(\omega_{\pi'}^{\rho_{\phi_{\pi'}}(x)})}{\rho_{\phi_{\pi'}}(x)} d\lambda(x) \end{aligned}$$

D'où $q_m(\pi) = q_m(\pi')$. On en déduit que la fonction q_m est constante sur les classes d'équivalence de cycles modulo l'action des permutations cycliques. $\odot$

§8.3.8 Comme la fonction q_m est invariante sur les classes d'équivalence modulo l'action des permutations, on peut définir $q_m(\bar{\pi})$ pour tout 1-circuit $\bar{\pi}$. On se permettra également d'écrire abusivement :

$$\int_{\text{supp}(\bar{\pi})} \frac{m(\omega^{\rho_\pi(x)})}{\rho_\pi(x)} d\lambda(x)$$

où $\bar{\pi}$ est un 1-circuit.

§8.3.9 LEMME.

Pour toute fonction m , la fonction q_m est invariante par raffinement.

Démonstration. Soit F, G des graphages, et $F^{(e)}$ un raffinement simple de F selon $e \in E^F$. On notera f, f' les deux éléments de $F^{(e)}$ qui sont la décomposition de e . À équivalence presque partout près, on peut supposer que $S_f \cap S_{f'} = \emptyset$. Soit maintenant π un représentant d'un 1-circuit $\bar{\pi}$. Comme nous travaillons avec les 1-circuits, l'ensemble π^ω est égal à $\{\pi\}$. On suppose que π contient des occurrences de e , et on écrit alors $\pi = \rho_0 e_{i_0} \rho_1 e_{i_1} \dots e_{i_{n-1}} \rho_n$ où pour tout j , $e_{i_j} = e$ et ρ_j est un chemin (avec éventuellement l'un des deux chemins ρ_0 ou ρ_n vide). On notera E_π l'ensemble des 1-cycles $\mu = \rho_0 \epsilon_{i_0^0} \rho_1 \epsilon_{i_1^0} \dots \epsilon_{i_{n-1}^0} \rho_n \rho_0 \epsilon_{i_0^1} \rho_1 \dots \epsilon_{i_{n-1}^1} \rho_n \dots \rho_0 \epsilon_{i_0^k} \dots \epsilon_{i_{n-1}^k} \rho_n$ où $k \in \mathbf{N}$ — que l'on notera $lg(\mu)$, et où pour toutes valeurs de l, m , $\epsilon_{i_l^m}$ est soit égal à f soit égal à f' . On notera $\bar{E}_\pi$ l'ensemble des 1-circuits dans E_π , c'est-à-dire l'ensemble $E_\pi^{(F, \theta)}$ de la Définition §8.2.53.

Soit $x \in \text{supp}(\pi) - \rho_\pi^{-1}(\infty)$. Alors $x \in (\text{supp}(\pi))_k$ pour une valeur de k dans $\mathbf{N}$, c'est-à-dire $\phi_\pi^k(x) = x$. Étant donné que $S_e = S_f \cup S_{f'}$, on a, pour chaque occurrence e_{i_p} de e et tout entier l :

$$\phi_\pi^k = \phi_\pi^l \circ \phi_{\rho_{p+1}e_{i_{p+1}} \dots e_{i_n} \rho_n} \circ \phi_{e_{i_p}} \circ \phi_{\rho_0 e_{i_0} \rho_1 \dots e_{i_{p-1}} \rho_j} \circ \phi_\pi^{k-l-1}$$

Alors $\phi_{\rho_0 e \dots \rho_j} \circ \phi_\pi^{k-l-1}(x)$ appartient soit à S_f soit à $S_{f'}$. Pour chaque occurrence e_i de e , on notera $d_{i_{p,l}} = f$ ou $d_{i_{p,l}} = f'$ selon que $\phi_{\rho_0 e \dots \rho_j} \circ \phi_\pi^{k-l-1}(x)$ est dans S_f ou dans $S_{f'}$. On obtient alors pour tout entier $0 \leq l \leq k$ des chemins $v_l = \rho_0 d_{i_{0,l}} \rho_1 d_{i_{1,l}} \dots d_{i_{n-1,l}} \rho_n$. En concaténant ces chemins on définit un cycle $v = v_0 v_1 \dots v_k$. Ce cycle est un d -cycle pour un entier d , c'est-à-dire $v = \bar{\pi}^d$ où $\bar{\pi}$ est un 1-cycle dans E_π . Il est clair par la définition de $\bar{\pi}$ que $x \in \text{supp}(\bar{\pi})$ et que, pour tout 1-cycle μ dans E_π , $x \notin \text{supp}(\mu)$ lorsque $\mu \neq \bar{\pi}$.

De plus, il est facile de voir que si $x \in \text{supp}(\mu)$ pour un 1-cycle $\mu \in E_\pi$, alors on a nécessairement $x \in \text{supp}(\pi)$. On en déduit que la famille $(\text{supp}(\mu))_{\mu \in E_\pi}$ est une partition de $\text{supp}(\pi)$. On remarque que $\omega_\mu = \omega_\pi^{lg(\mu)}$. De plus, pour tout $x \in \text{supp}(\mu)$, on a $\rho_{\phi_\mu}(x) \times lg(\mu) = \rho_{\phi_\pi}(x)$, d'où $\omega_\pi^{\rho_{\phi_\pi}(x)} = \omega_\mu^{\rho_{\phi_\mu}(x)}$.

Il reste à remarquer que si $\mu = \mu_1 \dots \mu_{lg(\mu)} \in E_\pi$, et σ est la permutation cyclique sur $\{1, \dots, lg(\mu)\}$ telle que $\sigma(i) = i + 1$, alors les 1-cycles $\mu_{\sigma^k} = \mu_{\sigma^k(1)} \mu_{\sigma^k(2)} \dots \mu_{\sigma^k(lg(\mu))}$ pour $0 \leq k \leq$

$lg(\mu) - 1$ sont des éléments deux à deux disjoints de E_π . En effet, ce sont des 1-cycles car μ est un 1-cycle, et ils sont deux à deux disjoints car si $\mu_{\sigma^k} = \mu_{\sigma^{k'}}$ (on suppose $k > k'$), on montre que $\mu_{\sigma(k-k')} = \mu$ et que $k - k'$ divise $lg(\mu)$, ce qui contredit le fait que μ soit un 1-cycle.

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
 q_m(\bar{\pi}) &= \int_{\text{supp}(\pi)} \frac{m(\omega_\pi^{\rho_{\phi_\pi}(x)})}{\rho_{\phi_\pi}(x)} d\lambda(x) \\
 &= \sum_{\mu \in E_\pi} \int_{\text{supp}(\mu)} \frac{m(\omega_\pi^{\rho_{\phi_\pi}(x)})}{\rho_{\phi_\pi}(x)} d\lambda(x) \\
 &= \sum_{\mu \in E_\pi} \int_{\text{supp}(\mu)} \frac{m(\omega_\mu^{\rho_{\phi_\mu}(x)})}{\rho_{\phi_\pi}(x)} d\lambda(x) \\
 &= \sum_{\bar{\mu} \in E_\pi} \int_{\text{supp}(\bar{\mu})} \frac{lg(\bar{\mu}) m(\omega_{\bar{\mu}}^{\rho_{\phi_{\bar{\mu}}}(x)})}{\rho_{\phi_\pi}(x)} d\lambda(x) \\
 &= \sum_{\bar{\mu} \in E_\pi} \int_{\text{supp}(\bar{\mu})} \frac{lg(\bar{\mu}) m(\omega_{\bar{\mu}}^{\rho_{\phi_{\bar{\mu}}}(x)})}{\rho_{\phi_{\bar{\mu}}}(x) \times lg(\bar{\mu})} d\lambda(x) \\
 &= \sum_{\bar{\mu} \in E_\pi} \int_{\text{supp}(\bar{\mu})} \frac{m(\omega_{\bar{\mu}}^{\rho_{\phi_{\bar{\mu}}}(x)})}{\rho_{\phi_{\bar{\mu}}}(x)} d\lambda(x)
 \end{aligned}$$

Ce qui montre que q_m est invariante par raffinement. ☺

§8.3.10 Les deux lemmes précédents ont pour conséquence directe le théorème suivant qui nous permet de définir une famille de fonctions de quantification des circuits.

§8.3.11 THÉORÈME.

Pour toute fonction $m : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, la fonction q_m est une fonction de quantification des circuits.

Conduites Pérennes et Co-Pérennes

§8.3.12 Étant donné que nous travaillons dans le cadre de graphes mesurés épais et tranchés, on peut suivre les constructions du chapitre 7. On obtient donc, comme auparavant, une construction des connecteurs multiplicatifs et additifs de la logique linéaire.

§8.3.13 DÉFINITION (PROJET).

Un *projet* est la donnée d'un couple $\alpha = (\alpha, A)$, d'un support V^A où :

- $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ est la mise ;
- A est un graphage pondéré épais tranché de lieu V^A , de dialecte D^A , un espace de probabilité discret, et d'index I^A , un ensemble fini.

§8.3.14 REMARQUE. On a choisi ici de rester au plus proche de la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini. Ainsi, le choix d'un espace de probabilité discret pour dialecte est une restriction qui correspond à restreindre les idiomes aux algèbres finies de type I dans le cadre de la GdI5. Cependant, les résultats de la section précédente concernant l'exécution et la mesure, ainsi que la définition de la famille de fonctions de quantification des circuits ne dépendent pas de cette hypothèse. Il est donc tout à fait envisageable de considérer une version élargie du cadre présenté ici avec des dialectes éventuellement continus. Il est possible qu'une telle généralisation permette de définir des exponentielles plus expressives que celles présentées ici, voire même les exponentielles usuelles (non bornées) de la logique linéaire.

§8.3.15 Comme nous l'avons précisé auparavant, nous allons devoir considérer des conduites particulières, qui seront les conduites engendrées par l'opération d'exponentiation et qui ne sont

malheureusement pas des comportements. Nous allons donc introduire les différentes notions.

§8.3.16 DÉFINITION (PÉRENNISATION).

Une pérennisation est une application qui associe à tout graphe mesuré épais un graphe mesuré.

§8.3.17 DÉFINITION (EXPONENTIELLES).

Soit $\mathbf{A}$ une conduite, et Ω une pérennisation. On définit la conduite $!\mathbf{A}$ comme la clôture par bi-orthogonal de l'ensemble de projets :

$$\sharp\mathbf{A} = \{!a = (0, \Omega(A)) \mid a = (0, A) \in \mathbf{A}, I^A \cong \{1\}\}$$

Le connecteur dual est bien entendu défini par $?\mathbf{A} = (\sharp\mathbf{A}^\perp)^\perp$.

§8.3.18 DÉFINITION.

Une conduite $\mathbf{A}$ est une *conduite pérenne* lorsqu'il existe un ensemble A tel que :

1. $\mathbf{A} = A^{\perp\perp}$;
2. pour tout $a = (a, A) \in A$, $a = 0$ et A est sans tranches.

Une conduite *co-pérenne* est une conduite $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\perp$ où $\mathbf{A}$ est une conduite pérenne.

§8.3.19 PROPOSITION.

Une conduite $\mathbf{B}$ co-pérenne vérifie l'inflation : pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{B} \Rightarrow b + \lambda b \in \mathbf{B}$.

Démonstration. La conduite $\mathbf{A} = \mathbf{B}^\perp$ étant pérenne, il existe un ensemble A de projets sans tranches et de mise nulle tel que $\mathbf{A} = A^{\perp\perp}$. Si A est non-vidé, le résultat est une conséquence directe de la proposition §7.1.28, page 135. Si A est vidé, alors $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\perp = A^\perp$ est le comportement $\mathbf{T}_{V^A}$ qui vérifie bien évidemment l'inflation. ☺

§8.3.20 PROPOSITION.

Une conduite co-pérenne est non vidé.

Démonstration. Supposons $\mathbf{A}^\perp$ co-pérenne de support V^A . Alors il existe A un ensemble de projets sans tranches et de mise nulle tel que $\mathbf{A} = A^{\perp\perp}$. Si A est vidé, alors $A^\perp = \mathbf{A}^\perp$ est le comportement $\mathbf{T}_{V^A}$. Si $\mathbf{A}$ est non-vidé, on peut vérifier que pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, le projet $\mathcal{D}a_{i_\lambda} = (\lambda, (V^A, \emptyset))$ est dans $A^\perp = \mathbf{A}^\perp$. ☺

§8.3.21 COROLLAIRE.

Soit $\mathbf{A}$ une conduite pérenne. Alors $a = (a, A) \in \mathbf{A} \Rightarrow a = 0$.

Démonstration. Comme $\mathbf{A}^\perp$ est co-pérenne, c'est un ensemble non vidé de projets vérifiant la propriété d'inflation. Le résultat est alors obtenu par application de la proposition §7.1.29, page 135. ☺

§8.3.22 PROPOSITION.

Si $\mathbf{A}$ est co-pérenne, alors pour tout $a \neq 0$, $\mathcal{D}a_{i_a} = (a, (V^A, \emptyset)) \in \mathbf{A}$.

Démonstration. On note B l'ensemble de projets sans mise ni dialecte tel que $B^\perp = \mathbf{A}$. Alors pour tout élément $b \in B$, on a $\mathbf{1}_B = 1$, d'où : $\langle\langle b, \mathcal{D}a_{i_a} \rangle\rangle = a \mathbf{1}_B = a$. Donc $\mathcal{D}a_{i_a} \in B^\perp = \mathbf{A}$ pour tout $a \neq 0$. ☺

§8.3.23 PROPOSITION.

Le tenseur de conduites pérennes est une conduite pérenne.

Démonstration. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites pérennes. Alors, il existe deux ensembles de projets sans mises ni tranches E, F tels que $\mathbf{A} = E^{\perp\perp}$ et $\mathbf{B} = F^{\perp\perp}$. Par la proposition §7.1.11, on a $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (E \odot F)^{\perp\perp}$. Or, par définition, $E \odot F$ ne contient que des projets de la forme $e \otimes f$, où e, f sont sans mises ni tranches. Donc $E \odot F$ contient uniquement des projets sans mises ni tranches et finalement $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est une conduite pérenne. ☺

§8.3.24 PROPOSITION.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des conduites pérennes, $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ est une conduite pérenne.

Démonstration. Conséquence de la Proposition §7.1.35. $\odot$

§8.3.25 PROPOSITION.

Si $\mathbf{A}$ est une conduite pérenne et $\mathbf{B}$ est une conduite co-pérenne, alors $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est co-pérenne.

Démonstration. On rappelle que $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$. Comme $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}^\perp$ sont pérennes, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp$ est pérenne, et donc $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est co-pérenne. En particulier, $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est non vide et vérifie la propriété d'inflation. $\odot$

§8.3.26 PROPOSITION.

Si $\mathbf{A}$ est pérenne et $\mathbf{B}$ est un comportement, alors $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est un comportement.

Démonstration. Si $\mathbf{A} = \mathbf{0}_{V^A}$ ou $\mathbf{B} = \mathbf{0}_{V^B}$, alors $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{0}_{V^A \cup V^B}$ qui est un comportement.

Soit A l'ensemble de projets sans mises et sans dialectes tel que $\mathbf{A} = A^{\perp\perp}$. On a $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (A \odot \mathbf{B})^{\perp\perp}$ par la proposition §7.1.11. Si $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}_{V^B}$ et $A \neq \emptyset$, alors $A \odot \mathbf{B}$ est non vide et ne contient que des projets de mise nulle. Donc $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\perp$ satisfait la propriété d'inflation par la proposition §7.1.29.

Supposons maintenant qu'il existe $f = (f, F) \in (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\perp$ tel que $f \neq 0$. Alors pour tout $a \in A$ et $b \in \mathbf{B}$, $\langle\langle f, a \otimes b \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Or, puisque a est de mise nulle et que $\mathbf{1}_A = 1$, $\langle\langle f, a \otimes b \rangle\rangle = f \mathbf{1}_B + b \mathbf{1}_F + \llbracket F, A \cup B \rrbracket$. On pose alors $\mu = (-\llbracket F, A \cup B \rrbracket - b \mathbf{1}_F) / f - \mathbf{1}_B$. Comme $\mathbf{B}$ est un comportement, $b + \mu \mathbf{0} \in \mathbf{B}$. Or :

$$\begin{aligned} \langle\langle f, a \otimes (b + \mu \mathbf{0}) \rangle\rangle &= f(\mathbf{1}_B + \mu) + b \mathbf{1}_F + \llbracket F, A \cup (B + \mu \mathbf{0}) \rrbracket \\ &= f(\mathbf{1}_B + \mu) + b \mathbf{1}_F + \llbracket F, A \cup B \rrbracket \\ &= f(\mathbf{1}_B + (-\llbracket F, A \cup B \rrbracket - b \mathbf{1}_F) / f - \mathbf{1}_B) + b \mathbf{1}_F + \llbracket F, A \cup B \rrbracket \\ &= -\llbracket F, A \cup B \rrbracket - b \mathbf{1}_F + b \mathbf{1}_F + \llbracket F, A \cup B \rrbracket \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction. Donc tout élément de $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\perp$ est de mise nulle.

Si $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\perp$ est non vide, étant donné qu'il satisfait la propriété d'inflation et ne contient que des projets de mise nulle, il s'agit d'un comportement.

Reste le cas où $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\perp$ est vide, mais alors $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{T}_{V^A \cup V^B}$ est un comportement. $\odot$

§8.3.27 COROLLAIRE.

Si $\mathbf{A}$ est pérenne et $\mathbf{B}$ est un comportement, alors $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est un comportement.

Démonstration. On rappelle que $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$. Par la proposition précédente, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp$ est un comportement car $\mathbf{A}$ est pérenne et $\mathbf{B}^\perp$ est un comportement. Donc $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est l'orthogonal d'un comportement, donc un comportement. $\odot$

§8.3.28 COROLLAIRE.

Si $\mathbf{A}$ est un comportement et $\mathbf{B}$ est co-pérenne, alors $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est un comportement.

Démonstration. Il suffit d'écrire $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$. Comme $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp$ est le tenseur d'une conduite pérenne et d'un comportement, il s'agit d'un comportement. L'orthogonal d'un comportement étant un comportement, on peut alors conclure. $\odot$

§8.3.29 PROPOSITION.

L'affaiblissement (à gauche) des conduites pérennes est satisfait.

Démonstration. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites, et $\mathbf{N}$ une conduite pérenne. Soit $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$. On va montrer que $f \otimes o_{V\mathbf{N}}$ est un élément de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{N} \multimap \mathbf{B}$. Pour cela, on choisit $a \in \mathbf{A}$ et $n \in \mathbf{N}$ (on rappelle que n est de mise nulle). Alors pour tout $b' \in \mathbf{B}^\perp$,

$$\begin{aligned}
\langle\langle f \otimes o \rangle\langle a \otimes n \rangle, b' \rangle &= \langle\langle f \otimes o, (a \otimes n) \otimes b' \rangle\rangle \\
&= \langle\langle f \otimes o, (a \otimes b') \otimes n \rangle\rangle \\
&= \mathbf{1}_F(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B'} n + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_A b' + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_{B'} a) + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B'} f + \llbracket F \cup 0, A \cup B' \cup N \rrbracket \\
&= \mathbf{1}_F(\mathbf{1}_N \mathbf{1}_A b' + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_{B'} a) + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B'} f + \llbracket F \cup 0, A \cup B' \cup N \rrbracket \\
&= \mathbf{1}_N(\mathbf{1}_F(\mathbf{1}_A b' + \mathbf{1}_{B'} a) + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B'} f) + \mathbf{1}_N \llbracket F, A \cup B' \rrbracket \\
&= \mathbf{1}_N \langle\langle f, a \otimes b' \rangle\rangle
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{1}_N \neq 0$, $\langle\langle f \otimes o \rangle\langle a \otimes n \rangle, b' \rangle \neq 0, \infty$ si et seulement si $\langle\langle f, a \otimes b' \rangle\rangle \neq 0, \infty$. Donc pour tout $a \otimes n \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{N}$, $(f \otimes o) \langle\langle a \otimes n \rangle\rangle \in \mathbf{B}$. Cela prouve que $f \otimes o \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{N} \multimap \mathbf{B}$ par la Proposition §7.1.14. ☺

Second Ordre

§8.3.30 DÉFINITION.

On définit la quantification localisée du second ordre par :

$$\begin{aligned}
\forall_L \mathbf{X} \mathbf{F}(\mathbf{X}) &= \bigcap_{\mathbf{A}, V^A=L} \mathbf{F}(\mathbf{A}) \\
\exists_L \mathbf{X} \mathbf{F}(\mathbf{X}) &= \left(\bigcup_{\mathbf{A}, V^A=L} \mathbf{F}(\mathbf{A}) \right)^{\perp\perp}
\end{aligned}$$

§8.3.31 PROPOSITION.

$$(\forall_L \mathbf{X} \mathbf{F}(\mathbf{X}))^\perp = \exists_L \mathbf{X} (\mathbf{F}(\mathbf{X}))^\perp$$

Démonstration. La preuve est presque immédiate. En utilisant les définitions :

$$\begin{aligned}
(\forall_L \mathbf{X} \mathbf{F}(\mathbf{X}))^\perp &= \left(\bigcap_{\mathbf{A}, V^A=L} \mathbf{F}(\mathbf{A}) \right)^\perp \\
&= \left(\bigcup_{\mathbf{A}, V^A=L} (\mathbf{F}(\mathbf{A}))^\perp \right)^{\perp\perp} \\
&= \exists_L \mathbf{X} \mathbf{F}^\perp(X)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que l'orthogonal transforme une intersection en union (voir la preuve de la Proposition §7.1.35). ☺

§8.3.32 Ces connecteurs du second ordre sont cependant des connecteurs *localisés* et vérifient donc certaines propriétés qui sont des conséquences de la localisation (comme c'était déjà le cas dans la Ludique [Gir01]). De plus, un élément d'une conduite quantifiée, par exemple la conduite $\forall X_L F(X)$, ne permet pas d'obtenir un élément dans la conduite $F(Y_{L'})$ où L' est un lieu disjoint de L . Pour obtenir par exemple un théorème d'adéquation (non localisé), un travail est donc nécessaire avant de définir l'interprétation des quantificateurs du second ordre. Une piste est proposée par Girard dans ce sens dans son article introduisant la GdI5.1 [Gir11a].

§8.3.33 On peut remarquer qu'il est possible de restreindre les constructions que nous avons définies jusqu'à présent à des sous-classes de la classe des graphages. En effet, tout sous-ensemble des transformations partielles préservant la mesure sur $\mathbf{R}$ qui est clos par composition définit une

sous-classe de graphages. On peut donc, par exemple, définir les graphes d'intervalles comme les graphages pondérés dont les arêtes sont des translations. Il se trouve que ceci nous donne une simple extension de la construction des graphes tranchés permettant de définir un modèle de MALL avec connecteurs du second ordre.

Une construction des exponentielles

§8.3.34 On montre dans un premier temps un résultat qui nous permettra de définir des transformations préservant la mesure à partir de bijections sur les entiers. Ce résultat nous sera utile pour montrer qu'il est possible d'implémenter la promotion fonctorielle pour l'exponentielle que nous définissons.

§8.3.35 DÉFINITION.

Soit $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une bijection et b un entier ≥ 2 . Alors ϕ induit une transformation $T_\phi^b : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ par $\sum_{i \geq 0} a_i 2^{-k} \mapsto \sum_{i \geq 0} a_{\phi^{-1}(k)} 2^{-k}$.

§8.3.36 REMARQUE. Soit deux représentations distinctes $\sum_{i \geq 0} a_i b^{-i}$ et $\sum_{i \geq 0} a'_i b^{-i}$ représentant le même nombre réel r . Si l'on fixe le premier indice i_0 tel que $a_{i_0} \neq a'_{i_0}$, on peut remarquer que la valeur absolue de la différence entre ceux-ci est nécessairement égale à 1 : $|a_{i_0} - a'_{i_0}| = 1$. En effet, si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si $|a_{i_0} - a'_{i_0}| \geq 2$, la distance entre $\sum_{i \geq 0} a_i b^{-i}$ et $\sum_{i \geq 0} a'_i b^{-i}$ serait supérieure à b^{-i_0} , ce qui contredit le fait que ces deux sommes soient égales à r . Supposons par exemple que $a_{i_0} = a'_{i_0} + 1$. Alors $a_j = 0$ pour tout $j > i_0$ puisque s'il existe $j > i_0$ tel que $a_j \neq 0$, la distance entre les deux sommes $\sum_{i \geq 0} a_i b^{-i}$ et $\sum_{i \geq 0} a'_i b^{-i}$ est nécessairement supérieure à b^{-j} , ce qui est impossible. De plus, $a'_j = b - 1$ pour tout $j > i_0$ puisque si ce n'était pas le cas on pourrait montrer que la distance entre les deux sommes est strictement supérieure à 0. On en déduit que seuls les éléments ayant un développement fini (suite presque partout nulle) possèdent deux représentations.

L'ensemble de ces éléments étant de mesure nulle, la transformation T_ϕ associée à une bijection ϕ de $\mathbf{N}$ est bien définie puisqu'on peut négliger de définir T_ϕ sur les éléments possédant deux représentations distinctes. On peut cependant faire autrement : choisir une représentation, par exemple exclure les représentations par des suites presque partout nulles. Alors T_ϕ est définie en tout point et bijective. On choisira dans la suite cette seconde option qui permet de montrer plus aisément que T_ϕ préserve la mesure. Cependant, le choix n'influe aucunement sur le résultat puisque les deux transformations ainsi définies sont égales presque partout.

§8.3.37 LEMME.

Soit T une transformation de $[0, 1]$ telle que pour tout intervalle $[a, b]$, $\lambda(T([a, b])) = \lambda([a, b])$. Alors T préserve la mesure sur $[0, 1]$.

Démonstration. Un résultat classique de théorie de la mesure énonce que si T est une transformation sur un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \lambda)$, que $\mathcal{B}$ est engendrée par une algèbre $\mathcal{A}$, et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\lambda(T(A)) = \lambda(A)$, alors T préserve λ sur X . En l'appliquant au cas particulier $X = [0, 1]$, avec $\mathcal{A}$ l'ensemble des intervalles $[a, b] \subset [0, 1]$, on obtient le résultat voulu. ☺

§8.3.38 LEMME.

Soit T une transformation bijective de $[0, 1]$ préservant la mesure sur tout intervalle I de la forme $[\sum_{k=1}^p a_k b^{-k}, \sum_{k=1}^p a_k b^{-k} + b^{-p}]$, alors T préserve la mesure sur $[0, 1]$.

Démonstration. Soit $[a, b] \subset [0, 1]$. On peut écrire $[a, b]$ comme une union $\bigcup_{i=0}^{\infty} [a_i, a_{i+1}]$, avec pour tout $i \geq 0$, $a_{i+1} = a_i + b^{-k_i}$. On obtient alors, en utilisant l'hypothèse et la σ -additivité de

la mesure λ :

$$\begin{aligned}
 \lambda(T([a, b])) &= \lambda(T(\cup_{i=0}^{\infty} [a_i, a_{i+1}[))) \\
 &= \lambda(\cup_{i=0}^{\infty} T([a_i, a_{i+1}[))) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(T([a_i, a_{i+1}[))) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda([a_i, a_{i+1}[)) \\
 &= \lambda(\cup_{i=0}^{\infty} [a_i, a_{i+1}[)) \\
 &= \lambda([a, b])
 \end{aligned}$$

On conclut alors par le lemme précédent. $\odot$

§8.3.39 THÉORÈME.

Soit $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une bijection et $b \geq 2$ un entier. Alors la transformation T_{ϕ}^b préserve la mesure.

Démonstration. On rappelle dans un premier temps que la transformation T_{ϕ}^b est bien bijective (voir Remarque §8.3.36).

En utilisant le lemme précédent, on peut se contenter de montrer que T_{ϕ}^b préserve la mesure des intervalles de la forme $I = [a, a + b^{-k}]$ avec $a = \sum_{i=0}^k a_i b^{-i}$. Soit $N = \max\{\phi(i) \mid 0 \leq i \leq k\}$. On écrit alors $[0, 1]$ comme l'union des intervalles $A_i = [i \times b^{-N}, (i+1) \times b^{-N}]$ avec $0 \leq i \leq b^N - 1$.

Alors l'image de I par T_{ϕ}^b est égale à l'union des A_i pour $i \times b^{-N} = \sum_{j=0}^N x_j b^{-j}$, où $x_{\phi(j)} = a_j$ pour tout $0 \leq j \leq k$. Le nombre de tels A_j est exactement égal au nombre de suites de $\{0, \dots, b-1\}$ de longueur $N-k$, c'est-à-dire b^{N-k} . Or chaque A_j est de mesure b^{-N} , donc l'image de I par T_{ϕ}^b est de mesure $b^{-N} b^{N-k} = b^{-k}$, et est donc de même mesure que I puisque $\lambda(I) = b^{-k}$. $\odot$

§8.3.40 REMARQUE. Le théorème précédent peut être généralisé aisément aux bijections $\mathbf{N} + \dots + \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ (le domaine est l'union disjointe de k copies de $\mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$) qui engendrent alors des transformations préservant la mesure entre $[0, 1]^k$ et $[0, 1]$. Le cas particulier $\mathbf{N} + \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $(n, i) \mapsto 2n + i$ définit la transformation bien connue préservant la mesure entre le carré unité et l'intervalle $[0, 1]$:

$$(\sum_{i \geq 0} a_i 2^{-i}, \sum_{i \geq 0} b_i 2^{-i}) \mapsto \sum_{i \geq 0} a_{2i} 2^{-2i} + b_{2i+1} 2^{-2i-1}$$

§8.3.41 On définit la bijection :

$$\psi : \mathbf{N} + \mathbf{N} + \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, \quad (x, i) \mapsto 3x + i$$

De plus, on a des injections ι_i ($i = 0, 1, 2$) :

$$\iota_i : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} + \mathbf{N} + \mathbf{N}, \quad x \mapsto (x, i)$$

On notera ψ_i la composée $\psi \circ \iota_i : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$.

§8.3.42 DÉFINITION.

Soit $A \subset \mathbf{N} + \mathbf{N} + \mathbf{N}$ un ensemble fini. On écrit A sous la forme $A_0 + A_1 + A_2$, et on note, pour $i = 0, 1, 2$, n_i le cardinal de A_i si $A_i \neq \emptyset$ et $n_i = 1$ sinon. On définit alors une partition de $[0, 1]$, notée $\mathcal{P}_A = \{P_A^{i_1, i_2, i_3} \mid \forall k \in \{0, 1, 2\}, 0 \leq i_k \leq n_k - 1\}$, définie par :

$$P_A^{i_1, i_2, i_3} = \{ \sum_{j \geq 1} a_j 2^{-j} \mid \forall k \in \{0, 1, 2\}, \frac{i_k}{n_k} \leq \sum_{j \geq 1} a_{\psi_k(j)} 2^{-j} \leq \frac{i_k + 1}{n_k} \}$$

Lorsque A_k est vide ou de cardinal 1, on ne notera pas l'élément i_k correspondant dans le triplet (i_1, i_2, i_3) puisque celui-ci est nécessairement égal à zéro.

§8.3.43 PROPOSITION.

On garde les notations de la définition précédente. Soit $X = P_A^{i_1, i_2, i_3}$ et $Y = P_A^{j_1, j_2, j_3}$ deux éléments de la partition $\mathcal{P}_A$. Pour tout $x = \sum_{l \geq 1} a_l 2^{-l}$, on note $T_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3}(x) = \sum_{l \geq 1} b_l 2^{-l}$ où la suite (b_i) est définie par :

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \sum_{l \geq 1} b_{\psi_k(l)} 2^{-l} = \sum_{l \geq 1} a_{\psi_k(l)} 2^{-l} + j_k - i_k$$

Alors $T_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3} : X \rightarrow Y$ est une bijection préservant la mesure.

Démonstration. Pour $k = 0, 1, 2$, on notera (m_l^k) la suite telle que $j_k - i_k = \sum_{l \geq 1} m_l^k 2^{-l}$. On peut alors définir le réel $t = \sum_{l \geq 1} \sum_{k=0,1,2} m_l^k 2^{-3j+k}$. Il suffit ensuite de vérifier que $T_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3}(x) = x + t$. Comme $T_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3}$ est une translation, c'est une bijection préservant la mesure. $\odot$

§8.3.44 DÉFINITION.

Soit $A \subset \mathbf{N}$ un ensemble fini muni de la mesure de comptage normalisée — c'est-à-dire telle que A soit de mesure 1, et $X \subset \mathcal{B}(\mathbf{R} \times A)$ un ensemble mesurable. On définit le sous-ensemble mesurable $\lceil A \rceil \in \mathbf{R} \times [0, 1]$:

$$\lceil A \rceil = \{(x, y) \mid \exists z \in A, (x, z) \in X, y \in P_A^z\}$$

On notera $\mathcal{P}_A^{-1} : [0, 1] \rightarrow A$ la fonction qui à un élément x associe l'élément $z \in A$ tel que $x \in P_A^z$.

§8.3.45 PROPOSITION.

Soit $D^A \subset \mathbf{N}$ un ensemble fini muni de la mesure μ de comptage normalisée (telle que $\mu(A) = 1$), $S, T \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \times D^A)$ des ensembles mesurables, et $\phi : S \rightarrow T$ une transformation préservant la mesure. On définit $\lceil \phi \rceil : \lceil S \rceil \rightarrow \lceil T \rceil$ par :

$$\lceil \phi \rceil : (x, y) \mapsto (x', y') \quad \phi(x, \mathcal{P}_A^{-1}(y)) = (x', z), \quad y' = T_{\mathcal{P}_A^{-1}(y)}^z$$

Alors $\lceil \phi \rceil$ est une bijection préservant la mesure.

Démonstration. On définit pour tout $(a, b) \in D^A$ l'ensemble $S_{a,b} = X \cap \mathbf{R} \times \{a\} \cap \phi^{-1}(Y \cap \mathbf{R} \times \{b\})$. La famille $(S_{a,b})_{a,b \in D^A}$ est une partition de S , et la famille $(\lceil S_{a,b} \rceil)_{a,b \in D^A}$ est une partition de $\lceil A \rceil$. La restriction de $\lceil \phi \rceil$ à $\lceil S_{a,b} \rceil$ peut alors être définie comme la composée $T_a \circ \phi_1$ où :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (\pi_1 \circ \phi) \times \text{Id} \\ T_a &= \text{Id} \times T_a^b \end{aligned}$$

Étant donné que le produit (resp. la composée) de bijections préservant la mesure est une transformation préservant la mesure, la restriction de $\lceil \phi \rceil$ à X_a est une bijection préservant la mesure. De plus, il est clair que l'image de $\lceil S \rceil$ par $\lceil \phi \rceil$ est $\lceil T \rceil$ et on a obtenu le résultat voulu. $\odot$

§8.3.46 DÉFINITION.

Soit A un graphage épais, c'est-à-dire de lieu $V^A \subset \mathbf{R} \times D^A$ mesurable, où D^A est une partie finie de $\mathbf{N}$ munie de la mesure de comptage normalisée. On définit le graphage

$$\lceil A \rceil = \{(\omega_e^A, \lceil \phi_e^A \rceil : \lceil S_e^A \rceil \rightarrow \lceil T_e^A \rceil)_{e \in E^A}$$

§8.3.47 DÉFINITION.

Soit A un graphage épais de dialecte D^A , et $\Omega : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ un isomorphisme d'espaces mesurés. On définit le graphage $!_\Omega A$ par :

$$!_\Omega A = \{(\omega_e^A, \Omega \circ \lceil \phi_e^A \rceil \circ \Omega^{-1} : \Omega(\lceil S_e^A \rceil) \rightarrow \Omega(\lceil T_e^A \rceil))_{e \in E^A}$$

§8.3.48 DÉFINITION.

Un projet α est dit équilibré si $\alpha = (0, A)$ où A est un graphage épais, c'est-à-dire I^A est un singleton, par exemple $I^A = \{1\}$, et $\alpha_1^A = 1$.

§8.3.49 DÉFINITION.

Soit α un projet équilibré. On définit $!_{\Omega}\alpha = (0, !_{\Omega}A)$. Si $\mathbf{A}$ est une conduite, on définit :

$$!_{\Omega}\mathbf{A} = \{!_{\Omega}\alpha \mid \alpha = (0, A) \in \mathbf{A}, \alpha \text{ équilibré}\}^{\perp\perp}$$

§8.3.50 On va montrer qu'il est possible d'implémenter la promotion fonctorielle. On définit pour cela les bijections $\tau, \theta : \mathbf{N} + \mathbf{N} + \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} + \mathbf{N} + \mathbf{N}$:

$$\tau : \begin{cases} (x, 0) \mapsto (x, 1) \\ (x, 1) \mapsto (x, 0) \\ (x, 2) \mapsto (x, 2) \end{cases}$$

$$\theta : \begin{cases} (x, 0) \mapsto (2x, 0) \\ (x, 1) \mapsto (2x + 1, 1) \\ (2x, 2) \mapsto (x, 1) \\ (2x + 1, 2) \mapsto (x, 2) \end{cases}$$

Ces bijections induisent des bijections de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ à travers $\psi : (x, i) \mapsto 3x + i$. On notera abusivement $T_{\tau} = T_{\psi \circ \tau \circ \psi^{-1}}$ et $T_{\theta} = T_{\psi \circ \theta \circ \psi^{-1}}$ les transformations induites $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ préservant la mesure.

§8.3.51 Soit $\alpha \in \sharp(\mathbf{A})$ et $\beta \in \sharp(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B})$, où ϕ est une délocalisation. Alors par définition $\alpha = (0, \Omega(\ulcorner A \urcorner))$ et $\beta = (0, \Omega(\ulcorner F \urcorner))$ où A, F sont des graphages de dialecte D^A, D^F . On définit les graphages $T = \{(1, \Omega(\text{Id} \times T_{\tau})), (1, (\Omega(\text{Id} \times T_{\tau}))^{-1})\}$ de lieu $V^{\phi(A)} \cup V^A$, et on notera t, t^* les deux éléments de E^T . On fixe (x, y) un élément de V^B et on va essayer de comprendre quelle est l'action du chemin $f_0 t a_0 t^* f_1 \dots t a_{k-1} t^* f_k$.

On fixe la partition $\mathcal{P}_{D^F + D^A}$ de $[0, 1]$, et on note (i, j) les entiers tels que $y \in \mathcal{P}_{D^F + D^A}^{i, j}$. Par définition de $\ulcorner F \urcorner$, la fonction $\ulcorner \phi_{f_0}^F \urcorner$ envoie cet élément sur (x_1, y_1) qui est un élément de $\mathcal{P}_{D^F + D^A}^{i_1, j_1}$ avec $j_1 = j$. Ensuite, la fonction ϕ_t envoie cet élément sur (x_2, y_2) , où $x_2 = x_1$ et y_2 est un élément de $\mathcal{P}_{D^F + D^A}^{j_1, i_1}$. La fonction $\ulcorner \phi_{a_0}^A \urcorner$ renvoie alors un élément (x_3, y_3) avec y_3 dans $\mathcal{P}_{D^F + D^A}^{j_2, i_2}$ avec $i_2 = i_1$. L'élément retourné par $\phi_{t^*} = \phi_t^{-1}$ est alors (x_4, y_4) où y_4 est un élément de $\mathcal{P}_{D^F + D^A}^{i_2, j_2}$. On voit donc comment la graphage T simule l'interaction dialectale. La proposition suivante montre comment utiliser le graphage T pour implémenter la promotion fonctorielle.

§8.3.52 Ces trois bijections vont donc nous servir à implémenter la promotion fonctorielle, une opération qui semble compliquée de premier abord. L'idée sous-jacente est pourtant relativement simple : on utilise trois copies de $\mathbf{N}$, disons $\mathbf{N}_i$ ($i = 0, 1, 2$). Lors de la promotion, on va coder l'information du dialecte dans la première copie $\mathbf{N}_0$ (remarquons ici, comme nous l'avons déjà signalé dans la Remarque §4.2.60, que la promotion n'est donc pas surjective, une chose qui sera indispensable par la suite). Supposons que l'on ait maintenant deux graphes promus : leurs informations sont donc sur la copie $\mathbf{N}_0$ dans chacun de ces graphes. Afin de simuler l'interaction dialectale, il faut rendre ces informations disjointes : on utilise pour cela la seconde copie $\mathbf{N}_1$. Ainsi, on applique à l'un des graphes promus la bijection τ (en pratique on utilise bien entendu la transformation T_{τ}) qui échange $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$. Les informations provenant des dialectes des deux graphes sont alors disjointes. On peut alors calculer l'exécution entre ceux-ci : on obtient comme résultat un graphe dont l'information du dialecte est codée sur les deux copies $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$! Afin de pouvoir considérer ce graphe comme la promotion d'un graphe épais, il faut donc déplacer cette information afin que celle-ci ne soit codée que sur la première copie

$\mathbf{N}_0$. C'est là que la troisième copie $\mathbf{N}_2$ va nous être utile : on utilise la bijection θ (en pratique on utilisera T_θ) afin de contracter les deux copies $\mathbf{N}_0$ et $\mathbf{N}_1$ sur la copie $\mathbf{N}_0$, tout en déployant la copie $\mathbf{N}_2$ sur les deux copies $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$.

§8.3.53 PROPOSITION.

On peut implémenter la promotion fonctorielle : pour toutes délocalisation ϕ, ψ et conduites $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ telles que $\phi(\mathbf{A}), \mathbf{A}, \mathbf{B}, \psi(\mathbf{B})$ soient de supports deux à deux disjoints, il existe un projet prom dans la conduite

$$!\phi(\mathbf{A}) \otimes !(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \multimap !\psi(\mathbf{B})$$

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ un projet équilibré, ϕ, ψ des délocalisations de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement. On définit les graphages $T = \{(1, \Omega(\text{Id} \times T_\tau)), (1, (\Omega(\text{Id} \times T_\tau))^{-1})\}$ de lieu $V^{\phi(\mathbf{A})} \cup V^{\mathbf{A}}$ et $P = \{(1, \Omega(\text{Id} \times T_\theta)), (1, (\Omega(\text{Id} \times T_\theta))^{-1})\}$ de lieu $V^{\mathbf{B}} \cup V^{\psi(\mathbf{B})}$. On notera $t = (0, T)$ et $p = (0, P)$. On définit alors le projet :

$$\text{prom} = (0, T \cup P) = t \otimes p$$

On va montrer que prom est un élément de $(!\phi(\mathbf{A}) \otimes !(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B})) \multimap !\psi(\mathbf{B})$.

On peut supposer, quitte à considérer des raffinements de A et F , que pour chaque $e \in E^A \cup E^F$, $(S_e)_2$ et $(T_e)_2$ sont des singletons³.

Soit $a \in \sharp\phi(\mathbf{A})$ et $f \in \sharp(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B})$. Alors par définition $a = (0, \Omega(\ulcorner A \urcorner))$ et $f = (0, \Omega(\ulcorner F \urcorner))$ où A, F sont des graphages de dialecte D^A, D^F . On a $a \otimes f :: \text{prom} = ((a :: t) :: f) :: p$ par associativité et commutativité de $::$ (on rappelle que $a \otimes f = a :: f$).

On montre que $\ulcorner A \urcorner :: \ulcorner T \urcorner$ est le graphage des $!^t \phi_a$ pour $a \in E^A$, où $!^t \phi_a$ est défini comme :

$$!^t \phi_a : (x, y) \mapsto (x', y'), \quad \phi_a(x, \mathcal{P}_{\{0\}+D^A}^{-1}(y)) = (x', z), \quad y' = T_{\mathcal{P}_{\{0\}+D^A}^{-1}(y)}^{(z, 1)}(y)$$

Ceci est presque évident. Un élément de $\ulcorner A \urcorner :: \ulcorner T \urcorner$ est un chemin de la forme tat^* . C'est donc la fonction $\phi_t \circ \ulcorner \phi_a \urcorner \circ \phi_t^{-1}$. Par définition,

$$\ulcorner \phi_a \urcorner : (x, y) \mapsto (x', y') \quad n = \mathcal{P}_A^{-1}(y), \quad \phi_a(x, n) = (x', k), \quad y' = T_n^k(y)$$

Or $\phi_t : \text{Id} \times T_\tau$ et T_τ est une bijection entre $\mathcal{P}_A(y)$ et $\mathcal{P}_{\{0\}+A}(1, y)$.

On décrit maintenant le graphage $G = (\ulcorner A \urcorner :: \ulcorner T \urcorner) :: \ulcorner F \urcorner$. Il est constitué des chemins de la forme $\rho = f_0(ta_0t^*)f_1(ta_1t^*)f_2 \dots f_{n-1}(ta_{n-1}t^*)f_n$. La fonction associée est donc définie par :

$$\phi_\rho = \ulcorner \phi_{f_0} \urcorner (!^t \phi_{a_0}) \ulcorner \phi_{f_1} \urcorner \dots \ulcorner \phi_{f_{n-1}} \urcorner (!^t \phi_{a_{n-1}}) \ulcorner \phi_{f_n} \urcorner$$

Soit $\pi = f_0a_0f_1 \dots f_{n-1}a_{n-1}f_n$ le chemin correspondant dans $F :: A$. La fonction ϕ_π est par définition de domaine et de codomaine des ensembles mesurables dans $\mathbf{R} \times D^F \times D^A$. On définit alors, pour une telle fonction, la fonction $i \phi_\pi$ par :

$$i \phi_\pi : (x, y) \mapsto (x', y') \\ (n, m) = \mathcal{P}_{D^F+D^A}^{-1}(y), \quad \phi_\pi(x, n, m) = (x', k, l), \quad y' = T_{(n, m)}^{(k, l)}(y)$$

On peut alors vérifier que $i \phi_\pi = \phi_\rho$.

Finalement, $G :: \ulcorner P \urcorner$ est le graphage constitué des chemins de la forme $p\rho p^*$ où ρ est un chemin dans G . Or $\phi_p = \text{Id} \times T_\theta$ effectue une bijection, pour chaque couple $(k, l) \in D^F \times D^A$, entre l'ensemble $\mathcal{P}_{D^F+D^A}^{k, l}$ et l'ensemble $\mathcal{P}_{\theta(D^F+D^A)}^{\theta(k, l)}$ où :

$$\theta(D^F + D^A) = \{\theta(f, a) \mid f \in D^F, a \in D^A\}$$

On en déduit que :

$$\phi_{p\rho p^*} : (x, y) \mapsto (x', y') \\ n = \theta(k, l) = \mathcal{P}_{\theta(D^F+D^A)}^{-1}(y) \quad \phi_\pi(x, k, l) = (x', k', l') \quad y' = T_n^{\theta(k', l')}(y)$$

3. Les ensembles S_e et T_e étant des parties d'un produit, on note $(S_e)_2$ (resp. $(T_e)_2$) le résultat de leur projection sur la seconde composante.

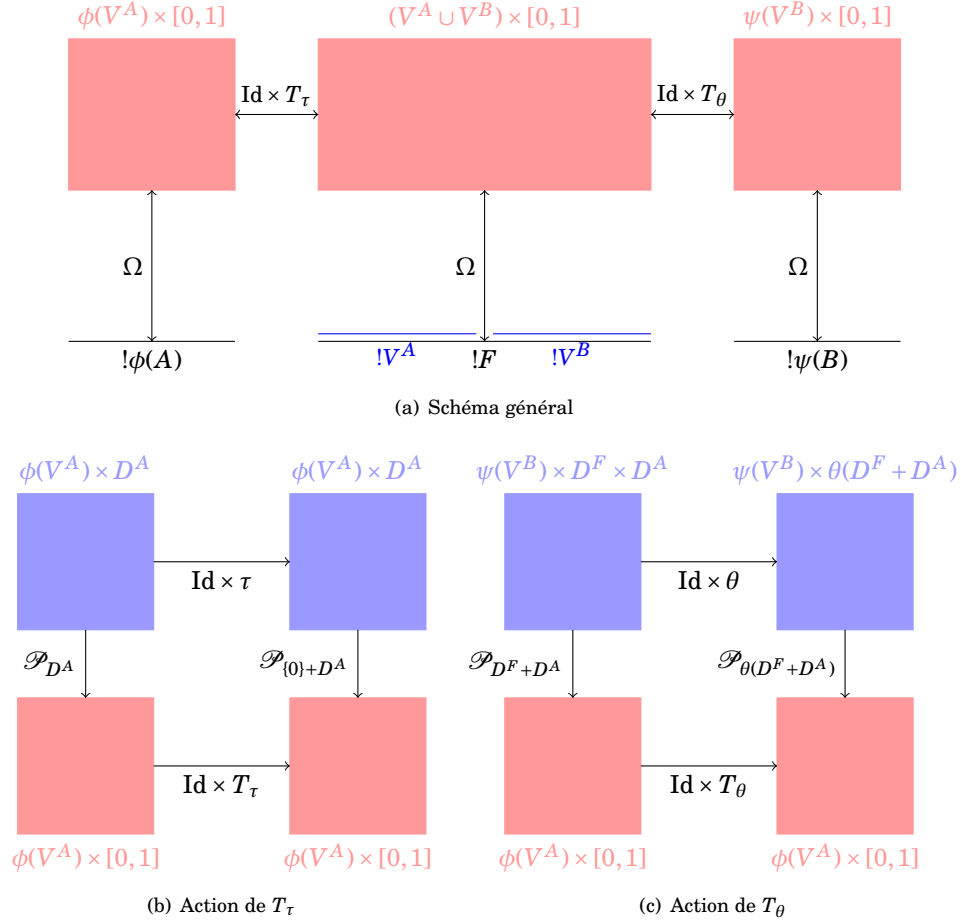


FIGURE 8.9 – Promotion Fonctorielle

Modulo la bijection $\mu : D^F \times D^A \rightarrow \theta(D^F + D^A) \subset \mathbf{N}$, on a donc bien que $G :: \ulcorner P \urcorner$ est la délocalisation (selon ψ) du graphage $!(F :: A)$.

Pour tout a, f dans respectivement $\sharp \mathbf{A}, \sharp(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B})$, il existe donc un projet b dans $\sharp \psi(\mathbf{B})$ tel que $\text{prom} :: (a \otimes f) = b$. Donc, on a montré que pour tout $g \in \sharp \mathbf{A} \odot \sharp(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B})$, on a $\text{prom} :: g \in !\mathbf{B}$, et donc $\text{prom} \in (\sharp \mathbf{A} \odot \sharp(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}))^{\perp\perp} \multimap \mathbf{B}$ par la Proposition §7.1.14. Or $(\sharp \mathbf{A} \odot \sharp(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}))^{\perp\perp} = !\mathbf{A} \otimes !(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B})$ par la Proposition §7.1.11. ☺

§8.3.54 Dans le cadre de la GdI5.1 [Gir11a], Girard montre que l'on obtient l'isomorphisme des exponentielles comme une égalité entre les conduites $!(\mathbf{A} \& \mathbf{B})$ et $!\mathbf{A} \otimes !\mathbf{B}$. Le cadre de la GdI5.2 est cependant bien différent. En effet, si l'introduction des comportements à la place des conduites positives et négatives est un apport extrêmement intéressant en terme d'additifs, cela pose certains problèmes au niveau des exponentielles. La première chose à remarquer est que la preuve de l'implication $!\mathbf{A} \otimes !\mathbf{B} \multimap !(\mathbf{A} \& \mathbf{B})$ dans un calcul des séquents avec la promotion fonctorielle et sans les règles de dérélction et de digging ne peut se faire qu'avec une règle d'affaiblissement n'étant pas restreinte aux seules formules de la forme $?A$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\overline{\vdash A, A^\perp} \text{ ax}}{\vdash A, B^\perp, A^\perp} \text{ weak} \quad \frac{\frac{\overline{\vdash B, B^\perp} \text{ ax}}{\vdash B, B^\perp, A^\perp} \text{ weak}}{\vdash B^\perp, A^\perp, A \& B} \& \\
\frac{\vdash B^\perp, A^\perp, A \& B}{\vdash ?B^\perp, ?A^\perp, !(A \& B)} ! \\
\hline
\vdash !A \otimes !B \multimap !(A \& B)
\end{array}$$

Ainsi, dans la GdI5.1, l'affaiblissement est disponible dans le cas des conduites positives (les seules formules auxquelles il est possible d'appliquer un ?), ce qui est cohérent avec le fait que l'inclusion $!A \otimes !B \subset !(A \& B)$ est satisfaite. Dans le cadre de la GdI5.2, l'affaiblissement n'étant pas disponible pour les comportements, nous pensons que cette inclusion n'est pas vérifiée. La question reste cependant ouverte.

§8.3.55 Concernant l'inclusion inverse, celle-ci ne semble également pas évidente à vérifier dans le cadre de la GdI5.2. Le problème de cette inclusion est en lien avec la règle de contraction. Celle-ci ne semblant pas possible dans le cas général (voir Remarque §8.4.4), on pourrait penser que l'inclusion $!(A \& B) \subset !A \otimes !B$ n'est pas satisfaite. On montrera cependant dans la Section 8.5 que celle-ci est vérifiée, par le biais de l'introduction de « connecteurs » additifs alternatifs. Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite de cette section et la suivante.

§8.3.56 PROPOSITION.

La conduite $\mathbf{1}$ est pérenne, et égale à $!\mathbf{T}$.

Démonstration. Par définition, $\mathbf{1} = \{(0, \emptyset)\}^{\perp\perp}$ est pérenne. De plus, les éléments équilibrés de $\mathbf{T}$ sont les projets de la forme $t_D = (0, \emptyset)$ et de dialectes $D \subset \mathbf{N}$. Chacun de ces éléments vérifie $!t_D = (0, \emptyset)$. Donc $\#\mathbf{T} = \{(0, \emptyset)\}$ et $!\mathbf{T} = \mathbf{1}$. $\odot$

§8.3.57 COROLLAIRE.

La conduite $\perp$ est co-pérenne et égale à $?0$.

Démonstration. C'est immédiat : $\perp = \mathbf{1}^\perp = (!\mathbf{T})^\perp = (\#\mathbf{T})^{\perp\perp\perp} = (\#\mathbf{T})^\perp = (\#0^\perp)^\perp = ?0$. $\odot$

8.4 Adéquation

Calcul des séquents

§8.4.1 Pour gérer les trois morphologies (comportement, pérenne et co-pérenne), on introduit trois types de formules.

§8.4.2 DÉFINITION.

On définit trois sortes de formules, (C)omportements, (N)égatives — pérennes, et (P)ositives — co-pérennes, inductivement par la grammaire :

$$\begin{aligned}
C &:= \mathbf{T} \mid \mathbf{0} \mid X \mid X^\perp \mid C \otimes C \mid C \wp C \mid C \oplus C \mid C \& C \mid N \otimes C \mid P \wp C \\
N &:= \mathbf{1} \mid P^\perp \mid !C \mid N \otimes N \mid N \oplus N \\
P &:= \perp \mid N^\perp \mid ?C \mid P \wp P \mid P \& P
\end{aligned}$$

§8.4.3 DÉFINITION.

On définit les *pré-séquents* $\Delta \Vdash \Gamma; \Theta$ où Δ, Θ contiennent des formules pérennes, Θ contient au plus un élément, et Γ ne contient que des comportements.

§8.4.4 La Proposition §8.1.2 suppose que l'on travaille avec des comportements, et ne permet donc pas d'interpréter la contraction en général. Il est cependant possible de montrer de la même manière que la contraction peut être interprétée lorsque le séquent contient au moins un comportement (proposition suivante). Cette restriction du contexte est indispensable : sans comportements dans le séquent, il n'est pas possible d'interpréter la contraction, puisque la propriété d'inflation est nécessaire pour montrer que $(1/2)\phi(!a) \otimes \psi(!a) + (1/2)o$ est dans

$\phi(!\mathbf{A}) \otimes \psi(!\mathbf{A})$. Pour être plus précis, le projet $\mathcal{C}\text{tr}_{\phi}^{\psi} :: !a$ permet d'interpréter la contraction, mais celui-ci n'est pas gagnant (voir la section suivante). On montrera dans la section suivante que ce résultat peut être amélioré par le biais de l'introduction de connecteurs additifs alternatifs.

§8.4.5 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}$ une conduite et ϕ, ψ des délocalisations disjointes de $!V^A$. Soit $\mathbf{C}$ un comportement et θ une délocalisation disjointe de ϕ et ψ . Alors le projet $\mathcal{C}\text{tr}_{\phi \cup \theta}^{\psi}$ est dans le comportement :

$$(!\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \multimap (\phi(!\mathbf{A}) \otimes \psi(!\mathbf{A}) \otimes \theta(\mathbf{C}))$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition §8.1.2. On montre de la même manière que le projet $\mathcal{C}\text{tr}_{\phi \cup \theta}^{\psi} :: (a \otimes c)$ est universellement équivalent à :

$$\frac{1}{2} \phi(!a) \otimes \psi(!a) \otimes \theta(\mathbf{C}) + \frac{1}{2} o$$

Puisque $!\mathbf{A}$ est une conduite négative et $\mathbf{C}$ un comportement, la conduite $(\phi(!\mathbf{A}) \otimes \psi(!\mathbf{A}) \otimes \theta(\mathbf{C}))$ est un comportement. Donc $\mathcal{C}\text{tr}_{\phi \cup \theta}^{\psi} :: (a \otimes c)$ est un élément de $(\phi(!\mathbf{A}) \otimes \psi(!\mathbf{A}) \otimes \theta(\mathbf{C}))$. On a finalement montré que $\mathcal{C}\text{tr}_{\phi \cup \theta}^{\psi}$ est un élément du comportement $(!\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \multimap (\phi(!\mathbf{A}) \otimes \psi(!\mathbf{A}) \otimes \theta(\mathbf{C}))$. ☺

§8.4.6 De même, la preuve de la distributivité repose sur la propriété $\mathbf{A} + \mathbf{B} \subset \mathbf{A} \& \mathbf{B}$, qui n'est pas satisfaite en général. Il est donc nécessaire de se restreindre à des pré-séquents contenant au moins un comportement pour interpréter la règle $\&$. En effet, on peut penser à un pré-séquent $\Delta \Vdash \Gamma; \Theta$ comme la conduite $\mathfrak{A} \Delta^{\perp} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \Gamma \mathfrak{A} \mathfrak{B} \Theta$ — ce sera même la définition de leur interprétation. Une telle conduite est bien un comportement lorsque Γ est non vide et Θ est vide, mais n'est ni pérenne ni co-pérenne lorsque $\Gamma = \emptyset$. On se restreint donc aux pré-séquents tels que $\Gamma \neq \emptyset$ et $\Theta = \emptyset$.

§8.4.7 DÉFINITION (SÉQUENTS).

Un séquent $\Delta \vdash \Gamma$; est un pré-séquent $\Delta \Vdash \Gamma; \Theta$ tel que Γ soit non vide et Θ soit vide.

§8.4.8 DÉFINITION (SYSTÈME ELL_{comp}).

Une preuve dans le système ELL_{comp} est une dérivation construite à partir des règles de dérivation présentées dans la Figure 8.10 page 188.

Vérité

§8.4.9 La notion de gain est la généralisation naturelle de la notion correspondante sur les graphes. Le graphage d'un projet gagnant sera donc une union disjointe de transpositions. Un tel graphage peut être représenté par un graphe avec un nombre de sommets éventuellement infini, mais nous travaillons avec des classes d'équivalence de graphages. Ainsi, on peut nécessairement trouver un représentant plus simple : un graphage à deux arêtes.

§8.4.10 DÉFINITION.

Un projet $a = (a, A)$ est *gagnant* lorsque $a = 0$ et A est équilibré et est une union disjointe de transpositions :

- pour tout $e \in E^A$, $\omega_e^A = 1$;
- pour tout $e, f \in E^A$, $S_e^A \cap S_f^A$ et $T_e^A \cap T_f^A$ sont négligeables ;
- pour tout $e \in E^A$, $\exists e^* \in E^A$, $\phi_{e^*}^A = (\phi_e^A)^{-1}$ — en particulier $S_e^A = T_{e^*}^A$ et $T_e^A = S_{e^*}^A$;

Une conduite $\mathbf{A}$ est *vraie* lorsqu'elle contient un projet gagnant.

§8.4.11 LEMME.

Si $a = (0, A)$ est gagnant, on peut trouver un représentant $\hat{A}$ de la classe d'équivalence modulo $\sim_{\leq}$ de A tel que $E^{\hat{A}}$ soit de cardinal 2.

$\frac{}{\vdash C^\perp, C;}^{\text{ax}} \qquad \frac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1, C; \quad \Delta_2 \vdash \Gamma_2, C^\perp;}{\Delta_1, \Delta_2 \vdash \Gamma_1, \Gamma_2;}^{\text{cut}}$	
(a) Groupe Identité	
$\frac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1, C_1; \quad \Delta_2 \vdash \Gamma_2, C_2;}{\Delta_1, \Delta_2 \vdash \Gamma_1, \Gamma_2, C_1 \otimes C_2;}^{\otimes} \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, C_1, C_2;}{\Delta \vdash \Gamma, C_1 \wp C_2;}^{\wp}$	
$\frac{\Delta, N_1, N_2 \vdash \Gamma;}{\Delta, N_1 \otimes N_2 \vdash \Gamma;}^{\otimes_g^{pol}} \qquad \frac{\Delta, P^\perp \vdash \Gamma, C;}{\Delta \vdash \Gamma, P \wp C;}^{\wp^{mix}}$	
$\frac{\Delta \vdash \Gamma, C;}{\Delta \vdash \Gamma, C \otimes \mathbf{1};}^{\mathbf{1}_d} \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma;}{\Delta, \mathbf{1} \vdash \Gamma;}^{\mathbf{1}_g}$	
(b) Groupe Multiplicatif	
$\frac{\Delta \vdash \Gamma, C_i;}{\Delta \vdash \Gamma, C_1 \oplus C_2;}^{\oplus_i} \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, C_1; \quad \Delta \vdash \Gamma, C_2;}{\Delta \vdash \Gamma, C_1 \& C_2;}^{\&}$	
$\frac{}{\Delta \vdash \Gamma, \top;}^{\top} \qquad \text{Pas de règles pour } 0.$	
(c) Groupe Additif	
$\frac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1, C_1; \quad \Delta_2 \vdash \Gamma_2, C_2;}{! \Delta_1, \Delta_2, ! \Gamma_1^\perp \vdash \Gamma_2, ! C_1 \otimes C_2;}^{\text{!}}$	
$\frac{\Delta, !A, !A \vdash \Gamma;}{\Delta, !A \vdash \Gamma;}^{\text{ctr}(\Gamma)} \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma;}{\Delta, N \vdash \Gamma;}^{\text{aff}}$	
(d) Groupe Exponentiel	

FIGURE 8.10 – Calcul des séquents ELL_{comp}

Démonstration. On peut définir une partition E_1, E_2 de E^A telle que pour chaque couple e, e^* dans E^A , on a $e \in E_1$ si et seulement si $e^* \in E_2$. Il suffit alors de définir

$$\hat{A} = \{(1, \bigcup_{e \in E_1} \phi_e^A : \bigcup_{e \in E_1} S_e^A \rightarrow \bigcup_{e \in E_1} T_e^A), (1, \bigcup_{e \in E_2} \phi_e^A : \bigcup_{e \in E_2} S_e^A \rightarrow \bigcup_{e \in E_2} T_e^A)\}$$

Il est alors clair que $\hat{A}$ est un raffinement de A et on a donc terminé. $\odot$

§8.4.12 PROPOSITION (CONSISTANCE).

Les conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ ne peuvent être simultanément vraies.

Démonstration. On suppose $\mathbf{a} = (0, A)$ et $\mathbf{b} = (0, B)$ des projets gagnants dans respectivement $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$. Alors :

$$\ll \mathbf{a}, \mathbf{b} \gg = \ll A, B \gg$$

S'il existe un cycle de support non négligeable entre A et B , alors $\ll A, B \gg = \infty$. Sinon, $\ll A, B \gg = 0$. Dans les deux cas, on a une contradiction puisque $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne sont pas orthogonaux. $\odot$

§8.4.13 PROPOSITION (COMPOSITIONNALITÉ).

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ sont vrais, alors $\mathbf{B}$ est vrai.

Démonstration. Soit $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ et $\mathbf{f} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ des projets gagnants. Alors :

- Si $\ll \mathbf{a}, \mathbf{f} \gg = \infty$, la conduite $\mathbf{B}$ est égale à $\mathbf{T}_{VB}$ qui est gagnante (elle contient $(0, \emptyset)$);
- Sinon, $\ll \mathbf{a}, \mathbf{f} \gg = 0$ (la preuve est similaire à la précédente) et il suffit de montrer que $F :: A$ est une union disjointe de transpositions. Ceci est immédiat : à chaque chemin correspond un chemin inverse et le poids de chaque chemin est égal à 1, les conditions sur les ensembles source S_π et but T_π sont alors de simples vérifications.

Finalement, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ sont vraies, alors $\mathbf{B}$ est vraie. $\odot$

Interprétation des preuves

§8.4.14 La construction est maintenant classique. On définit un calcul localisé et on montre un résultat d'adéquation forte pour celui-ci. L'adéquation pour le calcul non localisé est alors obtenu en remarquant qu'il est possible de *localiser* toute dérivation dans celui-ci. On considérera que les variables sont ici définies avec comme lieu un intervalle de $\mathbf{R}$ de la forme $[i, i + 1[$.

§8.4.15 DÉFINITION.

On fixe $\mathcal{V} = \{X_i(j)\}_{i,j \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}}$ un ensemble de *variables localisées*. Pour $i \in \mathbf{N}$, l'ensemble $X_i = \{X_i(j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ sera appelé le *nom de variable* X_i , et on appellera un élément de X_i une *variable de nom* X_i .

Pour $i, j \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ on définit le *lieu* $\sharp X_i(j)$ de la variable $X_i(j)$ comme l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 2^i(2j + 1) \leq m < 2^i(2j + 1) + 1\}$$

§8.4.16 DÉFINITION (FORMULES DE LOCCELL_{comp}).

On définit inductivement les formules de la *logique linéaire élémentaire polarisée localisée* locELL_{comp} ainsi que leur *lieu* comme suit :

– Les comportements :

- Une variable $X_i(j)$ de nom X_i est un comportement dont le lieu est défini comme $\sharp X_i(j)$;
- Si $X_i(j)$ est une variable de nom X_i , alors $(X_i(j))^\perp$ est un comportement de lieu $\sharp X_i(j)$.
- Les constantes $\mathbf{T}_{\sharp \Gamma}$ sont des comportements de lieu $\sharp \Gamma$;
- Les constantes $\mathbf{0}_{\sharp \Gamma}$ sont des comportements de lieu $\sharp \Gamma$.
- Si A, B sont des comportements de lieux X, Y tels que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \otimes B$ (resp. $A \wp B$, resp. $A \& B$, resp. $A \oplus B$) est un comportement de lieu $X \cup Y$;
- Si A est une conduite pérenne de lieu X et B un comportement de lieu Y tel que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \otimes B$ est un comportement de lieu $X \cup Y$;

- Si A est une conduite co-pérenne de lieu X et B un comportement de lieu Y tel que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \wp B$ est un comportement de lieu $X \cup Y$;
- **Les conduites pérennes :**
 - La constante $\mathbf{1}$ est une conduite pérenne ;
 - Si A est un comportement ou une conduite pérenne de lieux X , alors $!A$ est une conduite pérenne de lieu $\Omega(X \times [0, 1])$;
 - Si A, B sont des conduites pérennes de lieux X, Y tels que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \otimes B$ (resp. $A \oplus B$) est une conduite pérenne de lieu $X \cup Y$;
- **Les conduites co-pérennes :**
 - La constante $\perp$ est une conduite co-pérenne ;
 - Si A est un comportement ou une conduite co-pérenne de lieux X , alors $?A$ est une conduite co-pérenne de lieu $\Omega(X \times [0, 1])$;
 - Si A, B sont des conduites co-pérennes de lieux X, Y tels que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \wp B$ (resp. $A \& B$) est une conduite co-pérenne de lieu $X \cup Y$;

Si A est une formule, on écrira $\sharp A$ le lieu de A . On définit également les séquents $\Delta \vdash \Gamma$; de $\text{locELL}_{\text{comp}}$ lorsque :

- les formules de $\Gamma \cup \Delta$ ont des lieux deux à deux disjoints ;
- les formules de Δ sont des conduites pérennes ;
- Γ est non vide et ne contient que des comportements.

§8.4.17 DÉFINITION (INTERPRÉTATIONS).

On définit une *base d'interprétation* comme une fonction Φ qui associe à chaque nom de variable X_i un comportement de support $[0, 1[$.

§8.4.18 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES FORMULES DE $\text{LOCCELL}_{\text{comp}}$).

Soit Φ une base d'interprétation. On définit l'interprétation $I_\Phi(F)$ selon Φ d'une formule F inductivement :

- Si $F = X_i(j)$, alors $I_\Phi(F)$ est la délocalisation (i.e. un comportement) de $\Phi(X_i)$ suivant la fonction $x \mapsto 2^i(2j+1)+x$;
- Si $F = (X_i(j))^\perp$, on définit le comportement $I_\Phi(F) = (I_\Phi(X_i(j)))^\perp$;
- Si $F = \mathbf{T}_{\sharp\Gamma}$ (resp. $F = \mathbf{0}_{\sharp\Gamma}$), on définit $I_\Phi(F)$ comme le comportement $\mathbf{T}_{\sharp\Gamma}$ (resp. $\mathbf{0}_{\sharp\Gamma}$) ;
- Si $F = \mathbf{1}$ (resp. $F = \perp$), on définit $I_\Phi(F)$ comme le comportement $\mathbf{1}$ (resp. $\perp$) ;
- Si $F = A \otimes B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \otimes I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \wp B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \wp I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \oplus B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \oplus I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \& B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \& I_\Phi(B)$;
- Si $F = !A$ (resp. $?A$), on définit la conduite $I_\Phi(F) = !I_\Phi(A)$ (resp. $?I_\Phi(A)$).

De plus, un séquent $\Delta \vdash \Gamma$; sera interprété comme le $\wp$ des formules de Γ et des négations des formules de Δ , que l'on écrira $\wp \Delta^\perp \wp \wp \Gamma$. On pourra également représenter cette formule par la formule équivalente $\otimes \Delta \multimap (\wp \Gamma)$.

§8.4.19 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES PREUVES DE $\text{LOCCELL}_{\text{comp}}$).

Soit Φ une base d'interprétation. On définit l'interprétation d'une preuve $I_\Phi(\pi)$ — un projet — inductivement :

- si π consiste uniquement en une règle axiome introduisant $\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j')$, on définit $I_\Phi(\pi)$ comme le projet $\wp \Delta^\perp \wp \wp \Gamma$ défini par la translation $x \mapsto 2^i(2j' - 2j) + x$;
- si π consiste uniquement en une règle $\mathbf{T}_{\sharp\Gamma}$, on définit $I_\Phi(\pi) = \mathbf{0}_{\sharp\Gamma}$;
- si π est obtenue à partir de π' par une règle $\wp$, $\wp^{mix}$, $\otimes_g^{pol}$, ou une règle introduisant $\mathbf{1}$, alors $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi')$;
- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle $\otimes$, on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) \otimes I_\Phi(\pi_2)$;
- si π est obtenue à partir de π' par une règle aff ou $\oplus_i$ introduisant une formule de lieu V , on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi') \otimes_{\text{OV}}$;
- si π de conclusion $\vdash \Gamma, A_0 \& A_1$ est obtenue à partir de π_0 et π_1 par une règle $\&$, on définit l'interprétation de π comme dans le cas du $\&$ traité au Chapitre 7 ;
- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle de promotion $!$, on pense à cette règle comme à une « dérivation » de pré-séquents :

$$\frac{\frac{\frac{\vdots^{\pi_1}}{\Delta_1 \vdash \Gamma_1, C_1}; \quad \frac{\frac{\vdots^{\pi_2}}{\Delta_2 \vdash \Gamma_2, C_2};}{! \Delta_2, ! \Gamma_2^\perp \Vdash ! C_2} !}{! \Delta_2, \Delta_1, ! \Gamma_2^\perp \vdash \Gamma_1, C_1 \otimes ! C_2} \otimes^{mix}$$

On définit donc dans un premier temps une délocalisation de $I_\Phi(\pi)$ sur laquelle on applique l'implémentation de la promotion fonctorielle. En effet, l'interprétation

$$\mathfrak{N}_{\Delta^\perp} \mathfrak{N}_\Gamma$$

peut être mise sous la forme d'une suite d'implications. L'exponentielle d'une délocalisation bien choisie est alors représentée par :

$$!(\phi_1(\mathbf{A}_1) \multimap (\phi_2(\mathbf{A}_2) \multimap \dots (\phi_n(\mathbf{A}_n) \multimap \phi_{n+1}(\mathbf{A}_{n+1})) \dots))$$

En appliquant n instances du projet qui implémente la promotion fonctorielle sur l'interprétation de π , on obtient alors un projet p dans :

$$!(\phi_1(\mathbf{A}_1)) \multimap !(\phi_2(\mathbf{A}_2)) \multimap \dots !(\phi_n(\mathbf{A}_n)) \multimap !(\phi_{n+1}(\mathbf{A}_{n+1}))$$

qui est la même conduite que celle interprétant la conclusion de la « règle » de promotion dans la « dérivation de pré-séquents » que nous avons définie. Il suffit alors de prendre le tenseur de l'interprétation de π_2 et le projet p qui est un élément de l'interprétation de la conclusion ;

- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle de contraction ctr , on écrit la conduite interprétant l'hypothèse de la règle sous la forme $(! \mathbf{A} \otimes ! \mathbf{A}) \multimap \mathbf{D}$. On définit alors une délocalisation de celle-ci afin d'obtenir $(\phi(! \mathbf{A}) \otimes \psi(! \mathbf{A})) \multimap \mathbf{D}$, et on coupe avec le projet ctr dans $! \mathbf{A} \multimap (! \mathbf{A} \otimes ! \mathbf{A})$;
- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle de coupure cut ou cut^{pol} , on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) \dot{\cup} I_\Phi(\pi_2)$.

§8.4.20 THÉORÈME (ADÉQUATION POUR $locELL_{comp}$).

On fixe Φ une base d'interprétation. Soit π une dérivation dans $locELL_{comp}$ d'un séquent $\Delta \vdash \Gamma$. Alors $I_\Phi(\pi)$ est un projet gagnant dans $I_\Phi(\Delta \vdash \Gamma)$.

Démonstration. La preuve est immédiate du fait des propositions et théorèmes déjà démontrés. En effet, les cas des règles de la logique linéaire multiplicative additive ont été traités dans les chapitres précédents. Seules les règles exponentielles et des unités multiplicatives n'ont jamais été traitées. Or l'implémentation de la promotion fonctorielle (Proposition §8.3.53) utilise un projet gagnant et n'utilise pas d'hypothèses sur la morphologie des formules, et le projet de contraction (Définition §8.1.2 et Proposition §8.4.5) est gagnant. Quand aux unités multiplicatives, les règles les introduisant ne changent pas l'interprétation. ☺

§8.4.21 En suivant les remarques §6.3.12 et §6.3.15, on peut également choisir des énumérations des occurrences de variables afin de « localiser » les formules A et les preuves π de ELL_{comp} : on obtient des formules A^e et des preuves π^e de $locELL_{comp}$. Le théorème suivant est alors une simple conséquence du précédent.

§8.4.22 THÉORÈME (ADÉQUATION FORTE POUR ELL_{comp}).

Soit Φ une base d'interprétation, π une preuve de ELL_{comp} de conclusion $\Delta \vdash \Gamma$; et e une énumération des occurrences de variables dans les axiomes de π . Alors $I_\Phi(\pi^e)$ est un projet gagnant dans $I_\Phi(\Delta^e \vdash \Gamma^e)$.

8.5 Contraction, Conduites polarisées et ELL_{pol}

Définition et propriétés

§8.5.1 Dans cette section, on considère une variante des additifs. Celle-ci est construite sur la somme formelle $a + b$ entre projets. Essayons d'explicitier la différence entre les additifs $\&$ et $\oplus$ considérés jusqu'à présent et les additifs $\tilde{\&}$ et $\tilde{\oplus}$ définis dans cette section. La conduite $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ contient les tests nécessaires pour que l'ensemble des $\{a' \otimes o \mid a' \in \mathbf{A}^\perp\} \cup \{b' \otimes o \mid b' \in \mathbf{B}^\perp\}$ engendre la conduite $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$, et l'ensemble des projets de la forme $a + b$ n'est pas suffisant pour cela. Dans le cas des additifs introduits dans cette section, c'est le contraire : la conduite $\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B}$ est engendrée par les projets de la forme $a + b$, mais pour cela il nous faut rajouter dans $\mathbf{A} \tilde{\oplus} \mathbf{B}$ les tests nécessaires.

§8.5.2 DÉFINITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites de supports disjoints. On définit $\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp\perp}$. Dualelement, on définit $\mathbf{A} \tilde{\oplus} \mathbf{B} = (\mathbf{A}^\perp \tilde{\&} \mathbf{B}^\perp)^\perp$.

§8.5.3 Ces connecteurs nous seront utiles afin de montrer que l'inclusion $!(\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B}) \subset !\mathbf{A} \otimes !\mathbf{B}$ est satisfaite lorsque $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des comportements. On montre rapidement quelques propriétés de ces connecteurs avant de montrer cette inclusion. On notera que par définition, si l'une des conduites $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ est vide, alors $\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B}$ est vide. Ainsi, le comportement $\mathbf{0}_\emptyset$ est un élément absorbant pour $\tilde{\&}$. Ce dernier possède quand même un élément neutre : $\mathbf{1}!$ On remarque que le fait que $\tilde{\&}$ et $\otimes$ partagent la même unité apparaissait dans la GdI5.1 [Gir11a].

§8.5.4 PROPOSITION.

On peut implémenter la distributivité sur les comportements.

Démonstration. On utilise le même projet que pour la Proposition §7.1.41. La preuve est ensuite un simple calcul. ☺

§8.5.5 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements. Alors $\{a \otimes o_{VB} \mid a \in \mathbf{A}\} \cup \{b \otimes o_{VA} \mid b \in \mathbf{B}\} \subset \mathbf{A} \tilde{\oplus} \mathbf{B}$.

Démonstration. On montre l'une des inclusions seulement, l'autre est obtenue par symétrie. Soit $f + g \in \mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp$ et $a \in \mathbf{A}$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle\langle f + g, a \otimes o \rangle\rangle &= \langle\langle f, a \otimes o \rangle\rangle + \langle\langle g, a \otimes o \rangle\rangle \\ &= \langle\langle f, a \rangle\rangle \end{aligned}$$

Car g et a ont des mises nulles. ☺

§8.5.6 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements propres. Alors tout élément de $\mathbf{A} \tilde{\oplus} \mathbf{B}$ est observationnellement équivalent à un élément de $\{a \otimes o_{VB} \mid a \in \mathbf{A}\} \cup \{b \otimes o_{VA} \mid b \in \mathbf{B}\} \subset \mathbf{A} \tilde{\oplus} \mathbf{B}$.

Démonstration. Soit $c \in \mathbf{A} \tilde{\oplus} \mathbf{B}$. Pour tout $a + b \in \mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp$, $c \perp a + b$ puisque $(\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}^\perp)^\perp = \mathbf{A} \tilde{\oplus} \mathbf{B}$. Par le lemme d'homothétie (Lemme §7.1.17), on a, pour tous λ, μ différents de 0 :

$$\langle\langle c, \lambda a + \mu b \rangle\rangle = \lambda \langle\langle c, a \rangle\rangle + \mu \langle\langle c, b \rangle\rangle \neq 0, \infty$$

On en déduit que l'un parmi $\langle\langle c, a \rangle\rangle$ et $\langle\langle c, b \rangle\rangle$ est nul. Supposons qu'il s'agit de $\langle\langle c, a \rangle\rangle$, l'autre cas étant symétrique. Alors $\langle\langle c, a' \rangle\rangle = 0$ pour tout $a' \in \mathbf{A}^\perp$. Donc $\langle\langle b, c \rangle\rangle \neq 0, \infty$ pour tout $b \in \mathbf{B}^\perp$. Or $\langle\langle b \otimes o, c \rangle\rangle = \langle\langle b, c :: o \rangle\rangle$. On en déduit $c :: o \in \mathbf{B}^\perp$ et $c :: o \cong_{\mathbf{A} \tilde{\oplus} \mathbf{B}} c$. ☺

§8.5.7 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements propres. Alors $\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B}$ est un comportement propre.

Démonstration. On a $\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp\perp}$. Or $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ne contiennent que des projets sans mises et sont non vides. Donc $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est non vide et contient uniquement des projets sans mises. Donc $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\perp$ est clos par inflation. De plus, si $a + b \in \mathbf{A} + \mathbf{B}$, on a $a + b + \lambda o = (a + \lambda o) + b$. Comme $\mathbf{A}$ est clos par inflation, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est clos par inflation. Donc $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\perp$ ne contient que des projets sans mise. De plus, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\perp = \mathbf{A}^\perp \tilde{\oplus} \mathbf{B}^\perp$ et est donc non vide par la proposition précédente (car $\mathbf{A}^\perp, \mathbf{B}^\perp$ sont non vides). Donc $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\perp$ est un comportement propre, ce qui permet de conclure. ☺

§8.5.8 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements. Alors $!(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \subset !\mathbf{A} \otimes !\mathbf{B}$.

Démonstration. Si l'un des comportements parmi $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ est vide, $!(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) = \mathbf{0} = !\mathbf{A} \otimes !\mathbf{B}$. On peut donc maintenant supposer $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ non vides.

Soit $f = (0, F)$ un projet de mise nulle et tel que F n'a qu'une tranche. On a $f' = n_F / (n_F + n_G) f \in \mathbf{A}$ ssi $f \in \mathbf{A}$ par le lemme d'homothétie §7.1.17. De plus, comme $\mathbf{A}$ est un comportement, $f' \in \mathbf{A}$ est équivalent⁴ à $f'' = f' + \sum_{i \leq n_G} (1/(n_F + n_G)) o_i \in \mathbf{A}$. Puisque le graphage épais $\frac{n_F}{n_F + n_G} F + \sum_{i=1}^{n_G} \frac{1}{n_F + n_G} \emptyset$ est universellement équivalent §5.3.43 à un graphage épais à une tranche F' , on obtient finalement que le projet $(0, F')$ est dans $\mathbf{A}$ si et seulement si $f \in \mathbf{A}$. On définit de même, étant donné un projet g , un graphage épais à une tranche G' tel que $(0, G') \in \mathbf{B}$ si et seulement si $g \in \mathbf{B}$.

Il suffit maintenant de montrer que $!(0, F') \otimes !(0, G') = !(f + g)$. Par définition, le graphage de $!(0, F') \otimes !(0, G')$ est égal à $!_{\Omega} F' \uplus !_{\Omega} G'$. Par définition également, le graphage de $!(f + g)$ est égal à $!_{\Omega} (F + G) = !_{\Omega} F^{\iota_1} \uplus !_{\Omega} G^{\iota_2}$, où ι_1 (resp. ι_2) est l'injection de D^F (resp. D^G) dans $D^F \uplus D^G$. Il reste alors à remarquer que $!_{\Omega} F^{\iota_1} = !_{\Omega} F'$ car F^{ι_1} et F' sont des variants l'un de l'autre. De même $!_{\Omega} G^{\iota_2} = !_{\Omega} G'$. Finalement, on a $\#(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \# \mathbf{A} \otimes \# \mathbf{B}$ ce qui permet de conclure. ☺

§8.5.9 LEMME.

Soit $\mathbf{A}$ une conduite, ϕ, ψ des délocalisations disjointes. Il existe un projet gagnant dans

$$\mathbf{A} \multimap \phi(\mathbf{A}) \& \psi(\mathbf{A})$$

Démonstration. On définit $c = \mathfrak{F}ar_{\phi} \otimes o_{\psi(V^A)} + \mathfrak{F}ar_{\psi} \otimes o_{\phi(V^A)}$. Alors pour tout $a \in \mathbf{A}$:

$$c :: a = \phi(a) \otimes o_{\psi(V^A)} + \psi(a) \otimes o_{\phi(V^A)}$$

Donc $c \in \mathbf{A} \multimap \phi(\mathbf{A}) \& \psi(\mathbf{A})$. De plus, c est évidemment gagnant. ☺

§8.5.10 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}$ un comportement, ϕ, ψ des délocalisations disjointes. Il existe un projet gagnant dans

$$? \phi(\mathbf{A}) \wp ? \psi(\mathbf{A}) \multimap ? \mathbf{A}$$

Démonstration. Si $f \in ? \phi(\mathbf{A}) \wp ? \psi(\mathbf{A})$, alors $f \in ?(\phi(\mathbf{A}) \& \psi(\mathbf{A}))$ par la Proposition §8.5.8. De plus, on a un projet c dans $\mathbf{A}^{\perp} \multimap \phi(\mathbf{A}^{\perp}) \& \psi(\mathbf{A}^{\perp})$ par le lemme précédent. On peut alors utiliser la promotion fonctorielle et obtenir $c' \in !(\mathbf{A}^{\perp} \multimap \phi(\mathbf{A}^{\perp}) \& \psi(\mathbf{A}^{\perp}))$. Donc c' est dans $? \phi(\mathbf{A}) \& \psi(\mathbf{A}) \multimap ? \mathbf{A}$. Finalement, en composant, on obtient $f :: c'$ dans $? \mathbf{A}$. Donc c' implémente la contraction et est gagnant du fait que c est gagnant et que la promotion fonctorielle est obtenue par composition avec un projet gagnant. ☺

§8.5.11 COROLLAIRE.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des comportements, ϕ, ψ des délocalisations respectives. Alors il existe un projet gagnant dans la conduite

$$!(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \multimap !\phi(\mathbf{A}) \otimes !\psi(\mathbf{B})$$

Démonstration. C'est l'interprétation de la dérivation suivante dans le calcul que l'on définira plus tard :

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax}}{\text{||- } A, A^{\perp};}}{\text{||- } A^{\perp} \oplus B^{\perp}, A} \oplus_{d,2} \quad \frac{\frac{\frac{\text{ax}}{\text{||- } B, B^{\perp};}}{\text{||- } A^{\perp} \oplus B^{\perp}, B} \oplus_{d,1}}{\frac{!(A \& B) \text{ ||- }; !A}{!(A \& B) \text{ ||- }; !B} !} \otimes_{pol} \quad \frac{!(A \& B), !(A \& B) \text{ ||- }; !A \otimes !B}{!(A \& B) \text{ ||- }; !A \otimes !B} \text{ctr}$$

Le fait qu'il soit gagnant est une conséquence du théorème d'adéquation §8.5.39. ☺

4. L'implication $a \in \mathbf{A} \Rightarrow a + \lambda o \in \mathbf{A}$ vient de la définition des comportements, la réciproque se montre en remarquant que $a + \lambda o - \lambda o$ est équivalent à a .

Conduites Polarisées

Définitions

§8.5.12 Les morphologies pérennes/co-pérennes ne sont pas entièrement satisfaisantes. En particulier, nous ne savons pas montrer qu'une implication $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est pérenne ou co-pérenne, lorsque $\mathbf{A}$ est une conduite pérenne (resp. co-pérenne) et $\mathbf{B}$ est une conduite co-pérenne (resp. pérenne). Ceci est gênant pour l'interprétation du calcul des séquents : la règle de promotion doit être associée à une règle faisant intervenir des comportements afin de rester dans le cadre des comportements (grâce à la Proposition §8.3.26). En effet, un séquent $\vdash ?\Gamma, !A$ serait interprété par une conduite ni pérenne ni co-pérenne en général. Les séquents considérés doivent donc nécessairement contenir des comportements.

§8.5.13 On présente donc ici une morphologie alternative à l'approche pérenne/co-pérenne. L'idée est de relâcher quelque peu la notion de conduite pérenne afin d'obtenir la notion de conduite *négative*. L'intérêt est que les conduites positives/négatives gardent les mêmes propriétés que les conduites pérennes/co-pérennes tout en interagissant mieux avec les différents connecteurs. En particulier, on pourra interpréter la promotion fonctorielle habituelle (non associée à un $\otimes$), et on pourra utiliser la règle de contraction dans un cas plus général.

§8.5.14 DÉFINITION (CONDUITES POLARISÉES).

Une conduite positive $\mathbf{P}$ est une conduite close par inflation contenant les démons :

- $p \in \mathbf{P} \Rightarrow p + \lambda o \in \mathbf{P}$;
- $\forall \lambda \in \mathbf{R} - \{0\}, \mathcal{D}ai_\lambda = (\lambda, (V^P, \emptyset)) \in \mathbf{P}$.

Une conduite $\mathbf{N}$ est négative lorsque $\mathbf{N}^\perp$ est positive.

§8.5.15 PROPOSITION.

Une conduite pérenne est négative. Une conduite co-pérenne est positive.

Démonstration. On a déjà montré que les conduites co-pérennes sont closes par inflation (Proposition §8.3.19) et contiennent les démons (Proposition §8.3.22). ☺

§8.5.16 PROPOSITION.

Une conduite $\mathbf{A}$ est négative si et seulement si :

- $\mathbf{A}$ ne contient que des projets sans mise ;
- $a \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{1}_A \neq 0$.

Démonstration. Si $\mathbf{A}^\perp$ est positive, alors c'est une conduite non vide close par inflation, donc $\mathbf{A}$ ne contient que des projets sans mise par la Proposition §7.1.28. Par conséquent, si $a \in \mathbf{A}$, on a $\langle\langle a, \mathcal{D}ai_\lambda \rangle\rangle = \lambda \mathbf{1}_A$ donc la condition $\langle\langle a, \mathcal{D}ai \rangle\rangle \neq 0$ implique que $\mathbf{1}_A \neq 0$.

Inversement, si $\mathbf{A}$ vérifie les conditions énoncées, alors on distingue deux cas. Si $\mathbf{A}$ est vide, alors il est évident que $\mathbf{A}^\perp$ est positive. Sinon, $\mathbf{A}$ est un ensemble non vide de projets de mise nulle, donc $\mathbf{A}^\perp$ est clos par inflation. De plus, $\langle\langle a, \mathcal{D}ai \rangle\rangle = \mathbf{1}_A \lambda \neq 0$ du fait de la seconde condition et donc $\mathcal{D}ai \in \mathbf{A}^\perp$. Finalement, $\mathbf{A}^\perp$ est positive, donc $\mathbf{A}$ est négative. ☺

§8.5.17 Les conduites polarisées n'interagissent pas extrêmement bien avec les connecteurs $\tilde{\&}$ et $\tilde{\oplus}$. En effet, si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des conduites négatives, la conduite $\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B}$ est engendrée par un ensemble de projets de mise nulle, mais ne vérifiera pas la seconde condition des conduites négatives. De même, si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont positives, alors $\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B}$ vérifiera naturellement la propriété d'inflation, mais contiendra le projet $\mathcal{D}ai_0$ (ce qui implique que tout élément c dans le polaire est tel que $\mathbf{1}_C = 0$). Nous ne pouvons pas non plus dire quoique ce soit sur $\mathbf{A} \tilde{\&} \mathbf{B}$ lorsque $\mathbf{A}$ est positive et $\mathbf{B}$ négative, sauf qu'il est clos par inflation. Cependant, les connecteurs $\otimes, \&, \wp, \oplus$ interagissent bien avec ces morphologies.

Conduites polarisées et connecteurs

§8.5.18 PROPOSITION.

Le tenseur de conduites négatives est une conduite négative. Le $\&$ de conduites négatives est une conduite négative. Le $\oplus$ de conduites négatives est une conduite négative.

Démonstration. On a $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \emptyset$ si $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$ est vide, ce qui nous laisse à traiter le cas non vide. Dans le cas non vide, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{\perp\perp}$ est le bi-orthogonal d'un ensemble non vide de projets sans mises. Donc $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp}$ est clos par inflation. De plus $\ll a \otimes b, \mathcal{D}a \gg = \mathbf{1}_B \mathbf{1}_A \lambda$ qui est non nul car $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ sont non nuls. Donc $\mathcal{D}a \in (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp}$, ce qui montre que $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est négative puisque $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp}$ est positive.

L'ensemble $\mathbf{A}^{\perp} \upharpoonright_B$ contient les démons car $\mathcal{D}a \upharpoonright_{\lambda} \otimes o = \mathcal{D}a \upharpoonright_{\lambda}$, et $\mathcal{D}a \in \mathbf{A}^{\perp}$. Il vérifie de plus l'inflation car $(b + \lambda o) \otimes o = b \otimes o + \lambda o$. Donc $((\mathbf{A}^{\perp}) \upharpoonright_B)^{\perp}$ est négatif. De même, $((\mathbf{B}^{\perp}) \upharpoonright_A)^{\perp}$ est négatif et donc l'intersection est bien négative puisque les propriétés des conduites négatives sont préservées par intersection. Par conséquent, $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ est bien une conduite négative.

Dans le cas de $\oplus$, on utilise le fait que $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = (\mathbf{A} \upharpoonright_B \cup \mathbf{B} \upharpoonright_A)^{\perp}$. Si $a \in \mathbf{A}$, $a \otimes o = b$ est de mise nulle et vérifie $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A \neq 0$. Si $\mathbf{A}$ est vide, $(\mathbf{A} \upharpoonright_B)^{\perp}$ est positif. Si $\mathbf{A}$ n'est pas vide, alors la Proposition §7.1.29 nous permet d'affirmer que $(\mathbf{A} \upharpoonright_B)^{\perp}$ est close par inflation. De plus, le fait que tout élément $a \otimes o = b$ vérifie $\mathbf{1}_B \neq 0$ implique que $\mathcal{D}a \upharpoonright_{\lambda} \in (\mathbf{A} \upharpoonright_B)^{\perp}$ pour tout $\lambda \neq 0$. Donc $(\mathbf{A} \upharpoonright_B)^{\perp}$ est positive. Par conséquent, $\mathbf{A} \upharpoonright_B$ est négative. On montre de même que $\mathbf{B} \upharpoonright_A$ est négative. On en déduit que $\mathbf{A} \upharpoonright_B \cup \mathbf{B} \upharpoonright_A$ ne contient que des projets c sans mise et tels que $\mathbf{1}_C \neq 0$. Par conséquent, $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ est négative. $\odot$

§8.5.19 COROLLAIRE.

Le $\mathfrak{X}$ de deux conduites positives est une conduite positive, le $\&$ de deux conduites positives est une conduite positive, et le $\oplus$ de deux conduites positives est une conduite positive.

§8.5.20 COROLLAIRE.

Si $\mathbf{A}$ est négative et $\mathbf{B}$ positive, $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^{\perp})^{\perp}$ est positive.

§8.5.21 PROPOSITION.

Soit $\mathbf{A}$ positive et $\mathbf{B}$ négative. Alors $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est une conduite positive.

Démonstration. Soit $f \in (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp} = \mathbf{B} \multimap \mathbf{A}^{\perp}$. Alors pour tout élément $b \in \mathbf{B}$, $f :: b = (\mathbf{1}_B f + \mathbf{1}_F b, F :: B)$ est dans $\mathbf{A}^{\perp}$. Comme $\mathbf{A}^{\perp}$ est négatif, on en déduit que $\mathbf{1}_F \mathbf{1}_B \neq 0$ et $\mathbf{1}_B f + \mathbf{1}_F b = 0$. Donc $\mathbf{1}_F \neq 0$. De plus, $\mathbf{B}$ est une conduite négative, donc $\mathbf{1}_B \neq 0$ et $b = 0$. La condition $\mathbf{1}_B f + \mathbf{1}_F b = 0$ devient alors $\mathbf{1}_B f = 0$, c'est-à-dire $f = 0$.

Donc $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp}$ est une conduite négative, et finalement $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est une conduite positive. $\odot$

§8.5.22 COROLLAIRE.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des conduites négatives, $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est une conduite négative.

Démonstration. On a $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^{\perp})^{\perp}$. On vient de montrer que $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^{\perp}$ est une conduite positive, donc $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est une conduite négative. $\odot$

§8.5.23 PROPOSITION.

Le tenseur d'une conduite négative et d'un comportement est un comportement.

Démonstration. Soit $\mathbf{A}$ une conduite négative et $\mathbf{B}$ un comportement. Si $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$ est vide (ou les deux), $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp}$ est égal à $\mathbf{T}_{V^A \cup V^B}$ et on a terminé. On suppose donc que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont non vides.

Comme $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ne contiennent que des projets de mise nulle, l'ensemble $\{a \otimes b \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$ ne contient que des projets de mise nulle. Donc $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp}$ est clos par inflation : c'est une conséquence de la Proposition §7.1.29. Supposons qu'il existe $f \in (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp}$ tel que $f \neq 0$. Soit $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}$. Alors $\ll f, a \otimes b \gg = f \mathbf{1}_B \mathbf{1}_A + \ll F, A :: B \gg$. Comme $\mathbf{1}_A \neq 0$, on peut poser $\mu = -\ll F, A \cup B \gg / (\mathbf{1}_A f)$, et $b + \mu o \in \mathbf{B}$ puisque ce dernier est clos par inflation. On a alors :

$$\begin{aligned} \ll f, a \otimes (b + \mu o) \gg &= f \mathbf{1}_A (\mathbf{1}_B + \mu) + \ll F, A :: (B + \mu o) \gg \\ &= f \mathbf{1}_A \frac{-\ll F, A \cup B \gg}{\mathbf{1}_A f} + \ll F, A :: B \gg \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, puisque $f \in (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\perp}$. Donc $f = 0$.

$\otimes$	$\wp$	$\&$	$\oplus$
$\begin{array}{c c c} \text{N} & \text{N} & \text{P} \\ \hline \text{N} & \text{N} & \text{P} \\ \hline \text{P} & \text{P} & ? \end{array}$	$\begin{array}{c c c} \text{N} & \text{N} & \text{P} \\ \hline \text{N} & ? & \text{N} \\ \hline \text{P} & \text{N} & \text{P} \end{array}$	$\begin{array}{c c c} \text{N} & \text{N} & \text{P} \\ \hline \text{N} & \text{N} & ? \\ \hline \text{P} & ? & \text{P} \end{array}$	$\begin{array}{c c c} \text{N} & \text{N} & \text{P} \\ \hline \text{N} & \text{N} & ? \\ \hline \text{P} & ? & \text{P} \end{array}$
(a) Tenseur	(b) Parr	(c) Avec(1)	(d) Plus(1)

FIGURE 8.11 – Connecteurs et Polarisation

Finalement, on a montré que $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\perp$ est clos par inflation et ne contient que des projets de mise nulle. $\odot$

§8.5.24 COROLLAIRE.

Si $\mathbf{A}$ est une conduite négative et $\mathbf{B}$ un comportement, $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ est un comportement.

§8.5.25 PROPOSITION.

L'affaiblissement (à gauche) des conduites négatives est satisfait.

Démonstration. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ des conduites, et $\mathbf{N}$ une conduite négative. Soit $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$. On va montrer que $f \otimes \circ_{VN}$ est un élément de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{N} \multimap \mathbf{B}$. Pour cela, on choisit $a \in \mathbf{A}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $b' \in \mathbf{B}^\perp$,

$$\begin{aligned}
& \ll (f \otimes \circ) :: (a \otimes n), b' \gg \\
&= \ll f \otimes \circ, (a \otimes n) \otimes b' \gg \\
&= \ll f \otimes \circ, (a \otimes b') \otimes n \gg \\
&= \mathbf{1}_F(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B'} n + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_A b' + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_{B'} a) + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B'} f + \ll F \cup 0, A \cup B' \cup N \gg \\
&= \mathbf{1}_F(\mathbf{1}_N \mathbf{1}_A b' + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_{B'} a) + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B'} f + \ll F \cup 0, A \cup B' \cup N \gg \\
&= \mathbf{1}_N(\mathbf{1}_F(\mathbf{1}_A b' + \mathbf{1}_{B'} a) + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B'} f) + \mathbf{1}_N \ll F, A \cup B' \gg \\
&= \mathbf{1}_N \ll f, a \otimes b' \gg
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{1}_N \neq 0$, $\ll (f \otimes \circ) :: (a \otimes n), b' \gg \neq 0, \infty$ si et seulement si $\ll f :: a, b' \gg \neq 0, \infty$. Donc pour tout $a \otimes n \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{N}$, $(f \otimes \circ) :: (a \otimes n) \in \mathbf{B}$. Cela prouve que $f \otimes \circ \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{N} \multimap \mathbf{B}$ par la Proposition §7.1.14. $\odot$

Calcul des séquents

§8.5.26 Nous allons maintenant décrire un calcul des séquents se rapprochant plus du système ELL habituel. Celui-ci fonctionne sur le même principe que le calcul présenté plus haut. Nous allons à nouveau introduire trois types de formules : (C)omportements, (P)ositives, (N)égatives. Les séquents avec lesquels nous travaillerons seront donc l'équivalent des pré-séquents que nous avons définis.

§8.5.27 DÉFINITION.

On définit les trois types de formules — (C)omportements, (P)ositives, (N)égatives — par la grammaire suivante :

$$\begin{aligned}
C &:= X \mid X^\perp \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{T} \mid C \otimes C \mid C \wp C \mid C \oplus C \mid C \& C \mid C \otimes N \mid C \wp P \\
N &:= \mathbf{1} \mid !C \mid !N \mid N \otimes N \mid N \& N \mid N \oplus N \mid N \wp P \\
P &:= \perp \mid ?C \mid ?P \mid P \wp P \mid P \& P \mid P \oplus P \mid N \otimes P
\end{aligned}$$

§8.5.28 DÉFINITION.

Un séquent $\Delta \Vdash \Gamma; \Theta$ est tel que Δ, Θ contiennent uniquement des formules négatives, Θ contient au plus une formule et Γ ne contient que des comportements.

§8.5.29 DÉFINITION (SYSTÈME ELL_{pol}).

Le système ELL_{pol} est le système dont les règles sont données dans la Figure 8.12.

§8.5.30 REMARQUE. Malgré le fait que nous puissions considérer $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des conduites négatives, aucune règle du calcul ELL_{pol} ne permet de construire de telles formules. La raison est simple : puisque dans ce cas $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ n'est pas nécessairement inclus dans $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$, nous ne pouvons correctement interpréter la règle en général. Celle-ci peut être interprétée lorsque le contexte contient au moins un comportement, mais une telle condition peut poser des problèmes pour l'élimination des coupures (pour les cas de commutation). Nous avons donc choisi de présenter un système n'introduisant les additifs que sur les comportements. On remarque cependant qu'une formule contenant des additifs entre conduites négatives peut être introduite par un affaiblissement.

§8.5.31 PROPOSITION.

Le système ELL_{pol} admet une procédure d'élimination des coupures.

Démonstration. On ne fera pas la preuve qui ne pose pas de difficultés. ☺

§8.5.32 On peut alors définir une version localisée des formules, séquents et dérivations de ELL_{pol} . La technique est maintenant classique et ne cache aucune surprise. En donnant une interprétation naturelle des formules et dérivations du système localisé, on peut alors montrer un théorème d'adéquation localisé pour ce système.

§8.5.33 DÉFINITION.

On fixe $\mathcal{V} = \{X_i(j)\}_{i,j \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}}$ un ensemble de *variables localisées*. Pour $i \in \mathbf{N}$, l'ensemble $X_i = \{X_i(j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ sera appelé le *nom de variable* X_i , et on appellera un élément de X_i une *variable de nom* X_i .

Pour $i, j \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ on définit le *lieu* $\#X_i(j)$ de la variable $X_i(j)$ comme l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 2^i(2j+1) \leq m < 2^i(2j+1)+1\}$$

§8.5.34 DÉFINITION (FORMULES DE $locELL_{pol}$).

On définit inductivement les formules de $locELL_{pol}$ ainsi que leur *lieu* comme suit :

– **Les comportements :**

- Une variable $X_i(j)$ de nom X_i est un comportement dont le lieu est défini comme $\#X_i(j)$;
- Si $X_i(j)$ est une variable de nom X_i , alors $(X_i(j))^\perp$ est un comportement de lieu $\#X_i(j)$.
- Les constantes $\mathbf{T}_{\# \Gamma}$ sont des comportements de lieu $\# \Gamma$;
- Les constantes $\mathbf{0}_{\# \Gamma}$ sont des comportements de lieu $\# \Gamma$.
- Si A, B sont des comportements de lieux X, Y tels que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \otimes B$ (resp. $A \wp B$, resp. $A \& B$, resp. $A \oplus B$) est un comportement de lieu $X \cup Y$;
- Si A est une conduite négative de lieu X et B un comportement de lieu Y tel que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \otimes B$ est un comportement de lieu $X \cup Y$;
- Si A est une conduite positive de lieu X et B un comportement de lieu Y tel que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \wp B$ est un comportement de lieu $X \cup Y$;

– **Les conduites négatives :**

- La constante $\mathbf{1}$ est une conduite négative ;
- Si A est un comportement ou une conduite négative de lieu X , alors $!A$ est une conduite négative de lieu $\Omega(X \times [0, 1])$;
- Si A, B sont des conduites négatives de lieux X, Y tels que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \otimes B$ (resp. $A \oplus B$, resp. $A \& B$) est une conduite négative de lieu $X \cup Y$;
- Si A est une conduite négative de lieux X et B une conduite positive de lieux Y , $A \wp B$ est une conduite négative de lieu $X \cup Y$.

– **Les conduites positives :**

- La constante $\perp$ est une conduite positive ;
- Si A est un comportement ou une conduite positive de lieu X , alors $?A$ est une conduite positive de lieu $\Omega(X \times [0, 1])$;

- Si A, B sont des conduites positives de lieux X, Y tels que $X \cap Y = \emptyset$, alors $A \wp B$ (resp. $A \& B$, resp. $A \oplus B$) est une conduite positive de lieu $X \cup Y$;
- Si A est une conduite négative de lieu X et B une conduite positive de lieu Y , $A \otimes B$ est une conduite positive de lieu $X \cup Y$.

Si A est une formule, on écrira $\sharp A$ le lieu de A . On définit également les séquents $\Delta \Vdash \Gamma; \Theta$ de $\text{locELL}_{\text{pol}}$ lorsque :

- les formules de $\Gamma \cup \Delta \cup \Theta$ ont des lieux deux à deux disjoints ;
- les formules de Δ et Θ sont des conduites négatives ;
- il y a au plus une formule dans Θ ;
- Γ ne contient que des comportements.

§8.5.35 DÉFINITION (INTERPRÉTATIONS).

On définit une *base d'interprétation* comme une fonction Φ qui associe à chaque nom de variable X_i un comportement de support $[0, 1[$.

§8.5.36 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES FORMULES DE $\text{locELL}_{\text{pol}}$).

Soit Φ une base d'interprétation. On définit l'interprétation $I_\Phi(F)$ selon Φ d'une formule F inductivement :

- Si $F = X_i(j)$, alors $I_\Phi(F)$ est la délocalisation (i.e. un comportement) de $\Phi(X_i)$ suivant la fonction $x \mapsto 2^i(2j+1)+x$;
- Si $F = (X_i(j))^\perp$, on définit le comportement $I_\Phi(F) = (I_\Phi(X_i(j)))^\perp$;
- Si $F = \mathbf{T}_{\sharp\Gamma}$ (resp. $F = \mathbf{0}_{\sharp\Gamma}$), on définit $I_\Phi(F)$ comme le comportement $\mathbf{T}_{\sharp\Gamma}$ (resp. $\mathbf{0}_{\sharp\Gamma}$) ;
- Si $F = \mathbf{1}$ (resp. $F = \perp$), on définit $I_\Phi(F)$ comme le comportement $\mathbf{1}$ (resp. $\perp$) ;
- Si $F = A \otimes B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \otimes I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \wp B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \wp I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \oplus B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \oplus I_\Phi(B)$;
- Si $F = A \& B$, on définit la conduite $I_\Phi(F) = I_\Phi(A) \& I_\Phi(B)$;
- Si $F = !A$ (resp. $?A$), on définit la conduite $I_\Phi(F) = !I_\Phi(A)$ (resp. $?I_\Phi(A)$).

De plus, un séquent $\Delta \vdash \Gamma; \Theta$ sera interprété comme le $\wp$ des formules de Γ et Θ et des négations des formules de Δ , que l'on écrira $\wp \Delta^\perp \wp \wp \Gamma \wp \wp \Theta$. On pourra également représenter cette formule par la formule équivalente $\otimes \Delta \multimap (\wp \Gamma \wp \wp \Theta)$.

§8.5.37 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES PREUVES DE $\text{locELL}_{\text{pol}}$).

Soit Φ une base d'interprétation. On définit l'interprétation d'une preuve $I_\Phi(\pi)$ — un projet — inductivement :

- si π consiste uniquement en une règle axiome introduisant $\vdash (X_i(j))^\perp, X_i(j')$, on définit $I_\Phi(\pi)$ comme le projet $\wp \wp$ défini par la translation $x \mapsto 2^i(2j' - 2j) + x$;
- si π consiste uniquement en une règle $\mathbf{T}_{\sharp\Gamma}$, on définit $I_\Phi(\pi) = \mathbf{0}_{\sharp\Gamma}$;
- si π consiste uniquement en une règle $\mathbf{1}_d$, on définit $I_\Phi(\pi) = \mathbf{0}_\emptyset$;
- si π est obtenue à partir de π' par une règle $\wp$, $\otimes_g^{\text{pol}}$, $\wp_d^{\text{pol}}$, $\wp^{\text{mix}}$, ou $\mathbf{1}_g$, alors $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi')$;
- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle $\otimes$, $\otimes_d^{\text{pol}}$, $\wp_g^{\text{pol}}$ ou $\otimes^{\text{mix}}$, on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) \otimes I_\Phi(\pi_2)$;
- si π est obtenue à partir de π' par une règle aff ou $\oplus_i$ introduisant une formule de lieu V , on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi') \otimes \mathbf{0}_V$;
- si π de conclusion $\vdash \Gamma, A_0 \& A_1$ est obtenue à partir de π_0 et π_1 par une règle $\&$, on définit l'interprétation de π comme dans le cas $\&$ du Chapitre 7 ;
- si π est obtenue à partir de π' par une règle de promotion $!$ ou $!^{\text{pol}}$, on applique l'implémentation de la promotion fonctorielle à $I_\Phi(\pi')$ $n-1$ fois, où n est le nombre de formules dans le séquent ;
- si π est obtenue à partir de π par une règle de contraction ctr , on coupe celle-ci avec l'implémentation de la contraction décrite dans la Proposition §8.4.5 ;
- si π est obtenue à partir de π_1 et π_2 par une règle de coupure cut ou cut^{pol} , on définit $I_\Phi(\pi) = I_\Phi(\pi_1) \dot{\cap} I_\Phi(\pi_2)$.

§8.5.38 On obtient alors un résultat d'adéquation localisé pour le système $\text{locELL}_{\text{pol}}$, qui nous permet d'obtenir le théorème suivant.

§8.5.39 THÉORÈME.

Soit Φ une base d'interprétation, π une preuve de ELL_{pol} de conclusion $\Delta \Vdash \Gamma; \Theta$, et e une énumération des occurrences de variables dans les axiomes de π . Alors $I_{\Phi}(\pi^e)$ est un projet gagnant dans $I_{\Phi}(\Delta^e \vdash \Gamma^e; \Theta^e)$.

$\frac{}{\Vdash C^\perp, C;}^{\text{ax}}$	
$\frac{\frac{\Delta_1 \Vdash \Gamma_1; N \quad \Delta_2, N \Vdash \Gamma_2; \Theta}{\Delta_1, \Delta_2 \Vdash \Gamma_1, \Gamma_2; \Theta}^{\text{cut}^{pol}} \quad \frac{\Delta_1 \Vdash \Gamma_1, C; \Theta \quad \Delta_2 \Vdash \Gamma_2, C^\perp; \Theta}{\Delta_1, \Delta_2 \Vdash \Gamma_1, \Gamma_2; \Theta}^{\text{cut}}$	
(a) Groupe Identité	
$\frac{\frac{\Delta_1 \Vdash \Gamma_1, C_1; \Theta \quad \Delta_2 \Vdash \Gamma_2, C_2; \Theta}{\Delta_1, \Delta_2 \Vdash \Gamma_1, \Gamma_2, C_1 \otimes C_2; \Theta}^{\otimes} \quad \frac{\Delta \Vdash \Gamma, C_1, C_2; \Theta}{\Delta \Vdash \Gamma, C_1 \wp C_2; \Theta}^{\wp}$	
$\frac{\frac{\Delta, N_1, N_2 \Vdash \Gamma; \Theta}{\Delta, N_1 \otimes N_2 \Vdash \Gamma; \Theta}^{\otimes_g^{pol}} \quad \frac{\Delta_1 \Vdash \Gamma_1; N_1 \quad \Delta_2 \Vdash \Gamma_2; N_2}{\Delta_1, \Delta_2 \Vdash \Gamma_1, \Gamma_2; N_1 \otimes N_2}^{\otimes_d^{pol}}$	
$\frac{\frac{\Delta, P_1^\perp \Vdash \Gamma; N_2}{\Delta \Vdash \Gamma; P_1 \wp N_2}^{\wp_d^{pol}} \quad \frac{\Delta_1 \Vdash \Gamma_1; P_1^\perp \quad \Delta_2, N_2 \Vdash \Gamma_2; \Theta}{\Delta_1, \Delta_2, P_1 \wp N_2 \Vdash \Gamma_1, \Gamma_2; \Theta}^{\wp_g^{pol}}$	
$\frac{\frac{\Delta, P^\perp \Vdash \Gamma, C; \Theta}{\Delta \Vdash \Gamma, P \wp C; \Theta}^{\wp_{mix}} \quad \frac{\Delta_1 \Vdash \Gamma_1; N \quad \Delta_2 \Vdash \Gamma_2, C; \Theta}{\Delta_1, \Delta_2 \Vdash \Gamma_1, \Gamma_2, N \otimes C; \Theta}^{\otimes_{mix}}$	
$\frac{}{\Vdash; \mathbf{1}}^{\mathbf{1}_d} \quad \frac{\Delta \Vdash \Gamma; \Theta}{\Delta, \mathbf{1} \Vdash \Gamma; \Theta}^{\mathbf{1}_g}$	
(b) Groupe Multiplicatif	
$\frac{\frac{\Delta \Vdash \Gamma, C_i; \Theta}{\Delta \Vdash \Gamma, C_1 \oplus C_2; \Theta}^{\oplus_i} \quad \frac{\Delta \Vdash \Gamma, C_1; \Theta \quad \Delta \Vdash \Gamma, C_2; \Theta}{\Delta \Vdash \Gamma, C_1 \& C_2; \Theta}^{\&}$	
$\frac{}{\Delta \Vdash \Gamma, \top; \Theta}^{\top} \quad \text{Pas de règles pour } 0.$	
(c) Groupe Additif	
$\frac{\frac{\Delta \Vdash \Gamma; N}{!\Delta, !\Gamma^\perp \Vdash; !N}^{\text{!}^{pol}} \quad \frac{\Delta \Vdash \Gamma, C; \Theta}{!\Delta, !\Gamma^\perp \Vdash; !C}^{\text{!}}$	
$\frac{\Delta, !C, !C \Vdash \Gamma; \Theta}{\Delta, !C \Vdash \Gamma; \Theta}^{\text{ctr (C comportement)}} \quad \frac{\Delta \Vdash \Gamma; \Theta}{\Delta, N \Vdash \Gamma; \Theta}^{\text{aff}}$	
(d) Groupe Exponentiel	

FIGURE 8.12 – Calcul des séquents ELL_{pol}

Troisième partie

**Géométrie de l'Interaction dans
le Facteur Hyperfini**

CHAPITRE 9

CIRCUITS ET OPÉRATEURS

Table des matières

9.1	Circuits et Déterminant	204
9.1.1	La Propriété de Contraction	204
9.1.2	Contraction et Vérité	207
9.1.3	Circuits et Déterminant	210
9.2	Graphes d'interaction et premières GdI	213
9.2.1	Circuits et Nilpotence	213
9.3	Graphes d'interaction et GdI hyperfinie	214
9.3.1	Déterminant de Fuglede-Kadison	215
9.3.2	Matrices des poids	216
9.3.3	Graphes épais : dialectes purement non-commutatifs	216
9.3.4	Graphes tranchés : commutativité dans les dialectes	218
9.A	Graphages et GdI	221

- §9.1 Dans ce chapitre, on étudie deux choix particuliers de la fonction de quantification des circuits. On travaillera uniquement dans le cadre de l'adjonction des 1-circuits **Ad2**, et on considèrera les fonctions $x \mapsto \infty$ et $x \mapsto -\log(1-x)$. Nous commencerons par montrer certaines propriétés de la fonction de quantification des circuits $q(x) = -\log(1-x)$. On montrera alors que, si l'on se restreint à certains graphes, on peut associer à tout graphe un opérateur hermitien de norme au plus 1 dans le facteur hyperfini. Ce plongement des graphes s'étend aux projets : on associe à tout projet (α, A) un projet hyperfini $\alpha \cdot + \cdot \alpha + \Phi(A)$. Ce plongement nous permettra ensuite de comprendre les liens entre les graphes d'interaction et la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini.

9.1 Circuits et Déterminant

- §9.1.1 La première fonction de quantification qui nous intéresse dans ce chapitre est la fonction constante $q(x) = \infty$. Cette fonction possède une propriété particulière : si F, G sont deux graphes, alors $\llbracket F, G \rrbracket = \llbracket \angle(F), \angle(G) \rrbracket$, où les graphes $\angle(F), \angle(G)$ sont obtenus à partir de F et G en regroupant les arêtes. La mesure de l'interaction induite est donc invariante par cette opération de contraction des arêtes. Cela permet donc de se ramener au cas des graphes simples (ayant au plus une arête entre deux sommets fixés), c'est-à-dire au cas de matrices finies. La seconde fonction de quantification est la fonction $q(x) \mapsto -\log(1-x)$. Il se trouve que la mesure de l'interaction induite par cette fonction est aussi invariante par contraction des arêtes, ce que nous allons montrer dans la section suivante. Nous montrerons alors que la mesure de l'interaction induite entre deux graphes est reliée au déterminant des matrices induites.

La Propriété de Contraction

- §9.1.2 Dans cette partie, nous fixons la fonction $m : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ définie par $m(1) = \infty$ et $m(x) = -\log(1-x)$ pour $x \in [0, 1[$. Le choix de cette fonction $-\log(1-x)$ est essentiel afin d'obtenir la proposition §9.1.6, qui est le résultat clé permettant de construire la correspondance entre le cadre des graphes et la géométrie de l'interaction de Girard. En effet, nous verrons dans la dernière section (théorème §9.3.11) que la mesure que nous venons de définir correspond exactement à celle définie par Girard en terme de déterminant.
- §9.1.3 DÉFINITION (GRAPHES SIMPLES).
Un graphe G est dit *simple* lorsqu'il n'existe pas plus d'une arête entre deux sommets donnés, c'est-à-dire lorsque pour tout $v, w \in V^G$, $\text{Card}(E^G(v, w)) \leq 1$.
- §9.1.4 DÉFINITION.
À partir d'un graphe orienté pondéré G , on définit un graphe simple pondéré $\angle(G)$ dont les poids sont dans $\mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$:

$$\begin{aligned} V^{\angle(G)} &= V^G \\ E^{\angle(G)} &= \{(v, w) \mid \exists e \in E^G, s^G(e) = v, t^G(e) = w\} \\ \omega^{\angle(G)} &: (v, w) \mapsto \sum_{e \in E^G(v, w)} \omega^G(e) \end{aligned}$$

Lorsque les poids de $\angle(G)$ sont dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$ (c'est-à-dire que $\omega^{\angle(G)}$ ne prend pas la valeur ∞), on dira que $\angle(G)$ est *total*.

- §9.1.5 On rappelle que la mesure de l'interaction entre deux graphes associée à la fonction de quantification $m(x) = -\log(1-x)$ est définie par :

$$\llbracket F, G \rrbracket = \sum_{\pi \in \mathcal{C}(F, G)} -\log(1 - \omega(\pi))$$

Pour énoncer la prochaine proposition, on étend la définition de $\llbracket F, G \rrbracket$ aux graphes ayant des arêtes de poids supérieur à 1 en posant :

$$\llbracket F, G \rrbracket = \sum_{\pi \in \mathcal{C}(F, G)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega^{F \square G}(\pi))^k}{k}$$

ce qui nous permet de considérer $\llbracket \angle(G), \angle(H) \rrbracket$.

§9.1.6 PROPOSITION.

Soit G, H deux graphes orientés pondérés. On a :

$$\llbracket G, H \rrbracket = \llbracket G, \angle(H) \rrbracket$$

La preuve de cette proposition repose sur le lemme technique suivant et ses corollaires.

§9.1.7 LEMME.

Soit G un graphe orienté pondéré, et e_1, e_2 des arêtes de même sources et buts de poids respectifs x_1, x_2 . Soit G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant e_1, e_2 par une unique arête g de poids $x_1 + x_2$. Soit $\bar{\pi}$ un 1-circuit dans G' contenant g exactement l fois, c'est-à-dire $\bar{\pi} = \overline{\rho_1 g \rho_2 g \dots \rho_l g}$ où pour tout $1 \leq i \leq l$ le chemin ρ_i ne contient pas g . On notera F, E les ensembles :

$$\begin{aligned} F &= \{\mu = \rho_1 e_{i_{1,1}} \dots \rho_l e_{i_{1,l}} \rho_1 e_{i_{2,1}} \dots \rho_l e_{i_{2,l}} \dots \rho_1 e_{i_{m,1}} \dots \rho_l e_{i_{m,l}}\} \\ E &= \{\mu \in F \mid \mu \text{ est un 1-cycle}\} \end{aligned}$$

Alors $\bar{E}$ représentera l'ensemble des 1-circuits dans E , c'est-à-dire que $\bar{E}$ est égal au quotient de l'ensemble E par l'action des permutations cycliques sur les cycles. On a alors l'égalité suivante :

$$-\log(1 - \omega^{G'}(\bar{\pi})) = \sum_{\bar{\mu} \in \bar{E}} -\log(1 - \omega^G(\bar{\mu}))$$

Démonstration. On notera y_i le poids du chemin ρ_i . Alors :

$$\begin{aligned} -\log(1 - \omega^{G'}(\bar{\pi})) &= \sum_{k \geq 1} \frac{((x_1 + x_2)^l y_1 \dots y_l)^k}{k} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^l ((x_1 + x_2) y_j)^k \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^l \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x_1^i x_2^{k-i} y_j^k \right) \right) \end{aligned}$$

On notera F_j^k l'ensemble des chemins $\{\rho_j x_{i_1} \dots \rho_j x_{i_k} \mid 0 \leq i_p \leq n\}$. Puisqu'il y a exactement $\binom{k}{i}$ éléments μ de F_j^k tels que μ contient e_1 exactement i fois, on a $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x_1^i x_2^{k-i} y_j^k = \sum_{\mu \in F_j^k} \omega^G(\mu)$.

De plus, il y a une bijection entre $F^k = \{\mu \in F \mid |\mu| = k\}$ et le produit $F_1^k \times F_2^k \times \dots \times F_l^k$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} -\log(1 - \omega^{G'}(\bar{\pi})) &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^l \left(\sum_{\mu \in F_j^k} \omega^G(\mu) \right) \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(\sum_{\mu \in F^k} \omega^G(\mu) \right) \end{aligned}$$

Maintenant, si μ est un élément de F^k , c'est un d -cycle pour un entier d divisant k (ce que l'on notera $d|k$). Cela signifie qu'il existe un élément $\nu \in E^{k/d}$ tel que $\mu = \nu^d$. Par la Proposition

§5.1.12, sa classe d'équivalence $\bar{v}$ modulo permutations cycliques est de cardinal k/d . Donc, puisque $\bar{E}^{k/d}$ est l'ensemble des classes d'équivalences modulo permutations cycliques des éléments de $E^{k/d}$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\log(1 - \omega^{G'}(\bar{\pi})) &= \sum_{k \geq 1} \sum_{d|k} \sum_{v \in E^{k/d}} \frac{(\omega^G(v))^d}{k} \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{d|k} \sum_{\bar{v} \in \bar{E}^{k/d}} \frac{k}{d} \frac{(\omega^G(\bar{v}))^d}{k} \\ &= \sum_{\bar{v} \in \bar{E}} \sum_{d \geq 1} \frac{(\omega^G(\bar{v}))^d}{d} \end{aligned}$$

☺

Par une simple récurrence, on peut alors généraliser ce résultat à un nombre fini arbitraire d'arêtes $e_1, \dots, e_n$.

§9.1.8 COROLLAIRE.

Soit G un graphe, et $e_1, \dots, e_n$ des arêtes de mêmes sources et buts, de poids respectifs $x_1, \dots, x_n$. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant $e_1, \dots, e_n$ par une unique arête g de poids $\sum_{i=1}^n x_i$. Soit $\bar{\pi}$ un 1-circuit dans G' traversant g exactement l fois, c'est-à-dire $\bar{\pi} = \overline{\rho_1 g \rho_2 g \dots \rho_l g}$ où pour tout $1 \leq i \leq l$ le chemin ρ_i ne contient pas g . On notera F, E les ensembles :

$$\begin{aligned} F &= \{\mu = \rho_1 e_{i_{1,1}} \dots \rho_l e_{i_{1,l}} \rho_1 e_{i_{2,1}} \dots \rho_l e_{i_{2,l}} \dots \rho_1 e_{i_{m,1}} \dots \rho_l e_{i_{m,l}}\} \\ E &= \{\mu \in F \mid \mu \text{ est un 1-cycle}\} \end{aligned}$$

On notera $\bar{E}$ l'ensemble des 1-circuits dans E , i.e. $\bar{E}$ est le quotient de E par l'action des permutations cycliques. Alors on a l'égalité :

$$-\log(1 - \omega^{G'}(\bar{\pi})) = \sum_{\bar{\mu} \in \bar{E}} -\log(1 - \omega^G(\bar{\mu}))$$

Mais ce résultat peut même se généraliser à un ensemble infini d'arêtes.

§9.1.9 COROLLAIRE.

Soit G un graphe, et $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$ des arêtes de mêmes sources et buts. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on notera x_i le poids de e_i dans G . Soit G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant $e_0, \dots, e_n, \dots$ par une unique arête g de poids $\sum_{i \in \mathbf{N}} x_i$. On considèrera un 1-circuit $\bar{\pi}$ dans G' qui traverse g exactement l fois, i.e. $\bar{\pi} = \overline{\rho_1 g \rho_2 g \dots \rho_l g}$ où pour tout $1 \leq i \leq l$ le chemin ρ_i ne contient pas g . On notera F, E les ensembles :

$$\begin{aligned} F &= \{\mu = \rho_1 e_{i_{1,1}} \dots \rho_l e_{i_{1,l}} \rho_1 e_{i_{2,1}} \dots \rho_l e_{i_{2,l}} \dots \rho_1 e_{i_{m,1}} \dots \rho_l e_{i_{m,l}}\} \\ E &= \{\mu \in F \mid \mu \text{ is a 1-cycle}\} \end{aligned}$$

On écrira $\bar{E}$ l'ensemble des 1-circuits dans E , i.e. $\bar{E}$ est le quotient de E par l'action des permutations cycliques. On a alors l'égalité suivante :

$$-\log(1 - \omega^{G'}(\bar{\pi})) = \sum_{\bar{\mu} \in \bar{E}} -\log(1 - \omega^G(\bar{\mu}))$$

Démonstration. On introduit tout d'abord quelques notations. On considèrera les ensembles $F_{\leq i}$ définis, pour tout $i \in \mathbf{N}$, comme l'ensemble des cycles π dans F tels que $e_k \in \pi \Rightarrow k \leq i$. On peut alors définir $F_i = F_{\leq i} - F_{\leq i-1}$ pour $i \leq 1$ et $F_0 = F_{\leq 0}$ par convention. Remarquons que $(F_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une partition de F . Suivant les notations déjà introduites, on notera E^i (resp. $E^{\leq i}$) l'ensemble des 1-cycles dans F_i (resp. $F_{\leq i}$) et par $\bar{E}_i$ (resp. $\bar{E}_{\leq i}$) l'ensemble de 1-circuits correspondant.

Alors, en utilisant la continuité du logarithme et le corollaire précédent, on a :

$$\begin{aligned}
 -\log(1 - \omega^{G'}(\bar{\pi})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\log(1 - (\sum_{i=0}^n x_i)y) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\bar{\mu} \in \bar{E}_{\leq n}} -\log(1 - \omega^G(\bar{\mu})) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \sum_{\bar{\mu} \in \bar{E}_i} -\log(1 - \omega^G(\bar{\mu})) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\bar{\mu} \in \bar{E}_i} -\log(1 - \omega^G(\bar{\mu})) \\
 &= \sum_{\bar{\mu} \in \bar{E}} -\log(1 - \omega^G(\bar{\mu}))
 \end{aligned}$$

☺

Preuve de la Proposition §9.1.6.

En utilisant le lemme précédent (§9.1.7) et ses corollaires (§9.1.8, §9.1.9), on déduit que le fait de contracter toutes les arêtes de même source et même but ne change pas la mesure de l'interaction.

On obtient alors le résultat général énoncé dans la Proposition §9.1.6 en itérant ce résultat sur l'ensemble des ensembles d'arêtes $E^H(v, w)$ ($v, w \in V^H$) dans le graphe H . ☺

§9.1.10 PROPOSITION (PROPRIÉTÉ CYCLIQUE).

Soit F, G, H des graphes d'opérateurs tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \emptyset$. Supposons que $\angle(G :: H)$ et $\angle(H :: F)$ sont totaux. On a alors :

$$[F, \angle(G :: H)] + [G, H] = [G, \angle(H :: F)] + [H, F]$$

Démonstration. C'est un corollaire immédiat de la Proposition §9.1.6 et de la propriété cyclique sur les graphes. ☺

§9.1.11 COROLLAIRE (ADJONCTION).

Soit F, G, H des graphes d'opérateurs tels que $V^G \cap V^H = \emptyset$. Supposons que $\angle(F :: G)$ est total. On a alors :

$$[F, G \cup H] = [F, G] + [\angle(F :: G), H]$$

Contraction et Vérité

§9.1.12 On montre dans cette section comment la notion de vérité définie sur les graphes peut être ramenée à la condition : la matrice $\mathcal{M}_{\angle(A)}$ est une symétrie partielle. Cela nous permettra dans le chapitre suivant de montrer les liens entre notre notion de gain et celle de la géométrie de l'interaction.

§9.1.13 On notera A^k le graphe des chemins de longueur k dans le graphe A .

De plus, on définit ce qui correspond intuitivement à la généralisation aux graphes de la trace des matrices :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{v \in V^A} \sum_{e \in E^A(v, v)} \omega^A(e)$$

On dira de plus qu'un graphe G est *symétrique* lorsque pour tous sommets v, w il existe une bijection préservant la pondération entre $E^G(v, w)$ et $E^G(w, v)$.

§9.1.14 DÉFINITION (PROJETS GAGNANTS).

Un projet $a = (a, A)$ est *gagnant* lorsque $a = 0$, et que la matrice des poids du graphe $\angle(A)$ est une symétrie partielle, c'est-à-dire lorsque $\angle(A)$ est symétrique et total, et tel que $(\angle(A))^3 = \angle(A)$. Le projet a est dit *fortement gagnant* lorsque de plus $\text{Tr}(A) = 0$.

§9.1.15 PROPOSITION.

Si $\alpha = (0, A)$ est gagnant, le graphe $\angle(A)$ est une union disjointe de transpositions et de points fixes. Si α est fortement gagnant, $\angle(A)$ ne contient pas de points fixes.

Démonstration. Le fait que $\angle(A)$ soit symétrique et satisfasse $(\angle(A))^3 = \angle(A)$ implique qu'un sommet donné ne peut être la source de plus d'une arête, ni être le but de plus d'une arête. En effet, soit $e = (v, w)$ et $f = (w, z)$ deux sommets dans $\angle(A)$. Alors il existe des arêtes e^{-1} et f^{-1} respectivement de w sur v et de z sur w . Il y a alors dans $\angle(A)^3$ plus d'une arête entre v et w , par exemple $ee^{-1}e$ et $ef^{-1}f$. On en déduit que $(\angle(A))^3$ ne peut être égal à $\angle(A)$.

De plus, $(\angle(A))^3 = \angle(A)$ implique que tous les poids sont égaux à 1 (puisque tous les poids λ satisfont $\lambda^3 = \lambda$), ce qui signifie que $\angle(A)$ est le graphe d'une union disjointe de transpositions et de points fixes. Cependant, $\angle(A)$ ne peut contenir de points fixes, puisque $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(\angle(A)) = 0$. Finalement $\angle(A)$ est une union disjointe de transpositions.

On remarque de plus que si α est fortement gagnant, on a $\sum_{v \in V^A} \sum_{e \in E^A(v, v)} \omega^A(e) = 0$. Comme il s'agit d'une somme d'éléments strictement positifs, on en déduit qu'elle ne contient aucuns termes, c'est-à-dire que pour tout $v \in V^A$, l'ensemble $E^A(v, v)$ est vide. En d'autres termes, si α est fortement gagnant, alors $\angle(A)$ ne contient pas de points fixes. ☺

§9.1.16 Le résultat précédent permet donc de faire le lien entre la notion de projet gagnant présentée dans les Chapitres 6, 7 et 8 et la notion de projet fortement gagnant que nous venons de définir. Par la Proposition §9.1.6, lorsque l'on a fixé $m(x) = -\log(1-x)$ (c'est également vrai dans le cas $m(x) = \infty$) tout projet $\alpha = (a, A)$ est universellement équivalent au projet $\angle(\alpha) = (a, \angle(A))$. Ainsi, tout projet fortement gagnant au sens de la Définition §9.1.14 est universellement équivalent à un projet gagnant au sens des Chapitres 6, 7 et 8. Ce résultat permet de montrer que si α est un projet gagnant, le projet hyperfini $\Phi(\alpha)$ (défini au paragraphe §9.3.10) est *prometteur* au sens de la Définition §10.2.17 par rapport à l'angle défini comme $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{A}$ où $\mathfrak{D}$ est l'algèbre diagonale correspondant à la base fixée au paragraphe §9.3.1 et $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{R}$.

§9.1.17 DÉFINITION (VÉRITÉ).

Un conduite est (fortement) *vraie* si elle contient un projet (fortement) gagnant.

§9.1.18 THÉORÈME (CONSISTANCE).

Les conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ ne peuvent être simultanément vraies. A fortiori, elles ne peuvent donc non plus être simultanément fortement vraies.

Démonstration. Soit $\alpha = (0, A)$ et $\beta = (0, B)$ deux projets gagnants respectivement dans $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$. Tous les poids de $\angle(A)$ et $\angle(B)$ étant égaux à 1 d'après la proposition §9.1.15, si le graphe $\angle(A) \square \angle(B)$ ne contient pas de 1-circuits, on a $\llbracket \angle(A), \angle(B) \rrbracket = \llbracket A, B \rrbracket = \ll \alpha, \beta \gg = 0$, et s'il contient au moins un 1-circuit on a $\llbracket \angle(A), \angle(B) \rrbracket = \llbracket A, B \rrbracket = \ll \alpha, \beta \gg = \infty$. Puisque ces deux cas contredisent le fait que $\alpha \perp \beta$, la preuve est terminée. ☺

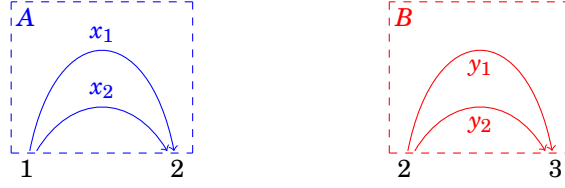
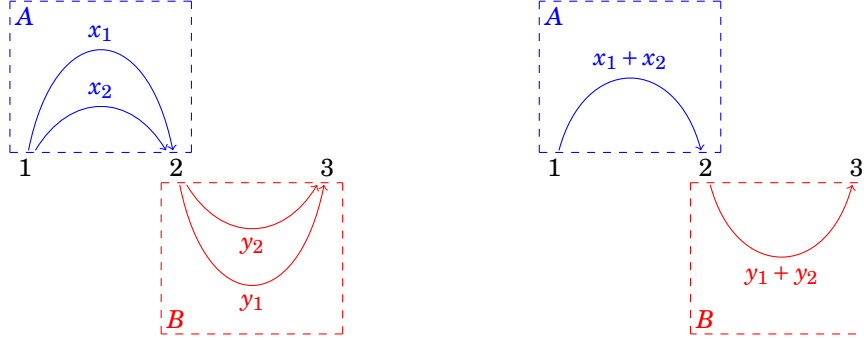
Pour montrer la compositionnalité, on utilise le lemme suivant.

§9.1.19 LEMME.

Soit A et B deux graphes. Alors

$$\angle(\angle(A) :: \angle(B)) = \angle(A :: B)$$

§9.1.20 Avant de faire la preuve, on montre sur un exemple simple comment l'argument se déroule. Prenons les deux graphes A et B de la figure 9.1. Les graphes $A \square B$ et $\angle(A) \square \angle(B)$ sont représentés sur la figure 9.2. Les graphes $\angle(A :: B)$ et $\angle(\angle(A) :: \angle(B))$ sont tous deux composés d'une arête de a sur c , et leurs poids sont respectivement égaux à $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ et à $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$, et donc égaux. En réalité, la preuve repose uniquement sur la distributivité de la multiplication sur l'addition.

FIGURE 9.1 – Les graphes A (à gauche) et B (à droite)FIGURE 9.2 – Les graphes $A \square B$ (à gauche) et $\ltimes(A) \square \ltimes(B)$ (à droite)

Démonstration. Une arête f_0 dans $\ltimes(\ltimes(A) :: \ltimes(B))$ est un chemin alternant $\pi = \epsilon_1 \dots \epsilon_k$, où les ϵ_i sont soit dans $\ltimes(A)$ soit dans $\ltimes(B)$ selon la parité de i . En écrivant s^i et t^i la source et but de ϵ_i (for $i = 1, \dots, k$), on peut supposer, sans perte de généralité, que π a sa source et son but dans $\ltimes(A)$: alors pour tout $0 \leq j \leq (k-1)/2$, l'arête ϵ_{2j+1} est une arête de $\ltimes(A)$ de poids

$$\omega(\epsilon_{2j+1}) = \sum_{e \in E^A(s^{2j+1}, t^{2j+1})} \omega(e)$$

Similairement, pour tout $1 \leq j \leq (k-1)/2$, l'arête ϵ_{2j} est dans $\ltimes(B)$ et de poids

$$\omega(\epsilon_{2j}) = \sum_{e \in E^B(s^{2j}, t^{2j})} \omega(e)$$

Alors, le poids de π , qui est le poids de f_0 , est donné par :

$$\omega(\pi) = \prod_{1 \leq i \leq k} \omega(\epsilon_i)$$

La distribution du produit sur la somme donne :

$$\begin{aligned} \omega(\pi) &= \sum_{e_1 \in E^A(s^1, t^1)} \sum_{e_2 \in E^B(s^2, t^2)} \dots \sum_{e_k \in E^A(s^k, t^k)} \omega(e_1) \omega(e_2) \dots \omega(e_k) \\ &= \sum_{\rho \in \text{Chem}(s^1, t^k)_{A,B}} \omega(\rho) \\ &= \sum_{e \in E^{A :: B}(s^1, t^k)} \omega(e) \end{aligned}$$

Le dernier terme de droite est par définition le poids de l'arête f_1 de $\ltimes(A :: B)$ dont la source est s^1 et le but t^k . De plus, il est clair qu'étant donnés deux sommets v, w , il existe une arête entre v et w dans $\ltimes(\ltimes(A) :: \ltimes(B))$ si et seulement si il existe une arête entre v et w dans $\ltimes(A :: B)$. Puisque nous venons de montrer que les poids de ces deux arêtes sont égaux, les deux graphes sont égaux. $\odot$

§9.1.21 THÉORÈME (COMPOSITIONNALITÉ).

Si f et a sont des projets gagnants respectivement dans $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$, alors l'application $f :: a$ est également un projet gagnant. De plus, si f, a sont fortement gagnants, alors $f :: a$ est fortement gagnant.

Démonstration. Soit $f = (0, F)$ et $a = (0, A)$ les deux projets gagnants ; on écrira $\angle(f) = (0, \angle(F))$ et $\angle(a) = (0, \angle(A))$. On montre que $b = (b, B)$, le résultat de la réduction $\angle(f) :: \angle(a)$, est effectivement gagnant. Étant la réduction de deux graphes symétriques, B est symétrique. Le fait que $\angle(A)$ soit symétrique et satisfasse $\angle(A)^3 = \angle(A)$ implique qu'un sommet donné ne peut être la source ou le but de plus d'une arête (voir la preuve de la Proposition §9.1.15). Puisque ceci est également vrai de $\angle(F)$, il est clair que chaque sommet dans B est la source (resp. le but) d'au plus une arête, et cela implique, combiné au fait que B soit symétrique, que $\angle(B)^3 = B = \angle(B)$.

L'unique question restante est celle de la mise. Puisque tous les poids apparaissant dans F et A sont égaux à 1, on a $b = \langle\langle a, f \rangle\rangle = 0$ ou bien $b = \langle\langle a, f \rangle\rangle = \infty$. Mais puisque la mise d'un projet ne peut être égale à ∞ , on a $b = 0$, de quoi on déduit que b est gagnant. Cela implique, par le lemme §9.1.19, que $f :: a$ est gagnant.

Supposons maintenant que f, a soient fortement gagnants, et que $f :: a$ ne le soit pas. Cela signifie que $\angle(F :: A)$ contient au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un sommet $v \in V^{\angle(F :: A)}$ et une arête $e \in E^{\angle(F :: A)}(v, v)$. Or une telle arête est un chemin $\{e_i\}_{i=0}^n$. Étant donné que la source de e_0 est égale au but de e_n , on a nécessairement¹ $e_n = e_0^*$. On peut alors montrer par une simple induction que le chemin $\{e_i\}$ vérifie $e_{n-i} = e_i^*$. Étant donné que ce chemin est alterné, ceci n'est possible que si la longueur de ce chemin est impaire ($n = 2k$) et que $e_k = e_k^*$, c'est-à-dire si e_k est un point fixe. Or e_k est une arête de $\angle(A)$ ou de $\angle(F)$ et ne peut donc être un point fixe. ☺

Circuits et Déterminant

§9.1.22 Dans cette section on montre certains résultats sur les matrices faisant apparaître les connexions entre les opérations que nous avons définies sur les graphes et certaines notions d'algèbre linéaire. Ces résultats nous conduiront à la preuve que notre cadre, lorsque restreint à une certaine classe de graphes, se plonge dans la géométrie de l'interaction de Girard [Gir11a]. Dans cette section, nous utiliserons des notions d'algèbres d'opérateurs qui ne sont pas nécessairement familières au lecteur. Les résultats et définitions que nous utiliserons peuvent être trouvées dans le chapitre 3.

Étant donné que les objets de la géométrie de l'interaction de Girard [Gir11a] sont des opérateurs hermitiens de norme ≤ 1 , nous allons restreindre nos objets à la classe des graphes correspondant aux matrices hermitiennes de norme ≤ 1 . On montre ensuite que les diverses définitions que nous avons introduites sur les graphes peuvent être traduites en termes d'opérations algébriques. En particulier, nous montrerons que l'adjonction est toujours valide, ce qui implique que cette restriction définit une géométrie de l'interaction en suivant les mêmes constructions que celles des graphes d'interaction. De plus, les définitions algébriques correspondant aux définitions que nous avons données sur les graphes se révéleront (dans la section suivante) être exactement les définitions de la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini.

§9.1.23 Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert de dimension infinie (dénombrable). On fixe une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{H}$. Étant donné un ensemble fini $S \subset \mathbb{N}$, il existe une projection sur le sous-espace engendré par $\{e_i \mid i \in S\}$ que nous noterons p_S . La restriction $p_S \mathcal{B}(\mathbb{H}) p_S$ est alors isomorphe à l'algèbre de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où n est le cardinal de S . Tous les graphes que nous considérerons dans cette section seront définis sur un ensemble sommets qui est une partie finie de $\mathbb{N}$.

§9.1.24 DÉFINITION (MATRICE DES POIDS LOCALISÉE).

Si G est un graphe simple pondéré, la matrice des poids $\mathcal{M}_G$ de G définit un opérateur dans

1. On rappelle que dans un graphe F qui est une union disjointe de transpositions, on note, pour toute arête $e \in E^F(v, w)$, par e^* l'unique arête dans $E^F(w, v)$.

$p_{VG} \mathcal{B}(\mathbb{H}) p_{VG}$ (et par conséquent dans $\mathcal{B}(\mathbb{H})$) dont la matrice est $\mathcal{M}_G$ dans la base $\{e_i\}_{i \in VG}$. Nous ferons un abus de notations et écrirons $\mathcal{M}_G$ cet opérateur, la *matrice des poids localisée de G* .

§9.1.25 DÉFINITION (GRAPHE D'OPÉRATEUR).

On appellera *graphe d'opérateur* un graphe orienté pondéré symétrique simple G tel que $\|\mathcal{M}_G\| \leq 1$.

§9.1.26 On rappelle que si G, H sont des graphes sur le même ensemble d'arêtes, le produit $\mathcal{M}_G \mathcal{M}_H$ est la matrice des poids du graphe des chemins de longueur 2 dont la première arête est dans G et la seconde est dans H . C'est l'ingrédient principal nécessaire à l'obtention des résultats suivants.

§9.1.27 PROPOSITION.

Soit G, H des graphes d'opérateurs, et $\mathcal{M}_F, \mathcal{M}_G$ leur matrices des poids localisées respectives. Le produit de $\mathcal{M}_F$ et $\mathcal{M}_G$ en tant qu'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ est un opérateur dans la sous-algèbre $(p_{VF \cup VG}) \mathcal{B}(\mathbb{H}) (p_{VF \cup VG})$ et :

$$[F, G] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Tr}((\mathcal{M}_F \mathcal{M}_G)^k)}{k}$$

Démonstration. Posons $T_n = \text{tr}((\mathcal{M}_F \mathcal{M}_G)^n)/n$. On rappelle que le coefficient diagonal δ_i de $(\mathcal{M}_F)^n$ est égal à la somme des poids des cycles de longueur n dans F qui commencent et terminent en i , et que chaque chemin est compté exactement une fois. Cela signifie que dans $\text{tr}((\mathcal{M}_F \mathcal{M}_G)^n)$ chaque circuit alternant $\bar{\rho}$ est compté exactement $\#\bar{\rho}$ fois, où $\#\bar{\rho}$ est le cardinal de l'ensemble $\bar{\rho}$ défini dans la proposition §5.1.12. Donc T_n est égal à la somme, pour tout circuit alternant $\bar{\rho}$ de longueur n dans $F \square G$, de $\#\bar{\rho} \cdot \omega^{F \square G}(\bar{\rho})/n$. On obtient alors que T_n est égal à la somme, pour tout d -circuit π de longueur n , des termes $\omega^{F \square G}(\pi)^d/d$ (on rappelle que $\bar{\rho}$ est de cardinal n/d).

Choisissons maintenant un 1-circuit $\bar{\pi}$ de longueur k . Nous venons de voir que chaque terme $\Omega_d^\pi = \omega^{F \square H}(\pi)^d/d$ apparaît dans $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ et apparaît exactement une fois (dans le terme T_{dk}). En sommant ces termes, on obtient $-\log(1 - \omega(\bar{\pi}))$. Finalement, en prenant la somme sur l'ensemble des 1-circuits $\bar{\pi} \in \mathcal{C}(F, G)$, on obtient l'égalité voulue. ☺

§9.1.28 LEMME.

Soit a une matrice carrée telle que $\|a\| \leq 1$. Alors, en prenant $-\log(0) = \infty$,

$$-\log(\det(1 - a)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Tr}(a^k)}{k}$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que $-\log(\det(1 - a)) = \text{Tr}(-\log(1 - a))$, puisque² $\det(1 - a) = \exp(\text{Tr}(\log(1 - a)))$.

On suppose dans un premier temps que 1 n'est pas une valeur propre de a et on écrit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ces valeurs propres. La branche principale du cologarithme de $1 - a$ est définie par la série $\sum_{k \geq 1} a^k/k$, convergeant pour tout nombre complexe de module 1 différent de 1. La matrice étant inversible, le logarithme de $1 - a$ existe et ses valeurs propres sont égales à $\sum_{k \geq 1} \lambda_i^k/k = \log(1 - \lambda_i)$. On a alors :

$$\text{Tr}(-\log(1 - a)) = \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_i^k}{k} = \sum_{k \geq 1} \frac{\text{Tr}(a^k)}{k}$$

Supposons maintenant que $\lambda_1 = 1$. On réécrit la somme $\sum_{k \geq 1} \text{Tr}(a^k)/k$ comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2k} \left(\frac{1}{2k} + \frac{\lambda_i}{2k+1} \right)$$

2. Cette formule est une conséquence de l'égalité $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A))$ pour toute matrice carrée A , une formule que l'on montre aisément en écrivant A en forme triangulaire.

Ceci est égal à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i^{2k} \left(\frac{1}{2k} + \frac{\lambda_i}{2k+1} \right) \right]$$

qui est minorée par

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$$

Comme cette dernière série est divergente, on en déduit que $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Tr}(a^k)/k = \infty$. Mais, puisque 1 est une valeur propre de a , le noyau de $1 - a$ est non trivial, et donc $\det(1 - a) = 0$, ce qui signifie que $-\log(\det(1 - a)) = \infty = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Tr}(a^k)/k$. ☺

§9.1.29 COROLLAIRE.

Soit F, G des graphes d'opérateurs. Le produit de $\mathcal{M}_F$ et $\mathcal{M}_G$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ donne un opérateur dans $p_{V^F \cup V^G} \mathcal{B}(\mathbb{H}) p_{V^F \cup V^G}$ et³ :

$$\llbracket F, G \rrbracket = -\log(\det(1 - \mathcal{M}_F \mathcal{M}_G))$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition §9.1.27 et du lemme précédent. ☺

§9.1.30 PROPOSITION.

Soit F et G des graphes d'opérateurs. Si $\llbracket F, G \rrbracket \neq \infty$, alors $\angle(F :: G)$ est total.

Démonstration. Par définition, $\angle(F :: G)$ est total si et seulement si pour tout couple v, v' de sommets dans la différence symétrique $S = V^F \Delta V^G$ la somme suivante converge :

$$\sum_{\pi \in \text{Chem}(v, v')^{F, G}} \omega^{F \square G}(\pi)$$

Fixons v, v' deux sommets et notons E l'ensemble des chemins alternants allant de v à v' dans $F \square G$ qui ne contiennent pas de cycles. Alors, puisque S est fini nous savons que E est fini, et il existe un chemin γ de poids maximal. Alors, on peut écrire :

$$\sum_{\pi = (v, v') \in \text{Chem}()^{F, G}} \omega^{F \square G}(\pi) \leq \#(E) \omega^{F \square G}(\gamma) \left(\sum_{\pi \in \mathcal{C}(F, G)} \omega^{F \square G}(\pi) \right)$$

Le membre de droite étant égal à $\#(E) \omega^{F \square G}(\gamma) \llbracket F, G \rrbracket$, on en déduit que la somme converge. ☺

§9.1.31 PROPOSITION.

Soit F et G des graphes d'opérateurs, avec $\llbracket F, G \rrbracket \neq \infty$. Alors $\mathcal{M}_H = \mathcal{M}_{\angle(F :: G)}$ est la solution de l'équation de rétroaction⁴ entre $\mathcal{M}_F$ et $\mathcal{M}_G$, et est par conséquent un graphe d'opérateur.

Démonstration. En utilisant un argument similaire à celui de la preuve précédente, on démontre que pour tout couple de sommets $v, v' \in V^F \cup V^G$, la somme

$$\sum_{\pi \in \text{Chem}(v, v')^{F, G}} \omega^{F \square G}(\pi)$$

converge. Supposons que $v, v' \in V^F \cap V^G$, et puisque $\omega^{F \square G}$ est toujours positif, il suit que la somme $\omega^{F \square G}(\pi)$ sur tous les chemins π commençant par une arête dans G et terminant par une arête dans F est convergente. Ce qui signifie que $\langle \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}_F \mathcal{M}_G)^k e_v, e_{v'} \rangle$ converge pour tout couple $v, v' \in V^F \cap V^G$. Donc $1 - \mathcal{M}_G \mathcal{M}_F$ est inversible, et la solution de l'équation de rétroaction est un hermitien de norme au plus 1 défini par :

$$S = (p_{V_{\Delta}^F} F + p_{V_{\Delta}^G})(1 - \mathcal{M}_G \mathcal{M}_F)^{-1} (\mathcal{M}_G p_{V_{\Delta}^G} + p_{V_{\Delta}^F})$$

3. Le déterminant est bien défini : puisque V^F et V^G sont finis, $\mathcal{M}_F \mathcal{M}_G$ peut s'écrire comme une matrice finie.

4. Voir Chapitre 4.

C'est un calcul simple qui permet de montrer que $S = \mathcal{M}_H$. Nous écrirons $V_\Delta^F = V^F - V^G$ et $V_\Delta^G = V^G - V^F$. La valeur $\omega^H((v, v')) = \langle \mathcal{M}_H e_v, e_{v'} \rangle = H_v^{v'}$ est donnée par :

$$H_v^{v'} = \begin{cases} \langle \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}_F \mathcal{M}_G)^k \mathcal{M}_F e_v, e_{v'} \rangle & \text{for } v, v' \in V_\Delta^F \\ \langle \mathcal{M}_G \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}_F \mathcal{M}_G)^k \mathcal{M}_F e_v, e_{v'} \rangle & \text{for } v \in V_\Delta^F, v' \in V_\Delta^G \\ \langle \mathcal{M}_F \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}_G \mathcal{M}_F)^k \mathcal{M}_G e_v, e_{v'} \rangle & \text{for } v \in V_\Delta^G, v' \in V_\Delta^F \\ \langle \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}_G \mathcal{M}_F)^k \mathcal{M}_G e_v, e_{v'} \rangle & \text{for } v, v' \in V_\Delta^G \end{cases}$$

Finalement, $\mathcal{M}_H$ est égal à S . ☺

9.2 Graphes d'interaction et premières GdI

- §9.2.1 Dans cette partie, on va montrer que la fonction $x \mapsto \infty$ définit une version légèrement raffinée du fragment multiplicatif des anciennes versions de la GoI [Gir89a, Gir88b, Gir95a]. On montrera dans la section suivante que la seconde fonction, $x \mapsto -\log(1-x)$, définit une version combinatoire de la Géométrie de l'Interaction dans le Facteur Hyperfini (GdI5).
- §9.2.2 On notera $\mathbb{H}$ l'espace (unique à isomorphisme près) de Hilbert séparable de dimension infinie (par exemple, l'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suites de carré sommable), et on notera $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base de $\mathbb{H}$. Pour chaque sous-ensemble fini $S \subset \mathbb{N}$ il existe une projection sur le sous-espace engendré par $\{e_s \mid s \in S\}$ que nous dénoterons p_S .

Circuits et Nilpotence

- §9.2.3 DÉFINITION (MATRICE D'ADJACENCE).
Soit F un graphe orienté de sommets $s_0, s_1, \dots, s_n$. On définit la matrice d'adjacence de F comme la matrice $(a_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ avec $a_{i,j} = 1$ s'il existe une arête e telle que $s^F(e) = a_i$ et $t^F(e) = a_j$, et $a_{i,j} = 0$ sinon.
- §9.2.4 DÉFINITION.
Soit G un graphe. On définit $\mathcal{M}_G^{\text{conn}}$ — la *matrice d'adjacence localisée* de G — comme l'opérateur de $p_{V^G} \mathcal{B}(\mathbb{H}) p_{V^G} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H})$ dont la matrice dans la base $\{e_i \mid i \in V^G\}$ est la matrice d'adjacence de G .
- §9.2.5 PROPOSITION.
Soit a, b des projets multiplicatifs de support V , et $m(x) = \infty$ pour $x \in]0, 1]$. Alors :

$$a \perp b \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{M}_A^{\text{conn}} \mathcal{M}_B^{\text{conn}} \text{ est nilpotent} \\ \mathbf{1}_A b + \mathbf{1}_B a \neq 0, \infty \end{cases}$$

Démonstration. On a l'implication de gauche à droite : $a \perp b$ implique que $a \mathbf{1}_B + b \mathbf{1}_A + \llbracket A, B \rrbracket \neq 0, \infty$. Or, s'il existait un cycle dans $A \square B$, le terme de droite $\llbracket A, B \rrbracket$ serait égal à ∞ . Donc $\llbracket A, B \rrbracket$ serait infini, et les projets ne seraient pas orthogonaux. Donc $\mathcal{M}_A^{\text{conn}} \mathcal{M}_B^{\text{conn}}$ est nilpotent et $\llbracket A, B \rrbracket = 0$, ce qui signifie que $\mathbf{1}_B a + b \mathbf{1}_A \neq 0, \infty$.

L'implication réciproque est immédiate. ☺

- §9.2.6 REMARQUE. Cette proposition est correcte car nous travaillons avec des graphes finis (ensemble fini de sommets). Ce que nous prouvons en réalité est que $a \perp b$ si et seulement si $\mathbf{1}_A b + \mathbf{1}_B a \neq 0, \infty$ et, pour tous i, j , il n'apparaît pas de cycles dans $A_i \square B_j$. Dans le cas de graphes infinis, cette condition impliquerait la nilpotence faible de l'opérateur $\mathcal{M}_A^{\text{conn}} \mathcal{M}_B^{\text{conn}}$, mais pas nécessairement sa nilpotence. On obtient donc une orthogonalité proche de celle de GoI2 [Gir88b] dans le cas infini, et proche des GdI1 et GdI2 dans le cas fini, où nilpotence et nilpotence faibles sont indistinguables.

§9.2.7 COROLLAIRE.

Soit $\alpha = (a, A)$ un projet, et $\alpha' = (a, A')$ tel que $\mathcal{M}_{A'}^{\text{conn}} = \mathcal{M}_A^{\text{conn}}$. Alors $\alpha \cong_{\mathbf{A}} \alpha'$ pour toute conduite $\mathbf{A}$ contenant α .

Le modèle que l'on obtient lorsque l'on choisit le paramètre $m(x) = \infty$ peut donc être réduit, à équivalence observationnelle près, au cas des graphes simples (au plus une arête entre deux sommets) orientés non pondérés.

Il y a tout de même une différence entre les premières version de la GdI et le modèle que l'on obtient avec ce paramètre. L'ajout de la mise est une amélioration importante : sans elle, nous aurions $\mathbf{1} = \perp$.

Projets additifs

§9.2.8 DÉFINITION.

La *matrice d'adjacence localisée* d'un graphe tranché $G = \{G_i\}_{i \in I^G}$ sera définie comme la somme directe $\mathcal{M}_G^{\text{conn}} = \bigoplus_{i \in I^G} \mathcal{M}_{G_i}^{\text{conn}}$.

Si G, H sont deux graphes tranchés, on définit :

$$\mathcal{M}_G^{\text{conn}} \star \mathcal{M}_H^{\text{conn}} = \bigoplus_{(i,j) \in I^G \times I^H} \mathcal{M}_{G_i}^{\text{conn}} \mathcal{M}_{H_j}^{\text{conn}}$$

§9.2.9 PROPOSITION.

Soit α, b des projets additifs de support V , et $m(x) = \infty$ pour $x \in]0, 1]$. Alors :

$$\alpha \perp b \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{M}_A^{\text{conn}} \star \mathcal{M}_B^{\text{conn}} \text{ est nilpotent} \\ \mathbf{1}_A b + \mathbf{1}_B a \neq 0, \infty \end{cases}$$

En particulier, si A, B n'ont qu'une tranche, le produit $\mathcal{M}_A^{\text{conn}} \mathcal{M}_B^{\text{conn}}$ est nilpotent.

De plus, la construction additive (l'utilisation de graphes tranchés) nous permet de définir, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 7, un modèle catégorique de MALL. En regardant d'un peu plus près ce modèle, on peut malgré tout remarquer que celui-ci n'est pas très excitant.

§9.2.10 PROPOSITION.

Soit $m(x) = \infty$ et $\mathbf{A}$ un comportement. Alors $\mathbf{A}$ est égal soit à $\mathbf{0}_{V^A}$ soit à $\mathbf{T}_{V^A}$.

Démonstration. Rappelons qu'un comportement propre et son orthogonal ne contiennent que des projets $\alpha = (a, A)$ avec $a = 0$. Or deux tels projets ne peuvent être orthogonaux lorsque $m(x) = \infty$. Il n'y a donc pas de comportements propres dans ce modèle, et, par la Proposition §7.1.30 nous en concluons que $\mathbf{A} = \mathbf{0}_{V^A}$ ou bien que $\mathbf{A}^\perp = \mathbf{0}_{V^A}$. ☺

9.3 Graphes d'interaction et GdI hyperfinie

§9.3.1 On notera à nouveau $\mathbb{H}$ l'espace (unique à isomorphisme près) de Hilbert séparable de dimension infinie (par exemple, l'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suites à carré sommable), et $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base de $\mathbb{H}$. Pour chaque sous-ensemble fini $S \subset \mathbb{N}$ il existe une projection sur le sous-espace engendré par $\{e_s \mid s \in S\}$ que nous dénoterons p_S .

§9.3.2 On va construire le plongement de nos graphes dans le facteur hyperfini petit à petit afin de montrer la correspondance entre les graphes d'interaction et la géométrie de l'interaction hyperfinie. Pour ce faire, nous commencerons par plonger les graphes sans tranches et non épais. Puis nous étendrons les résultats aux graphes tranchés, et enfin aux graphes épais.

Déterminant de Fuglede-Kadison

§9.3.3 On rappelle la définition du déterminant de Fuglede-Kadison (voir la Section 4.2 du Chapitre 4 pour plus de détails)

§9.3.4 DÉFINITION (DÉTERMINANT DE FUGLEDE-KADISON).

Soit $\mathcal{A}$ un facteur fini, et T sa trace normalisée. On définit, sur le groupe des opérateurs inversibles, le déterminant de Fuglede-Kadison :

$$\Delta(A) = \exp(T(\log((A^* A)^{\frac{1}{2}})))$$

Alors Δ peut être étendu à $\mathcal{A}$.

§9.3.5 REMARQUE. Le déterminant de Fuglede-Kadison ne prend que des valeurs positives.

On utilisera également le lemme suivant, dont la preuve se trouve dans l'article original de Fuglede et Kadison [FK52].

§9.3.6 LEMME.

Soit $\det^{FK}$ une extension du déterminant de Fuglede-Kadison sur $\mathcal{A}$. Si u est un opérateur avec un noyau non trivial, $\det^{FK}(u) = 0$.

§9.3.7 Tout comme Girard [Gir11a], on considérera une trace tr sur $\mathcal{R}_{0,1}$ choisie une fois pour toute. Pour cette raison, si p est une projection finie la trace induite sur $p\mathcal{R}_{0,1}p$ n'est pas normalisée puisque $\text{tr}(1_{p\mathcal{R}_{0,1}p}) = \text{tr}(p)$. Nous noterons donc (abusivement) $\det^{FK}$ une extension du déterminant de Fuglede-Kadison Δ sur $p\mathcal{R}_{0,1}p$ pris à la puissance $\text{tr}(p)$, un choix expliqué par la remarque suivante.

§9.3.8 REMARQUE. Soit tr la trace que nous avons fixée, $\lambda = \text{tr}(p)$, et soit $T = \text{tr}/\lambda$ la trace normalisée sur $p\mathcal{R}_{0,1}p$. Alors pour tout opérateur inversible $A \in p\mathcal{R}_{0,1}p$,

$$\Delta(A)^\lambda = \exp(\lambda T(\log((A^* A)^{\frac{1}{2}}))) = \exp(\text{tr}(\log((A^* A)^{\frac{1}{2}})))$$

Donc le déterminant de Fuglede-Kadison pris à la puissance λ correspond au « déterminant » défini comme au paragraphe §9.3.4 mais avec une trace non normalisée $\text{tr}(1) = \lambda$ en lieu de la trace normalisée T .

§9.3.9 PROPOSITION.

Soit ξ un $*$ -morphisme préservant la trace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{R}_{0,1}$, et u une matrice telle que $\|u\| \leq 1$. Alors :

$$\det^{FK}(\xi(1-u)) = |\det(1-u)|$$

Démonstration. On note B la boule unité de $\mathbf{C}$. On suppose dans un premier temps que $\text{Spec}_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}(u) \subset B - \{1\}$. Alors $\xi(u)$ satisfait $\text{Spec}_{\mathcal{R}_{0,1}}(\xi(u)) \subset B - \{1\}$. De plus, puisque ξ est un $*$ -homomorphisme, il commute avec le calcul fonctionnel continu, ce qui signifie qu'il commute avec le logarithme et la racine carrée. Finalement,

$$\begin{aligned} \det^{FK}(1-\xi(u)) &= \exp(\text{tr}(\log(|1-\xi(u)|))) \\ &= \exp(\text{tr}(\log(|\xi(1-u)|))) \\ &= \exp(\text{tr}(\log(\xi(|1-u|)))) \\ &= \exp(\text{tr}(\xi(\log(|1-u|)))) \\ &= \exp(\text{tr}(\log(|1-u|))) \\ &= \det(|1-u|) \\ &= \det(((1-u)^*(1-u))^{1/2}) \\ &= (\det((1-u)^*(1-u)))^{1/2} \\ &= |\det(1-u)| \end{aligned}$$

Maintenant, si $1 \in \text{Spec}_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}(u)$, alors $1 \in \text{Spec}_{\mathcal{R}_{0,1}}(\xi(u))$ et les opérateurs u et $\xi(u)$ ont tous deux un noyau non trivial, et satisfont donc $\det^{FK}(1-\xi(u)) = 0 = |\det(1-u)|$ (utilisant le lemme §9.3.6 pour l'égalité de droite). $\odot$

Matrices des poids

§9.3.10 On écrit maintenant le facteur hyperfini $\mathfrak{H}_{0,1}$ de type II_∞ comme $\mathcal{B}(\mathbb{H}) \otimes \mathfrak{H}$, où $\mathfrak{H}$ est le facteur hyperfini de type II_1 , et on considèrera la trace tr définie comme le produit tensoriel des traces normalisées de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ (la trace des projections finies est égale à 1) et de $\mathfrak{H}$ (la trace de l'identité est égale à 1). On notera Φ le $*$ -morphisme $\mathcal{B}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{R}$ défini par $a \mapsto a \otimes 1_{\mathcal{R}}$. On associe alors à chaque projet d'opérateur $\mathfrak{a} = (a, A)$ un projet $\Phi(\mathfrak{a}) = a \cdot + \cdot 1 + \mathcal{M}_A \otimes 1_{\mathcal{R}}$ de support $p_{V^A} \otimes 1_{\mathcal{R}}$, où $\mathcal{M}_A$ est la matrice des poids localisée de A .

§9.3.11 THÉORÈME.

Le plongement ainsi défini préserve la mesure, i.e. pour tous graphes multiplicatifs d'opérateurs A et B , on a $\llbracket A, B \rrbracket = -\log(\det^{FK}(1 - \Phi(\mathcal{M}_A)\Phi(\mathcal{M}_B)))$.

Par conséquent, si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont des projets multiplicatifs, $\ll \Phi(\mathfrak{a}), \Phi(\mathfrak{b}) \gg = \ll \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \gg$.

Démonstration. Le morphisme Φ est clairement un $*$ -morphisme préservant la trace, donc sa restriction à $p\mathbb{H}p$, où p est une projection finie, satisfait les hypothèses de la Proposition §9.3.9. Par le Corollaire §9.1.29 et la Proposition §9.3.9, et en remarquant que $|\det(1 - \mathcal{M}_A \mathcal{M}_B)| = \det(1 - \mathcal{M}_A \mathcal{M}_B)$, puisque $\|\mathcal{M}_A \mathcal{M}_B\| \leq 1$ et que $\mathcal{M}_A \mathcal{M}_B$ est une matrice réelle, on obtient

$$\begin{aligned} \llbracket A, B \rrbracket &= -\log(\det(1 - \mathcal{M}_A \mathcal{M}_B)) \\ &= -\log(\det^{FK}(1 - (\mathcal{M}_A \otimes 1_{\mathcal{R}})(\mathcal{M}_B \otimes 1_{\mathcal{R}}))) \end{aligned}$$

On a alors, si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont des projets multiplicatifs,

$$\begin{aligned} \ll \Phi(\mathfrak{a}), \Phi(\mathfrak{b}) \gg &= a + b - \log(\det^{FK}(1 - \Phi(A)\Phi(B))) \\ &= a + b + \llbracket A, B \rrbracket \end{aligned}$$

Donc $\ll \Phi(\mathfrak{a}), \Phi(\mathfrak{b}) \gg = \ll \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \gg$. ☺

§9.3.12 THÉORÈME.

Soit A et B des graphes multiplicatifs d'opérateurs tels que $\llbracket A, B \rrbracket \neq \infty$. Alors $\Phi(\mathcal{M}_{A::B}) = \Phi(\mathcal{M}_A) :: \Phi(\mathcal{M}_B)$.

Par conséquent, si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont des projets multiplicatifs, $\Phi(\mathfrak{a} :: \mathfrak{b}) = \Phi(\mathfrak{a}) :: \Phi(\mathfrak{b})$.

Démonstration. Soit $(f, F) = \mathfrak{a} :: \mathfrak{b}$. On a montré que $\mathcal{M}_F$ est la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_B$ (proposition §9.1.31). Il est alors clair que $\mathcal{M}_F \otimes 1_{\mathcal{R}}$ est la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_A \otimes 1_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{M}_B \otimes 1_{\mathcal{R}}$. Par conséquent $\mathcal{M}_F \otimes 1_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_A \otimes 1_{\mathcal{R}} :: \mathcal{M}_B \otimes 1_{\mathcal{R}}$. De plus, on a montré que $\ll \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \gg = \ll \Phi(\mathfrak{a}), \Phi(\mathfrak{b}) \gg$. D'où $\Phi((f, F)) = \Phi(\mathfrak{a}) :: \Phi(\mathfrak{b})$. ☺

Graphes épais : dialectes purement non-commutatifs

§9.3.13 Un graphe épais F de support V^F et de dialecte D^F n'est rien d'autre qu'un graphe sur l'ensemble de sommets $V^F \times D^F$. On définit alors naturellement les notions de graphe épais simple et graphe épais d'opérateur. Les résultats sur les graphes épais seront tous des conséquences immédiates des résultats déjà obtenus sur les graphes non épais dans la section précédente.

§9.3.14 THÉORÈME.

Soit F, G deux graphes épais. Alors $\llbracket F, G \rrbracket = \llbracket \angle(F), \angle(G) \rrbracket$.

Démonstration. Dans le cadre de cette démonstration, on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la quantification de l'interaction entre graphes épais, afin de réserver la notation $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ pour la quantification de l'interaction pour les graphes non épais.

Par définition, si F et G sont des graphes épais, on a $\langle F, G \rangle = \llbracket F^{\dagger G}, G^{\ddagger F} \rrbracket$. Or il est évident que $\langle (F^{\dagger G}) = (\langle (F) \rangle^{\dagger G})$ et $\langle (G^{\ddagger F}) = (\langle (G) \rangle^{\ddagger F})$. Donc, en utilisant la Proposition §9.1.6 :

$$\begin{aligned} \langle F, G \rangle &= \llbracket F^{\dagger G}, G^{\ddagger F} \rrbracket \\ &= \llbracket \langle (F^{\dagger G}) \rangle, \langle (G^{\ddagger F}) \rangle \rrbracket \\ &= \llbracket \langle (\langle (F) \rangle^{\dagger G}) \rangle, \langle (\langle (G) \rangle^{\ddagger F}) \rangle \rrbracket \\ &= \langle \langle (F) \rangle, \langle (G) \rangle \rangle \end{aligned}$$

Finalement, la mesure de l'interaction entre graphes épais est invariante par contraction des arêtes. ☺

§9.3.15 Soit G un graphe épais simple de support V^G et de dialecte D^G . On notera n^G le cardinal du dialecte de G . On peut alors définir la matrice $\mathcal{M}_G$ des poids de G comme un élément de $p_{VG} \mathcal{L}(H) p_{VG} \otimes \mathcal{M}_{n^G}(\mathbf{C})$. En effet, si l'on note $v_1, \dots, v_n$ les éléments de V^G et $d_1, \dots, d_k$ ceux de D^G , on peut définir la matrice $(\omega_{(i_v, i_d), (j_v, j_d)})_{0 \leq i_d, j_d \leq k}^{0 \leq i_v, j_v \leq n}$ où $\omega_{(i_v, i_d), (j_v, j_d)} = \omega_e$ s'il existe $e \in E^G$ (nécessairement unique car G est simple) tel que $s^G(e) = (v_{i_v}, d_{i_d})$ et $t^G(e) = (v_{j_v}, d_{j_d})$, et $\omega_{(i_v, i_d), (j_v, j_d)} = 0$ sinon.

§9.3.16 DÉFINITION.

Soit G un graphe épais simple de support V^G et de dialecte D^G . On notera n^G le cardinal du dialecte de G . On définit alors la matrice des poids localisée $\mathcal{M}_G$ de G comme l'opérateur de $p_{VG} \mathcal{L}(\mathbb{H}) p_{VG} \otimes \mathcal{M}_{n^G}(\mathbf{C})$ induit par la matrice des poids de G .

§9.3.17 DÉFINITION.

On définit alors $\Phi(A)$, où A est un graphe épais de dialecte D^A de cardinal n^A , par :

$$\Phi(A) = \Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{M}_{n^A}(\mathbf{C})}(\mathcal{M}_A)$$

§9.3.18 PROPOSITION.

Soit G, H deux graphes épais d'opérateurs, et n^G, n^H les cardinaux de leurs dialectes respectifs. Alors

$$-\log(\det(1 - \Phi(\mathcal{M}_G)^{\dagger \mathcal{M}_{n^H}(\mathbf{C})} \Phi(\mathcal{M}_H)^{\ddagger \mathcal{M}_{n^G}(\mathbf{C})})) = \llbracket G, H \rrbracket$$

Démonstration. Dans le cadre de cette démonstration, on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la quantification de l'interaction entre graphes épais, afin de réserver la notation $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ pour la quantification de l'interaction pour les graphes non épais.

Par définition,

$$\begin{aligned} \langle G, H \rangle &= \llbracket G^{\dagger H} H^{\ddagger G} \rrbracket \\ &= -\log(\det(1 - \Phi(\mathcal{M}_{G^{\dagger H}}) \Phi(\mathcal{M}_{H^{\ddagger G}}))) \end{aligned}$$

Il faut maintenant remarquer que $\Phi(\mathcal{M}_{G^{\dagger H}})$ est un variant de $\Phi(\mathcal{M}_G)^{\dagger \mathcal{M}_{n^H}(\mathbf{C})}$. En effet, $\mathcal{M}_{G^{\dagger H}}$ est un élément de $p_{VG} \mathcal{L}(\mathbb{H}) p_{VG} \otimes \mathcal{M}_{n^G \times n^H}(\mathbf{C})$. Modulo l'isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n^G \times n^H}(\mathbf{C})$ et $\mathcal{M}_{n^G}(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{M}_{n^H}(\mathbf{C})$, les opérateurs $\mathcal{M}_{G^{\dagger H}}$ et $\mathcal{M}_G \otimes 1_{\mathcal{M}_{n^H}(\mathbf{C})}$ sont les mêmes (par définition, $G^{\dagger H}$ est une union disjointe, indicée par les éléments de D^H , de copies de G). De même, $\Phi(\mathcal{M}_{H^{\ddagger G}})$ est un variant de $\Phi(\mathcal{M}_H)^{\ddagger \mathcal{M}_{n^G}(\mathbf{C})}$.

Donc :

$$\begin{aligned} \langle G, H \rangle &= -\log(\det(1 - \Phi(\mathcal{M}_{G^{\dagger H}}) \Phi(\mathcal{M}_{H^{\ddagger G}}))) \\ &= -\log(\det(1 - \Phi(\mathcal{M}_G)^{\dagger \mathcal{M}_{n^H}(\mathbf{C})} \Phi(\mathcal{M}_H)^{\ddagger \mathcal{M}_{n^G}(\mathbf{C})})) \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat énoncé. ☺

§9.3.19 PROPOSITION.

Soit F, G deux graphes épais et n^F, n^G les cardinaux de leurs dialectes respectifs. Alors l'opérateur $\mathcal{M}_{\langle F, G \rangle}$ est la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_{\langle F \rangle}^{\dagger \mathcal{M}_{n^G}(\mathbf{C})}$ et $\mathcal{M}_{\langle G \rangle}^{\ddagger \mathcal{M}_{n^F}(\mathbf{C})}$.

Démonstration. Dans le cadre de cette démonstration, on utilisera la notation $::$ pour le branchement de graphes épais, et la notation $\cdot$ pour la quantification de l'interaction pour les graphes non épais.

Par définition, $F :: G = F^{\dagger G} :: G^{\ddagger F}$. Par la Proposition §9.1.31, on sait que $\mathcal{M}_{\angle(F^{\dagger G} :: G^{\ddagger F})}$ est la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_{F^{\dagger G}}$ et $\mathcal{M}_{G^{\ddagger F}}$. Comme nous l'avons vu dans la preuve de la proposition précédente, $\mathcal{M}_{F^{\dagger G}}$ est un variant de $\mathcal{M}_F^{\dagger, \mathcal{M}_{nG}(\mathbf{C})}$ et $\mathcal{M}_{G^{\ddagger F}}$ est un variant de $\mathcal{M}_G^{\ddagger, \mathcal{M}_{nF}(\mathbf{C})}$. Donc $\mathcal{M}_{\angle(F^{\dagger G} :: G^{\ddagger F})}$ est un variant de la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_F^{\dagger, \mathcal{M}_{nG}(\mathbf{C})}$ et $\mathcal{M}_G^{\ddagger, \mathcal{M}_{nF}(\mathbf{C})}$. $\odot$

§9.3.20 DÉFINITION.

Soit $\mathfrak{a} = (a, A)$ un projet épais d'opérateur. On associe à $\mathfrak{a}$ le projet de GdI5 :

$$\Phi(\mathfrak{a}) = a \cdot + \cdot tr + \Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{M}_{nA}(\mathbf{C})}(\mathcal{M}_A)$$

où tr est la trace normalisée.

§9.3.21 THÉORÈME.

Soit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ des projets épais d'opérateurs. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) &= \Phi(\mathfrak{a}) \otimes \Phi(\mathfrak{b}) \\ \ll \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \gg &= \ll \Phi(\mathfrak{a}), \Phi(\mathfrak{b}) \gg \\ \text{lorsque } \ll A, B \gg &\neq \infty : \\ \Phi(\mathfrak{a} :: \mathfrak{b}) &= \Phi(\mathfrak{a}) :: \Phi(\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ des projets épais d'opérateurs, $\mathfrak{a} = (a, A)$ et $\mathfrak{b} = (b, B)$. On a montré que :

$$-\log(\det(1 - \Phi(\mathcal{M}_A)^{\dagger, \mathcal{M}_{nB}(\mathbf{C})} \Phi(\mathcal{M}_B)^{\ddagger, \mathcal{M}_{nA}(\mathbf{C})}))$$

On en déduit que $\ll \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \gg = a + b + \ll A, B \gg = \ll \Phi(\mathfrak{a}), \Phi(\mathfrak{b}) \gg$.

De plus, la Proposition §9.3.19 montre que si $\ll A, B \gg \neq \infty$, alors $\mathcal{M}_{\angle(A :: B)}$ est la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_{\angle(A)}^{\dagger, \mathcal{M}_{nB}(\mathbf{C})}$ et $\mathcal{M}_{\angle(B)}^{\ddagger, \mathcal{M}_{nA}(\mathbf{C})}$. Donc :

$$\Phi(\mathfrak{a} :: \mathfrak{b}) = (\ll \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \gg, \Phi(\mathcal{M}_{\angle(A :: B)})) = \Phi(\mathfrak{a}) :: \Phi(\mathfrak{b})$$

Il reste à vérifier que, lorsque les supports de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont disjoints, $\Phi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \Phi(\mathfrak{a}) \otimes \Phi(\mathfrak{b})$. Comme $\Phi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \Phi(\mathfrak{a} :: \mathfrak{b})$ et $\Phi(\mathfrak{a}) \otimes \Phi(\mathfrak{b}) = \Phi(\mathfrak{a}) :: \Phi(\mathfrak{b})$, c'est un corollaire de la propriété que nous venons de montrer. $\odot$

Graphes tranchés : commutativité dans les dialectes

§9.3.22 Deux approches sont possibles dans le cas de graphes tranchés. La première consiste à définir les projets de la GdI5 en considérant des sommes formelles pondérées d'opérateurs A_i dans une algèbre $p\mathfrak{A}_{0,1p} \otimes \mathfrak{M}_k(\mathbf{C})$ où p est le lieu de cette somme et $\mathfrak{M}_k(\mathbf{C})$ est considéré avec la trace normalisée $\text{tr}(1) = 1$ (voir le Paragraphe §4.2.24). Il faut alors montrer que cette définition alternative — qui a l'avantage de ne pas utiliser de *pseudo-traces* — est équivalente à celle donnée par Girard. La seconde approche consiste à montrer directement que l'on peut associer à un graphe tranché un projet de la GdI5 au sens de Girard : la somme formelle est alors représentée par une somme directe, et la pondération des tranches permet de définir la pseudo-trace. On a choisi ici de développer la seconde approche, même si la première est tout à fait valide.

§9.3.23 DÉFINITION.

Un graphe tranché *simple* est un graphe $G = \sum_{i \in I} \alpha_i^G G_i$ tel que chaque graphe G_i soit un graphe simple.

§9.3.24 DÉFINITION.

On étend la fonction de contraction des arêtes aux graphes tranchés : $\angle(G) = \sum_{i \in IG} \alpha_i^G \angle(G_i)$.

§9.3.25 THÉORÈME.

Soit F, G deux graphes tranchés. Alors $\llbracket F, G \rrbracket = \llbracket \angle(F), \angle(G) \rrbracket$.

Démonstration. Par définition et la Proposition §9.1.6 :

$$\begin{aligned} \llbracket F, G \rrbracket &= \sum_{i \in IF} \sum_{j \in IG} \alpha_i^F \alpha_j^G \llbracket F_i, G_j \rrbracket \\ &= \sum_{i \in IF} \sum_{j \in IG} \alpha_i^F \alpha_j^G \llbracket \angle(F_i), \angle(G_j) \rrbracket \end{aligned}$$

Donc $\llbracket F, G \rrbracket = \llbracket \angle(F), \angle(G) \rrbracket$. ☺

§9.3.26 Si $G = \sum_{i \in IG} \alpha_i^G G_i$ est un graphe tranché simple, alors on peut associer à chaque G_i sa matrice des poids localisée $\mathcal{M}_{G_i}$. Comme les G_i ont tous le même ensemble de sommets V^G , les matrices des poids localisées $\mathcal{M}_{G_i}$ sont des éléments de $p_{VG} \mathcal{L}(\mathbb{H}) p_{VG}$.

§9.3.27 DÉFINITION.

Soit G un graphe tranché. On définit la matrice des poids localisée de G comme la matrice $\mathcal{M}_G = \oplus_{i \in IG} \mathcal{M}_{G_i}$. C'est un élément de $p_{VG} \mathcal{L}(\mathbb{H}) p_{VG} \otimes \oplus_{i \in IG} \mathbb{C}$. On définit de plus la forme linéaire α^G sur $\oplus_{i \in IG} \mathbb{C}$ par $(x_i)_{i \in IG} \mapsto \sum_{i \in IG} \alpha_i^G x_i$. Cette forme linéaire est évidemment une pseudo-trace sur $\oplus_{i \in IG} \mathbb{C}$.

§9.3.28 DÉFINITION.

Un graphe tranché d'opérateur est un graphe $G = \sum_{i \in IG} \alpha_i^G G_i$ tel que chaque G_i soit un graphe d'opérateur.

§9.3.29 LEMME.

Soit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ des idiomes et α, β des pseudo-traces sur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ respectivement. Alors pour tous opérateurs $A \in \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{A}$ et $B \in \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{B}$, on notera $A \oplus B$ l'opérateur de $\mathfrak{K} \otimes (\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$ défini par $\iota_1(A) + \iota_2(B)$ où ι_1 (resp. ι_2) est le plongement $\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{K} \otimes (\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$ (resp. $\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{K} \otimes (\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$). On peut alors définir la pseudo-trace $\alpha \oplus \beta$ sur $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, et on a :

$$-\log(\det_{tr \otimes (\alpha \oplus \beta)}^{FK}(1 - A \oplus B)) = -\log(\det_{tr \otimes \alpha}^{FK}(1 - A)) - \log(\det_{tr \otimes \beta}^{FK}(1 - B))$$

Démonstration. Comme $\det^{FK}(AB) = \det^{FK}(A) \det^{FK}(B)$, on obtient

$$-\log(\det^{FK}(A)) - \log(\det^{FK}(B)) = -\log(\det^{FK}(AB))$$

Alors :

$$\begin{aligned} &-\log(\det_{tr \otimes (\alpha \oplus \beta)}^{FK}(1 - A \oplus B)) \\ &= -\log(\det_{tr \otimes (\alpha \oplus \beta)}^{FK}((1 - A) \oplus (1 - B))) \\ &= -\log(\det_{tr \otimes (\alpha \oplus \beta)}^{FK}(1 - A) \oplus 1) - \log(\det_{tr \otimes (\alpha \oplus \beta)}^{FK}(1 \oplus (1 - B))) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} -\log(\det_{tr \otimes (\alpha \oplus \beta)}^{FK}((1 - A) \oplus 1)) &= tr \otimes (\alpha \oplus \beta)(\log(|(1 - A) \oplus 1|)) \\ &= tr \otimes (\alpha \oplus \beta)(\log(|1 - A| \oplus 1)) \\ &= tr \otimes (\alpha \oplus \beta)(\log(|(1 - A)|) \oplus 0) \\ &= tr \otimes \alpha(\log(|(1 - A)|)) \\ &= -\log(\det_{tr \otimes \alpha}^{FK}(1 - A)) \end{aligned}$$

De même, $-\log(\det_{tr \otimes (\alpha \oplus \beta)}^{FK}(1 \oplus (1 - B))) = -\log(\det_{tr \otimes \beta}^{FK}(1 - B))$. On en déduit alors l'égalité que l'on voulait prouver. ☺

§9.3.30 LEMME.

Si $\mathfrak{A} = \mathbf{C}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, alors :

$$-\log(\det_{tr \otimes \alpha}^{FK}(1 - A)) = -\alpha \times \log(\det^{FK}(1 - A))$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} \det_{tr \otimes \alpha}^{FK}(1 - A) &= \exp(-tr \otimes \alpha(\log(|1 - A|))) \\ &= \exp(\alpha \times (-tr(\log(|1 - A|)))) \\ &= (\exp(-tr(\log(|1 - A|))))^\alpha \\ &= (\det^{FK}(1 - A))^\alpha \end{aligned}$$

Donc $-\log(\det_{tr \otimes \alpha}^{FK}(1 - A)) = -\log((\det^{FK}(1 - A))^\alpha) = -\alpha \log(\det^{FK}(1 - A))$. $\odot$

§9.3.31 On étend maintenant la fonction Φ définie dans la section précédente aux matrices avec dialectes en définissant $\Psi = \Phi \otimes \text{Id}_{\mathfrak{A}}$.

§9.3.32 PROPOSITION.

Soit G, H deux graphes tranchés. Alors

$$\llbracket G, H \rrbracket = -\log(\det_{tr \otimes \alpha^G \otimes \alpha^H}^{FK}(1 - \Psi(\mathcal{M}_G^{\dagger H})\Psi(\mathcal{M}_H^{\dagger G})))$$

Démonstration. On a $\mathcal{M}_G^{\dagger H} = \oplus_{i \in I^G} \oplus_{j \in I^H} \mathcal{M}_{G_i}$ et $\mathcal{M}_H^{\dagger G} = \oplus_{i \in I^G} \oplus_{j \in I^H} \mathcal{M}_{H_j}$. Donc :

$$\begin{aligned} &-\log(\det_{tr \otimes \alpha^G \otimes \alpha^H}^{FK}(1 - \Phi(\mathcal{M}_G^{\dagger H})\Phi(\mathcal{M}_H^{\dagger G}))) \\ &= -\log(\det_{tr \otimes \alpha^G \otimes \alpha^H}^{FK}(1 - \Phi(\mathcal{M}_G^{\dagger H} \mathcal{M}_H^{\dagger G}))) \\ &= -\log(\det_{tr \otimes (\oplus_{i \in I^G} \oplus_{j \in I^H})}^{FK}(1 - \oplus_{i \in I^G} \oplus_{j \in I^H} \Phi(\mathcal{M}_{G_i} \mathcal{M}_{H_j}))) \\ &= \sum_{i \in I^G} \sum_{j \in I^H} -\log(\det_{tr \otimes \alpha_i^G \alpha_j^H}^{FK}(1 - \Phi(\mathcal{M}_{G_i})\Phi(\mathcal{M}_{H_j}))) \\ &= \sum_{i \in I^G} \sum_{j \in I^H} -\alpha_i^G \alpha_j^H \log(\det^{FK}(1 - \mathcal{M}_{G_i} \mathcal{M}_{H_j})) \\ &= \sum_{i \in I^G} \sum_{j \in I^H} \alpha_i^G \alpha_j^H \llbracket G_i, H_j \rrbracket \end{aligned}$$

Donc $-\log(\det_{tr \otimes \alpha^G \otimes \alpha^H}^{FK}(1 - \mathcal{M}_G^{\dagger H} \mathcal{M}_H^{\dagger G})) = \llbracket F, G \rrbracket$. $\odot$

§9.3.33 PROPOSITION.

Soit F, G deux graphes tranchés tels que $\llbracket F, G \rrbracket \neq \infty$. Alors $\mathcal{M}_{\angle(F::G)}$ est la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_{\angle(F)}$ et $\mathcal{M}_{\angle(G)}$.

Démonstration. Par définition $\angle(F::G) = \sum_{i \in I^F} \sum_{j \in J^G} \alpha_i^F \alpha_j^G \angle(F_i, G_j)$. Comme $\llbracket F, G \rrbracket \neq \infty$, alors $\llbracket F_i, G_j \rrbracket \neq \infty$ pour tous $(i, j) \in I^F \times J^G$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\angle(F::G)} &= \mathcal{M}_{\sum_{i \in I^F} \sum_{j \in J^G} \alpha_i^F \alpha_j^G \angle(F_i, G_j)} \\ &= \oplus_{i \in I^F} \oplus_{j \in J^G} \mathcal{M}_{\angle(F_i, G_j)} \end{aligned}$$

Les Propositions §9.1.31 et §9.3.19 nous assurent que $\mathcal{M}_{\angle(F_i, G_j)}$ est la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_{F_i}$ et $\mathcal{M}_{G_j}$. On en déduit que $\oplus_{i \in I^F} \oplus_{j \in J^G} \mathcal{M}_{\angle(F_i, G_j)}$ est la solution de l'équation de rétroaction entre $\oplus_{i \in I^F} \mathcal{M}_{F_i}$ et $\oplus_{j \in J^G} \mathcal{M}_{G_j}$. Donc $\mathcal{M}_{\angle(F::G)}$ est bien la solution de l'équation de rétroaction entre $\mathcal{M}_{\angle(F)}$ et $\mathcal{M}_{\angle(G)}$. $\odot$

§9.3.34 DÉFINITION.

Soit $\mathfrak{a} = (a, A)$ un projet additif d'opérateur. On associe à G le projet hyperfini :

$$\Phi(\mathfrak{a}) = a \cdot + \cdot \alpha + \Phi \otimes \text{Id}_{\oplus_{i \in I^G} \mathbf{C}(\mathcal{M}_A)}$$

§9.3.35 THÉORÈME.

Soit a, b des projets additifs d'opérateurs. Alors :

$$\begin{aligned}\Phi(a \otimes b) &= \Phi(a) \otimes \Phi(b) \\ \Phi(a + b) &= \Phi(a) + \Phi(b) \\ \ll a, b \gg &= \ll \Phi(a), \Phi(b) \gg\end{aligned}$$

lorsque $\ll A, B \gg \neq \infty$:

$$\Phi(a :: b) = \Phi(a) :: \Phi(b)$$

Démonstration. Le théorème est une conséquence immédiate des propositions précédentes §9.3.32 et §9.3.33, ainsi que de la définition de Φ (pour la seconde équation). ☺

9.A Graphages et GdI

§9.A.1 On présente ici certains résultats partiels permettant de relier les constructions sur les graphages définies dans le Chapitre 8 avec les constructions de Girard.

§9.A.2 On se fixe maintenant l'espace mesuré $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ de la droite réelle munie de la mesure de Lebesgue et la tribu des boréliens. On notera abusivement $(\mathbf{R}, \lambda)$ pour simplifier les notations. Les deux propositions suivantes sont des corollaires immédiats du Théorème §8.3.11, et présentent deux fonctions de quantification des circuits qui sont les généralisations naturelles des fonctions $x \mapsto -\log(1-x)$ et $x \mapsto \infty$ lorsque $\Omega =]0, 1]$.

§9.A.3 PROPOSITION.

La fonction suivante est une fonction de quantification des circuits :

$$q_\infty : \pi \mapsto \int_{\text{supp}(\pi)} \frac{-\log(1 - \omega_\pi^{\rho_{\phi_\pi}(x)})}{\rho_{\phi_\pi}(x)} d\lambda(x)$$

On notera $\ll \cdot, \cdot \gg_\infty$ la mesure correspondante.

§9.A.4 PROPOSITION.

La fonction suivante est une fonction de quantification des circuits :

$$q_{\det} : \pi \mapsto \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda(\text{supp}(\pi)) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera $\ll \cdot, \cdot \gg_{\det}$ la mesure correspondante.

§9.A.5 Si $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une transformation préservant la mesure, on peut lui associer une isométrie $[T] \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}, \lambda))$:

$$[T] : f \in L^2(\mathbf{R}, \lambda) \mapsto f \circ T \in L^2(\mathbf{R}, \lambda)$$

Le fait que $[T]$ est une isométrie provient du fait que T préserve la mesure :

$$\begin{aligned}\langle [T]f, [T]g \rangle &= \int_{\mathbf{R}} ([T]f)(x) \overline{([T]g)(x)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}} f \circ T(x) \overline{g \circ T(x)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}} f \circ T(x) \overline{g \circ T(x)} d\lambda(x) \\ &= \int_{T(\mathbf{R})} f(x) \overline{g(x)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{g(x)} d\lambda(x) \\ &= \langle f, g \rangle\end{aligned}$$

§9.A.6 Soit maintenant $U : X \rightarrow Y$ une transformation préservant la mesure, avec $X, Y \subset \mathbf{R}$ mesurables. On définit, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R}, \lambda)$, $[U]f(x) = f \circ U(x)$ si $x \in X$ et $[U]f(x) = 0$ sinon. Ceci définit une isométrie partielle. En effet, si l'on note p la projection de $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}, \lambda))$ induite par la fonction caractéristique de Y , alors pour tous $f, g \in pL^2(\mathbf{R}, \lambda)$,

$$\begin{aligned} \langle [U]f, [U]g \rangle &= \int_{\mathbf{R}} ([U]f)(x) \overline{([U]g)(x)} d\lambda(x) \\ &= \int_X ([U]f)(x) \overline{([U]g)(x)} d\lambda(x) \\ &= \int_X f \circ U(x) \overline{g \circ U(x)} d\lambda(x) \\ &= \int_Y f(x) \overline{g(x)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{g(x)} d\lambda(x) \end{aligned}$$

De plus, il est clair que pour tout $f, g \in (1-p)L^2(\mathbf{R}, \lambda)$, $\langle [U]f, [U]g \rangle = 0$.

§9.A.7 DÉFINITION.

Soit F un graphage pondéré. On définit l'opérateur associé à F par $[F] = \sum_{e \in E^F} \omega_e^F [\phi_e^F]$.

§9.A.8 DÉFINITION.

Un *point de vue* est une représentation du facteur hyperfini $\mathfrak{R}_{0,1}$ de type II_∞ sur $L^2(\mathbf{R}, \lambda)$ telle que $L^\infty(\mathbf{R}) \subset \pi(\mathfrak{R}_{0,1})$ et $\text{tr}([\chi_X]) = \lambda(X)$ pour tout mesurable $X \subset \mathbf{R}$.

§9.A.9 DÉFINITION.

Soit π un point de vue. Un graphage F est un *graphage d'opérateur* par rapport à la représentation π si $[F] \in \mathfrak{R}_{0,1}$ et $[F]$ est un hermitien de norme au plus 1.

§9.A.10 LEMME.

Soit $\phi : X \rightarrow Y$ une transformation préservant la mesure telle que $[\phi] \in \mathfrak{R}_{0,1}$. Alors $\text{tr}(\omega[\phi]) = \lambda(\{x \in X \mid \phi(x) = x\}) \times \omega$.

Démonstration. Par la linéarité de la trace, on a $\text{tr}(\omega[\phi]) = \omega \times \text{tr}([\phi])$. On est donc ramenés à montrer que $\text{tr}([\phi]) = \lambda(\{x \in X \mid \phi(x) = x\})$ pour toute transformation partielle préservant la mesure. Ce résultat est prouvé dans l'annexe de l'article de Girard introduisant la GdI5 [Gir11a]. $\odot$

§9.A.11 LEMME.

Soit $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une transformation préservant la mesure telle que $[\phi] \in \mathfrak{R}_{0,1}$. Alors :

$$\int_{\text{supp}(\phi)} \frac{-\log(1 - \omega^{\rho_\pi(x)})}{\rho_\pi(x)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\text{tr}((\omega[\phi])^n)}{n}$$

Démonstration. Comme nous l'avons déjà vu, on a :

$$\int_{\text{supp}(\phi)} \frac{-\log(1 - \omega^{\rho_\pi(x)})}{\rho_\pi(x)} = \sum_{i \geq 1} \int_{(\text{supp}(\phi))_i} \frac{-\log(1 - \omega^i)}{i}$$

On utilise alors la série du logarithme pour regrouper les termes en fonction de la longueur des cycles :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \int_{(\text{supp}(\phi))_i} \frac{-\log(1 - \omega^i)}{i} &= \sum_{i \geq 1} \int_{(\text{supp}(\phi))_i} \frac{1}{i} \sum_{j \geq 1} \frac{\omega^{ij}}{j} \\ &= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \int_{(\text{supp}(\phi))_i} \frac{\omega^{ij}}{ij} \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{i,j} \int_{(\text{supp}(\phi))_i} \frac{\omega^n}{n} \end{aligned}$$

On rappelle que la notation $i \mid n$ signifie que i divise n . On remarque que l'ensemble $X_n = \{x \in \text{supp}(\pi) \mid \phi_\pi^n(x) = x\}$ est égal à l'union (disjointe) $\cup_{i \mid n} (\text{supp}(\phi_\pi))_i$. On peut alors écrire, en utilisant le lemme précédent :

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp}(\phi)} \frac{-\log(1 - \omega^{\rho_\pi(x)})}{\rho_\pi(x)} &= \sum_{n \geq 1} \sum_{i \mid n} \int_{(\text{supp}(\phi_\pi))_i} \frac{\omega^n}{n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_{X_n} \frac{\omega^n}{n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \lambda(X_n) \times \frac{\omega^n}{n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\text{tr}((\omega[\phi])^n)}{n} \end{aligned}$$

On a donc montré l'égalité voulue. ☺

§9.A.12 LEMME.

Soit F, G deux graphages pondérés, et FG le graphage des chemins alternés $f_i g_j$ de longueur 2 tels que $f_i \in E^F$. Alors $[F][G] = [FG]$.

Démonstration. Par définition, on a $[F] = \sum_{e \in E^F} \omega_e^F [\phi_e^F]$ et $[G] = \sum_{e \in E^G} \omega_e^G [\phi_e^G]$. Donc :

$$[F][G] = \sum_{(e,f) \in E^F \times E^G} \omega_e^F \omega_f^G [\phi_e^F][\phi_f^G]$$

Il est clair d'après les définitions que $[\phi_e^F][\phi_f^G] = [\phi_{ef}]$ lorsque ef est un chemin dans FG et $[\phi_e^F][\phi_f^G] = 0$. De plus, par définition du poids des chemins, le poids du chemin ef est bien égal à $\omega_e^F \omega_f^G$. ☺

Les deux lemmes précédents permettent d'obtenir la proposition suivante.

§9.A.13 PROPOSITION.

Soit F un graphage d'opérateur. On a :

$$\sum_{\pi \in \text{Cy}(F)} \int_{\text{supp}(\pi)} \frac{-\log(1 - (\omega_\pi^F)^{\rho_\pi(x)})}{\rho_\pi(x)} d\lambda(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{\text{tr}([F]^i)}{i}$$

CHAPITRE 10

VÉRITÉ SUBJECTIVE

Table des matières

10.1 Vérité Subjective	226
10.2 MASAs et Vérité Subjective dans le type II	227
10.2.1 La GdI5.0	227
10.2.2 Vérité Subjective	230
10.2.3 Classification des MASAs et Logique Linéaire	236
10.2.4 Conclusion	244
10.3 Vérité Subjective en GdI5.1 et GdI5.2	245
10.3.1 Points de vues et angles	245

10.1 Vérité Subjective

- §10.1.1 Comme nous l'avons vu plus haut, la notion de gain dans les graphes peut être exprimée comme le fait que $\angle(G)$ est une symétrie partielle. Le cas des graphes est cependant particulier. En effet, un graphe G tel que $\angle(G)$ est une symétrie partielle vérifie une condition supplémentaire. En effet, du fait de la représentation matricielle des graphes, ceux-ci sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ définie par l'ensemble des sommets du graphe. On peut alors montrer que la symétrie partielle définie par un graphe $\angle(G)$ est une union disjointe de transposition *dans cette base*. Ainsi, la symétrie partielle obtenue a une propriété supplémentaire : il s'agit d'un élément du groupoïde normalisant de la sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{A}$ définie par $\mathcal{B}$. Ceci est immédiat d'après la caractérisation que nous avons donnée : si p est une projection dans $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire une projection décrite par une matrice diagonale dans la base $\mathcal{B}$, et $[G]$ est la matrice définie par $\angle(G)$, alors $[G]p[G]^*$ est une projection dans $\mathfrak{A}$.
- §10.1.2 Dans la GdI5, ou dans une construction similaire dans le type I, toutes les symétries partielles considérées ne sont pas des éléments d'un même groupoïde normalisant. En effet, la restriction aux poids dans $[0, 1]$ dans la définition des graphes permet de n'écrire qu'un certain ensemble d'opérateurs. Le fait de considérer un cadre dans lequel on travaille avec toutes les matrices fait que la définition de projet gagnant basée sur la simple notion de symétrie partielle n'est pas suffisante. Par exemple, si S et T sont les symétries partielles définies par :

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que u, v sont deux symétries partielles : c'est évident pour u , et :

$$vv^* = v^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2$$

Cependant, leur produit n'est pas une isométrie partielle :

$$uv = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, le calcul du déterminant de $1 - uv$ nous donne :

$$\begin{vmatrix} 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})^2 \neq 0, \infty$$

- §10.1.3 La notion de gain ainsi définie ne convient donc pas : si u, u' et v sont les opérateurs de projets gagnants dans respectivement $\mathbf{A}, \mathbf{A}^\perp$ et $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, nous voulons nous assurer que :
- $v :: u$ sera une symétrie partielle (pour la compositionnalité);
 - $\det(1 - uu') = 0$ (pour la consistance).

Pour cela, il est nécessaire de se restreindre à une classe de symétries partielles close pour la somme et la composition. Comme nous le verrons dans la Section 10.2, la somme et le produit d'isométries partielles dans le groupoïde normalisant d'une sous-algèbre commutative

maximale est encore une isométrie partielle¹. En particulier, si u et v sont des symétries partielles dans $G(\mathfrak{A})$, alors $u :: v$ est une symétrie partielle dans $G(\mathfrak{A})$.

§10.1.4 En dimension finie, cela correspond à choisir une base. En effet, la classification des sous-algèbres commutatives maximales de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ (Théorème §3.3.60) nous permet d'affirmer que dans le cas où $\mathbb{H}$ est de dimension finie, les sous-algèbres commutatives maximales de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ sont les sous-algèbres diagonales : l'ensemble des opérateurs diagonaux dans une base fixée. Ainsi, on peut définir une notion de gain *subjective*, c'est-à-dire dépendant de la base choisie. Un opérateur est alors *gagnant selon $\mathcal{B}$* lorsqu'il s'agit d'une symétrie partielle dans le groupoïde normalisant de l'algèbre $\mathfrak{D}$ des opérateurs diagonaux dans la base $\mathcal{B}$. La composition de telles symétries partielles est encore une symétrie partielle et on peut alors montrer que le résultat de l'exécution est également une symétrie partielle dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{D}$. Cependant, il reste un problème de mise et on ne pourra pas montrer la consistance : étant donné deux symétries partielles u, v dans $G(\mathfrak{D})$, le logarithme de leur déterminant n'est pas nécessairement nul ou infini. En dimension finie, il suffit de considérer des matrices 2×2 pour trouver un exemple. Soit u et v les matrices :

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\det(1 - uv) = 4$, c'est-à-dire $-\log(\det(1 - uv)) \neq 0, \infty$. Le problème vient du fait qu'il est impossible d'exclure les matrices u dont certains coefficients sont négatifs. La solution trouvée par Girard dans la GdI5 [Gir11a] est de considérer une représentation de l'algèbre dans laquelle l'opérateur u est induit par une transformation préservant la mesure sur un espace mesuré. La définition précise se trouve dans la Section 10.3. On va dans un premier temps étudier la notion de vérité subjective dans une version de la GdI5 antérieure à celle publiée (que l'on nommera GdI5.0) dans laquelle l'orthogonalité n'est pas définie par le déterminant dans tous les cas (une condition est posée sur le rayon spectral). Dans ce cas, il est alors possible de définir simplement la subjectivité basée sur la notion de sous-algèbre commutative maximale car le problème posé par la consistance ne se pose pas. Nous ferons ensuite le lien avec la notion de vérité de la GdI5.1 dans la dernière section.

10.2 MASAs et Vérité Subjective dans le type II

§10.2.1 On va commencer par étudier une version de la GdI5 antérieure à celle introduite dans l'article de Girard [Gir11a]. L'intérêt de cette construction est que la notion de vérité subjective dépend du choix d'une sous-algèbre commutative maximale, c'est-à-dire l'équivalent d'une base dans le cas des matrices. On pourra alors s'aider de certains résultats sur la classification des sous algèbres commutatives maximales afin d'obtenir des résultats d'adéquation.

La GdI5.0

§10.2.2 DÉFINITION.

Un *opérateur dialectal* de support $p^* = p^2 = p \in \mathfrak{R}_{0,1}$ et de dialecte $\mathfrak{A}$ une algèbre de von Neumann finie de type I est la donnée :

1. d'un hermitien $A^* = A \in p\mathfrak{R}_{0,1}p \otimes \mathfrak{A}$ tel que $\|A\| \leq 1$;
2. d'une pseudo-trace α .

§10.2.3 On définit, pour $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ deux algèbres de von Neumann, les isomorphismes :

$$\begin{aligned} (\cdot)^{\dagger \mathfrak{B}} &: \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \\ (\cdot)^{\ddagger \mathfrak{A}} &: \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \end{aligned}$$

1. Pour la somme, il faut supposer que les domaines et codomains sont disjoints.

§10.2.4 DÉFINITION (LDET).

Soit $A \in \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{A}$ un opérateur de norme strictement inférieure à 1, avec une trace tr sur $\mathfrak{R}_{0,1}$ et une pseudo-trace α sur l'algèbre finie et hyperfinie $\mathfrak{A}$. On définit :

$$\text{ldet}(1 - A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{tr \otimes \alpha(A^k)}{k}$$

§10.2.5 DÉFINITION.

On définit la mesure de l'interaction entre deux opérateurs dialectaux $(A, \alpha), (B, \beta)$ de supports respectifs p, q et de dialectes respectifs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ par :

$$\llbracket A, B \rrbracket = \begin{cases} \text{ldet}(1 - A^{\dagger \mathfrak{B}} B^{\dagger \mathfrak{A}}) & \text{si } \text{rad}(A^{\dagger \mathfrak{B}} B^{\dagger \mathfrak{A}}) < 1 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

§10.2.6 LEMME.

Soit $u, v \in \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{A}$ et α une pseudo-trace sur $\mathfrak{A}$. Alors, sous l'hypothèse de la convergence des séries :

$$\text{ldet}(1 - (u + v - uv)) = \text{ldet}(1 - u) + \text{ldet}(1 - v)$$

Démonstration. Sous l'hypothèse de la convergence des séries :

$$\begin{aligned} \text{ldet}(1 - (u + v)) &= -\text{tr}(\log((1 - u)(1 - v))) \\ &= -\text{tr}(\log(1 - u) + \log(1 - v)) \\ &= -\text{tr}(\log(1 - u)) - \text{tr}(\log(1 - v)) \end{aligned}$$

D'où $\text{ldet}(1 - (u + v - uv)) = \text{ldet}(1 - u) + \text{ldet}(1 - v)$. ☺

§10.2.7 LEMME.

Soit $u \in \mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{A}$, une trace tr sur $\mathfrak{R}_{0,1}$ et une pseudo-trace α sur $\mathfrak{A}$ une algèbre finie et hyperfinie. Pour toute algèbre finie et hyperfinie $\mathfrak{B}$ et pseudo-trace β sur $\mathfrak{B}$, on a :

$$\text{ldet}(1 - u \otimes 1_{\mathfrak{B}}) = \beta(1_{\mathfrak{B}}) \text{ldet}(1 - u)$$

Démonstration. Par définition :

$$\begin{aligned} \text{ldet}(1 - u \otimes 1_{\mathfrak{B}}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{tr \otimes \alpha \otimes \beta((u \otimes 1_{\mathfrak{B}})^k)}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{tr \otimes \alpha \otimes \beta(u^k \otimes 1_{\mathfrak{B}})}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{tr \otimes \alpha(u^k) \beta(1_{\mathfrak{B}})}{k} \\ &= \beta(1_{\mathfrak{B}}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{tr \otimes \alpha(u^k)}{k} \end{aligned}$$

☺

§10.2.8 DÉFINITION.

Deux opérateurs dialectaux $(A, \alpha), (A', \alpha')$ sont dits universellement équivalents si pour tout opérateur dialectal (B, β) , ils vérifient $\llbracket (A, \alpha), (B, \beta) \rrbracket = \llbracket (A', \alpha'), (B, \beta) \rrbracket$.

§10.2.9 LEMME (VARIANTS).

Soit (A, α) un opérateur dialectal dans $\mathbf{A}$, et $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ isomorphisme unital d'algèbres de von Neumann. Alors $((Id_{\mathfrak{R}_{0,1}} \otimes \varphi)(A), \alpha \circ \varphi^{-1})$ est universellement équivalent à (A, α) .

Démonstration. Soit (B, β) un opérateur dialectal. Comme $B^{\ddagger c} = (\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi)(B^{\ddagger \mathfrak{A}})$, que $\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi$ est un isomorphisme unitaire d'algèbres de von Neumann et que les isomorphismes entre algèbres stellaires sont isométriques (voir le Chapitre 3), on a :

$$\begin{aligned} \|[(\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi)(A)]^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger c}\| &= \|(\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi)(A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}})\| \\ &= \|A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}}\| \end{aligned}$$

De même, on montre aisément que pour tout entier k :

$$\|[(\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi)(A)]^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger c}\|^k = \|(A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}})^k\|$$

Par conséquent, comme $\text{rad}(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k\|^{\frac{1}{k}}$, on en déduit que :

$$\text{rad}([(\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi)(A)]^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger c}) = \text{rad}(A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}})$$

De plus, si $\text{rad}(A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}}) < 1$:

$$\begin{aligned} \text{ldet}(1 - [(\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi)(A)]^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger c}) &= \text{ldet}(1 - (\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi \otimes 1_{\mathfrak{B}})(A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}})) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{tr}([(\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi \otimes 1_{\mathfrak{B}})(A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}})]^k)}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{tr}((\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi \otimes 1_{\mathfrak{B}})(\frac{[A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}}]^k}{k})) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\text{tr}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes (\alpha \circ \varphi^{-1}) \otimes \beta)((\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi \otimes 1_{\mathfrak{B}})(\frac{[A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}}]^k}{k})) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\text{tr}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \alpha \otimes \beta)(\frac{[A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}}]^k}{k}) \\ &= \text{ldet}(1 - A^{\ddagger \mathfrak{B}} B^{\ddagger \mathfrak{A}}) \end{aligned}$$

Finalement, on a montré que $\llbracket ((\text{Id}_{\mathfrak{A}_{0,1}} \otimes \varphi)(A), \alpha \circ \varphi^{-1}), (B, \beta) \rrbracket = \llbracket (A, \alpha), (B, \beta) \rrbracket$. ⊙

§10.2.10 DÉFINITION.

Soit $(A, \alpha), (B, \beta)$ deux opérateurs dialectaux de supports $p + r, r + q$ et de dialectes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ tels que $\text{rad}(A, B) < 1$. L'exécution de A et B est définie comme l'opérateur dialectal $(A :: B, \alpha \otimes \beta)$ de support $p + q$ et de dialecte $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ où $A :: B$ est défini par :

$$A :: B = (pA^{\ddagger \mathfrak{B}} + q)(1 - B^{\ddagger \mathfrak{A}} A^{\ddagger \mathfrak{B}})^{-1}(p + B^{\ddagger \mathfrak{A}} q)$$

Lorsque $r = 0$, alors $B^{\ddagger \mathfrak{A}} A^{\ddagger \mathfrak{B}} = 0$, et on notera

$$A \cup B = A :: B = pA^{\ddagger \mathfrak{B}} p + qB^{\ddagger \mathfrak{A}} q = A^{\ddagger \mathfrak{B}} + B^{\ddagger \mathfrak{A}}$$

§10.2.11 COROLLAIRE (ADJONCTION, GIRARD [GIR07]).

Soit $(F, \phi), (G, \gamma), (H, \rho)$ des opérateurs dialectaux de supports respectifs p, q, r tels que $qr = 0$. Alors :

$$\llbracket F, G \cup H \rrbracket = \rho(1_{\mathfrak{H}}) \llbracket F, G \rrbracket + \llbracket H, F :: G \rrbracket$$

§10.2.12 DÉFINITION.

Si (A, α) et (B, β) sont des opérateurs dialectaux de même support p et de dialectes respectifs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, et $\lambda \in \mathbf{R}$ est un nombre réel, on peut définir $\lambda(A, \alpha) + (B, \beta)$ comme l'opérateur dialectal $(A + B, \lambda \alpha \oplus \beta)$ de support p et de dialecte $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$.

§10.2.13 DÉFINITION (PROJETS).

Un projet est un couple $a = (a, (A, \alpha))$ où (A, α) est un opérateur dialectal et $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ est la mise. On notera $a = a \cdot + \cdot \alpha + A$ les projets.

§10.2.14 DÉFINITION (VARIANTS).

Soit (A, α) , (B, β) des opérateurs dialectaux. S'il existe $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ un isomorphisme tel que $(B, \beta) = (\text{Id}_{\mathfrak{R}_{0,1}} \otimes \phi(A), \alpha \circ \phi^{-1})$, on dira que (B, β) est un variant de (A, α) .

§10.2.15 On peut alors construire les connecteurs multiplicatifs, les comportements et les connecteurs additifs en suivant les constructions du Chapitre 7. De plus, on peut utiliser la définition de l'exponentielle de la GdI5 (Chapitre 4, Section 4.2).

Vérité Subjective

§10.2.16 DÉFINITION (ANGLES).

Un *angle* est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{R}_{0,1}$.

§10.2.17 DÉFINITION (PROJET PROMETTEUR).

Un projet $a = a \cdot + \cdot \alpha + A$ est *prometteur sous l'angle* $\mathfrak{P}$ si :

- a est sans mise : $a = 0$;
- α est la trace normalisée sur $\mathfrak{A}$;
- A est une symétrie partielle : $A = A^* = A^3$;
- A est dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \Omega$, avec $\Omega \subset \mathfrak{A}$;
- pour toute projection $\pi \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}(\Omega)$, $\text{tr}(\pi A) = 0$.

§10.2.18 REMARQUE. Si a est un projet prometteur, on peut supposer que $\mathfrak{A}$ est un facteur. En effet, nous avons montré que si ϕ est un morphisme injectif de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, alors a^ϕ est universellement équivalent à a dans le sens où $\ll a, b \gg = \ll a^\phi, b \gg$ pour tout projet b . Donc, $a \in \mathbf{A}$ si et seulement si $a^\phi \in \mathbf{A}$.

§10.2.19 DÉFINITION.

Une conduite $\mathbf{A}$ est *correcte du point de vue de* $\mathfrak{A}$ s'il existe un projet $a \in \mathbf{A}$ prometteur sous l'angle $\mathfrak{A}$.

Il reste à vérifier que cette notion de projet prometteur satisfait les critères indispensables : la compositionnalité et la consistance. On aura besoin pour cela de trois lemmes.

§10.2.20 LEMME (PRODUITS D'ISOMÉTRIES PARTIELLES).

Soit u, v deux isométries partielles, toutes deux dans le groupoïde normalisant $G_{\mathfrak{R}_{0,1}}(\mathfrak{P})$ d'une sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}_{0,1}$. Alors uv est une isométrie partielle, et uv est dans $G_{\mathfrak{R}_{0,1}}(\mathfrak{P})$.

Démonstration. Puisque u et v sont dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P}$, on sait que $p = u^*u \in \mathfrak{P}$ et $q = vv^* \in \mathfrak{P}$. De plus, puisque $\mathfrak{P}$ est commutative, $pq = qp$. D'où :

$$(uv)(uv)^*(uv) = uvv^*u^*uv = uqp v = upqv = uu^*uvv^*v = uv$$

On a montré que $(uv)(uv)^*(uv) = uv$, et donc uv est bien une isométrie partielle. De plus, il est clair que les projections $uv(uv)^*$ et $(uv)^*uv$ sont dans $\mathfrak{P}$ et que $uv\mathfrak{P}(uv)^* \subset \mathfrak{P}$. ☉

§10.2.21 LEMME (SOMMES D'ISOMÉTRIES PARTIELLES).

Soit u, v deux isométries partielles, toutes deux dans le groupoïde normalisant $G_{\mathfrak{R}_{0,1}}(\mathfrak{P})$ d'une sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}_{0,1}$. Si $uv^* = u^*v = 0$, alors la somme $u + v$ est une isométrie partielle, et appartient à $G_{\mathfrak{R}_{0,1}}(\mathfrak{P})$.

Démonstration. On a $(uv^*)^* = vu^* = 0$, ce qui implique que $(u^*v)^* = v^*u = 0$. On obtient alors :

$$(u+v)(u+v)^*(u+v) = (u+v)(u^*+v^*)(u+v) = uu^*u + vv^*v = u + v$$

Cela signifie que $u + v$ est une isométrie partielle. Il reste à montrer qu'elle appartient au groupoïde normalisant de $\mathfrak{P}$. Les projections uu^*, u^*u, vv^*, v^*v sont toutes des éléments de $\mathfrak{P}$, et commutent donc les unes avec les autres. Si a est un élément de $\mathfrak{P}$:

$$(u+v)a(u+v)^* = uau^* + vav^*$$

Puisque u, v sont dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P}$, on en conclut que $(u + v)a(u + v)^*$ est la somme de deux éléments de $\mathfrak{P}$, qui est toujours un élément de $\mathfrak{P}$. Cela signifie que $(u + v)\mathfrak{P}(u + v)^* \subseteq \mathfrak{P}$.

Finalement, les projections $(u + v)(u + v)^* = uu^* + vv^*$ et $(u + v)^*(u + v) = u^*u + v^*v$ sont également dans $\mathfrak{P}$ car ce sont des sommes d'éléments de $\mathfrak{P}$. $\odot$

§10.2.22 LEMME (SEMI-DISTRIBUTIVITÉ).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ des conduites de supports deux à deux disjoints. Alors :

$$((\mathbf{A}^\perp \mathfrak{P} \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}^\perp) \subset (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}^\perp \mathfrak{P} \mathbf{C}))^\perp$$

Démonstration. On définit $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \{a \otimes b \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$ l'éthique du produit tensoriel, et on va montrer que $((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \odot \mathbf{C}) \subset (\mathbf{A} \multimap (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}))$. On pourra alors conclure en prenant la clôture par bi-orthogonalité.

On définit tout d'abord les projets :

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} &= (p + q, f, \phi, \mathfrak{F}, F) \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B} \\ \mathfrak{a} &= (p, a, \alpha, \mathfrak{A}, A) \in \mathbf{A} \\ \mathfrak{c} &= (s, c, \gamma, \mathfrak{C}, C) \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $(\mathfrak{f} \otimes \mathfrak{c}) :: \mathfrak{a} = (\mathfrak{f} :: \mathfrak{a}) \otimes \mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{f} \otimes \mathfrak{c} = (p + q + s, f\gamma(1_{\mathfrak{C}}) + \phi(1_{\mathfrak{F}})c, \phi \otimes \gamma, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C}, F^\dagger c + C^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})$$

On notera w la mise de $\mathfrak{f} \otimes \mathfrak{c}$, $\xi = \phi \otimes \gamma \otimes \alpha$ la pseudo-trace de $\mathfrak{X} = \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{A}$ et x la mise de $(\mathfrak{f} \otimes \mathfrak{c}) :: \mathfrak{a}$, c'est-à-dire $x = w\alpha(1_{\mathfrak{A}}) + \phi(1_{\mathfrak{F}})\gamma(1_{\mathfrak{C}})a + \text{ldet}(1 - (F^\dagger c + C^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})^\dagger \mathfrak{A}^{\ddagger_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C}}})$. Alors :

$$(\mathfrak{f} \otimes \mathfrak{c}) :: \mathfrak{a} = (q + s, x, \xi, \mathfrak{X}, (F^\dagger c + C^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})^\dagger \mathfrak{A}^{\ddagger_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C}}}) :: A^{\ddagger_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C}}}$$

Un simple calcul montre que modulo la commutativité du produit tensoriel sur les dialectes,

$$((F^\dagger c + C^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})^\dagger \mathfrak{A}) :: A^{\ddagger_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C}}} = (F^\dagger \mathfrak{A} :: A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})^\dagger c + C^{\ddagger_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C}}}$$

De plus, puisque $(F^\dagger c + C^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})^\dagger \mathfrak{A}^{\ddagger_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C}}} = (F^\dagger c)^\dagger \mathfrak{A}^{\ddagger_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{C}}}$, on a :

$$x = (\alpha(1_{\mathfrak{A}})f + \phi(1_{\mathfrak{F}})a + \text{ldet}(1 - F^{\dagger \mathfrak{A}} A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}))\gamma(1_{\mathfrak{C}}) + \alpha(1_{\mathfrak{A}})\phi(1_{\mathfrak{F}})c$$

On en déduit que $(\mathfrak{f} \otimes \mathfrak{c}) :: \mathfrak{a} \in \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}$ par le lemme §10.2.9 page 228, donc $\mathfrak{f} \in \mathbf{A} \multimap (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$, ce qui signifie que l'on a l'inclusion $((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \odot \mathbf{C}) \subset (\mathbf{A} \multimap (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}))$. $\odot$

§10.2.23 PROPOSITION.

Soit $\mathfrak{P}$ un angle. Deux conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ ne peuvent simultanément contenir un projet prometteur sous l'angle $\mathfrak{P}$.

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ sont des projets prometteurs dans $\mathbf{A}, \mathbf{A}^\perp$ respectivement.

On doit montrer que $\text{ldet}(1 - F^{\dagger \mathfrak{G}} G^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}) = 0$. Comme $\mathfrak{f} \perp \mathfrak{g}$, on a $\rho(F^{\dagger \mathfrak{G}} G^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}) < 1$. En d'autres termes :

$$\liminf \| (F^{\dagger \mathfrak{G}} G^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})^k \|^{1/k} < 1 \quad (10.1)$$

Soit $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{G}$ des sous-algèbres commutatives maximales telles que F et G soient dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ et $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ respectivement.

Puisque F et G sont des symétries partielles dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ et $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ respectivement, il est clair que $F^{\dagger \mathfrak{G}}$ et $G^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}$ sont encore des symétries partielles, et on peut montrer² qu'elles sont dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$. De plus, ce sont *a fortiori* des isométries partielles, et le lemme §10.2.20 nous assure que $F^{\dagger \mathfrak{G}} G^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}$ est une isométrie partielle appartenant au groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$. On peut

2. En utilisant le fait que l'unité d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$ est contenue dans toute sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$.

alors montrer aisément que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^k$ est une isométrie partielle. Puisque la norme d'une isométrie partielle est nécessairement égale à 0 ou 1, on a que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^k\| = 0$ ou $\|(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^k\| = 1$. On en déduit, en utilisant l'équation 10.1, qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\|(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^N\| = 0$, i.e. $(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^N = 0$. Finalement, cela montre que $F^\dagger \circ G^{\ddagger}$ est nilpotent, ce qui implique que $\text{ldet}(1 - F^\dagger \circ G^{\ddagger}) = 0$. $\odot$

§10.2.24 PROPOSITION (COMPOSITIONALITÉ).

Si $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $g \in \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ sont des projets prometteurs sous l'angle $\mathfrak{P}$, alors $f :: g$ est un projet prometteur sous l'angle $\mathfrak{P}$ dans $\mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$.

Démonstration. Soit $f = 0 \cdot + \cdot \phi + F$ et $g = 0 \cdot + \cdot \psi + G$ deux projets prometteur sous l'angle $\mathfrak{A}$, respectivement dans $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ de support $p + q$ et $\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ de support $q + r$. Soit $h = f :: g = \text{ldet}(1 - F^\dagger \circ G^{\ddagger}) \cdot + \cdot \phi \otimes \psi + F :: G$ le projet obtenu par la coupure de f et g .

– Dialecte

Il est clair que le dialecte $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}$ est un facteur fini et hyperfini, puisqu'il s'agit du produit tensoriel de deux copies $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ du facteur hyperfini de type II_1 .

– Diatrace

La trace $\phi \otimes \psi$ est bien entendu normalisée. En effet, puisque ϕ et ψ sont normalisées, il s'agit d'une simple vérification :

$$\phi \otimes \psi(1_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}}) = \phi \otimes \psi(1_{\mathfrak{F}} \otimes 1_{\mathfrak{G}}) = \phi(1_{\mathfrak{F}})\psi(1_{\mathfrak{G}}) = 1$$

– Mise

Pour montrer que la mise est nulle, on doit montrer que $\text{ldet}(1 - F^\dagger \circ G^{\ddagger}) = 0$. Il est clair que $(p, \infty, \phi, \mathfrak{F}, 0) \in \mathbf{A}$ et $(r, \infty, \psi, \mathfrak{G}, 0) \in \mathbf{C}^\perp$, et on a donc :

$$\begin{aligned} o_1 &= (p + q + r, \infty, \phi \otimes \psi, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}, F^\dagger \circ G^{\ddagger}) \in (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}^\perp \\ o_2 &= (p + q + r, \infty, \phi \otimes \psi, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}, G^{\ddagger}) \in \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de semi-distributivité §10.2.22, on obtient :

$$(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}^\perp = (\mathbf{A}^\perp \mathfrak{P} \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}^\perp \subset (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}^\perp \mathfrak{P} \mathbf{C}))^\perp = (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}))^\perp$$

ce qui signifie que $o_1 \perp o_2$, i.e. $\rho(F^\dagger \circ G^{\ddagger}) < 1$. En d'autres termes :

$$\liminf \|(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^k\|^{\frac{1}{k}} < 1 \quad (10.2)$$

Soit $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{G}$ des sous-algèbres commutatives maximales telles que F et G soient dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ respectivement. Puisque F et G sont des symétries partielles dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ respectivement, il est clair que $F^\dagger$ et $G^{\ddagger}$ sont encore des symétries partielles, et on peut montrer qu'elles sont dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$. De plus, ce sont des isométries partielles, et le lemme §10.2.20 nous assure que $F^\dagger \circ G^{\ddagger}$ est une isométrie partielle appartenant au groupoïde normalisant de $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$. On peut alors montrer aisément que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^k$ est une isométrie partielle. Puisque la norme d'une isométrie partielle est nécessairement égale à 0 ou 1, on a que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^k\| = 0$ ou $\|(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^k\| = 1$. On en déduit, en utilisant l'équation 10.2, qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\|(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^N\| = 0$, i.e. $(F^\dagger \circ G^{\ddagger})^N = 0$. Finalement, cela montre que $F^\dagger \circ G^{\ddagger}$ est nilpotent, ce qui implique que $\text{ldet}(1 - F^\dagger \circ G^{\ddagger}) = 0$.

– Opérateur

Dans la suite, on notera p, r les produits tensoriels $p \otimes 1_{\mathfrak{F}} \otimes 1_{\mathfrak{G}}$ et $r \otimes 1_{\mathfrak{F}} \otimes 1_{\mathfrak{G}}$. Nous faisons cet abus de notation afin de rendre les équations plus lisibles. Étant donné que

$F^\dagger \circ G^{\ddagger \mathfrak{F}}$ est nilpotent, on a :

$$\begin{aligned}
 F :: G &= (pF^\dagger + r)(1 - G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^{-1}(p + G^{\ddagger \mathfrak{F}} r) \\
 &= (pF^\dagger + r) \left(\sum_{k=0}^{N-1} (G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k \right) (p + G^{\ddagger \mathfrak{F}} r) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} pF^\dagger (G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k p + \sum_{k=1}^{N-1} r(G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k p \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-2} pF^\dagger (G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k G^{\ddagger \mathfrak{F}} r + \sum_{k=0}^{N-1} r(G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k G^{\ddagger \mathfrak{F}} r \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} pF^\dagger (G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k p + \sum_{k=0}^{N-1} r(G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k G^{\ddagger \mathfrak{F}} r \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} (r(G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k p + p(F^\dagger G^{\ddagger \mathfrak{F}})^k r)
 \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
 t_k &= F^\dagger (G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k \\
 t'_k &= (G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k G^{\ddagger \mathfrak{F}} \\
 s_k &= (G^{\ddagger \mathfrak{F}} F^\dagger)^k \\
 s'_k &= (F^\dagger G^{\ddagger \mathfrak{F}})^k
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que F, G sont des symétries partielles dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ et $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ respectivement et que $p, r \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$, on montre aisément que chacune des trois sommes (t_k, t'_k et $s_k + s'_k$ respectivement) sont des isométries partielles dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ (par le lemme §10.2.20) et sont de plus hermitiennes (puisque F et G le sont). Ces termes sont donc des symétries partielles dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$.

– On vient de montrer que $(pt_k p)^3 = pt_k p$, et on en déduit $(pt_k pt_k)^2 = pt_k pt_k$. Puisque $pt_k pt_k = (pt_k pt_k)^*$, on obtient, par composition par p sur la droite :

$$pt_k pt_k = t_k pt_k p \quad (10.3)$$

$$pt_k pt_k = pt_k pt_k p \quad (10.4)$$

– On montre de même que :

$$rt'_k rt_k = r t'_k r t'_k r \quad (10.5)$$

– On peut aussi calculer :

$$(ps'_k r + rs_k p)^3 = ps'_k rs_k ps'_k r + rs_k ps'_k rs_k$$

Puisque $(ps'_k r + rs_k p)^3 = ps'_k r + rs_k p$, en composant par p à gauche (resp. à droite) et r à droite (resp. à gauche), on obtient $ps'_k r = ps'_k rs_k ps'_k r$ (resp. $rs_k p = rs_k ps'_k rs_k$). On en déduit :

$$\begin{aligned}
 (rs_k ps'_k)^2 &= rs_k ps'_k \\
 (ps'_k rs_k)^2 &= ps'_k rs_k
 \end{aligned}$$

On peut alors montrer que :

$$\begin{aligned}
 rs_k ps'_k + ps'_k rs_k &= (rs_k ps'_k + ps'_k rs_k)^* \\
 &= (rs_k ps'_k)^* + (ps'_k rs_k)^* \\
 &= s_k ps'_k r + s'_k rs_k p
 \end{aligned}$$

En composant par p (resp. r) à droite, et en utilisant le fait que $Gp = 0$ (resp. $Fr = 0$), on a alors :

$$rs_k ps'_k r = rs_k ps'_k \quad (10.6)$$

$$ps'_k rs_k p = ps'_k rs_k \quad (10.7)$$

Par les équations 10.4, 10.5, 10.6 et 10.7, on peut montrer que le produit de deux termes distincts des sommes est nécessairement nul. Puisque $pr = rp = 0$, on a cinq cas à considérer :

– $(pt_i p)(pt_j p)$, avec $i \neq j$.

On peut supposer que $i < j$, puisque le cas $j < i$ se réduit à $i < j$ en prenant l'adjoint.

On a alors :

$$\begin{aligned} (pt_i p)(pt_j p) &= pt_i pt_j p \\ &= (pt_i p F^{\dagger \otimes} (G^{\ddagger \otimes} F^{\dagger \otimes})^j p \\ &= (pt_i pt_i) (G^{\ddagger \otimes} F^{\dagger \otimes})^{j-i} p \\ &= (pt_i pt_i p) s_{j-i} p \end{aligned}$$

Puisque $pG^{\ddagger \otimes} = 0$, on a $ps_{j-i} = 0$, et finalement $(pt_i p)(pt_j p) = 0$.

– $(rt'_i r)(rt'_j r)$, avec $i \neq j$.

Ce cas est similaire au cas précédent. On traite le cas $j < i$:

$$\begin{aligned} ((rt'_i r)(rt'_j r))^* &= (rt'_j r)(rt'_i r) \\ &= rt'_j rt'_i r \\ &= rt'_j r (G^{\ddagger \otimes} F^{\dagger \otimes})^i G^{\ddagger \otimes} r \\ &= (rt'_j rt'_j) (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^{i-j} r \\ &= (rt'_j rt'_j r) s'_{i-j} r \end{aligned}$$

Puisque $rF^{\dagger \otimes} = 0$, on a $rs'_{i-j} = 0$, et finalement $(rt'_i r)(rt'_j r) = 0$.

– $(pt_i p)(ps'_j r)$.

Si $j \leq i$, on a :

$$\begin{aligned} (pt_i p)(ps'_j r) &= pt_i ps'_j r \\ &= pt_{i-j} (s_j ps'_j r) \\ &= pt_{i-j} (rs_j ps'_j r) \end{aligned}$$

Si $i < j$, on a :

$$\begin{aligned} (pt_i p)(ps'_j r) &= pt_i ps'_j r \\ &= pF^{\dagger \otimes} (G^{\ddagger \otimes} F^{\dagger \otimes})^i p (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^j r \\ &= pF^{\dagger \otimes} (G^{\ddagger \otimes} F^{\dagger \otimes})^i p (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^i F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes} (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^{j-i-1} r \end{aligned}$$

Puisque $F^{\dagger \otimes}, G^{\ddagger \otimes}$ sont hermitiens, et dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$, et étant donné que r est dans $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$, on obtient que l'opérateur

$$F^{\dagger \otimes} (G^{\ddagger \otimes} F^{\dagger \otimes})^i p (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^i F^{\dagger \otimes}$$

est un élément de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$. Il commute alors avec p qui est également un élément de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$. Finalement :

$$\begin{aligned} (pt_i p)(ps'_j r) &= p (F^{\dagger \otimes} (G^{\ddagger \otimes} F^{\dagger \otimes})^i p (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^i F^{\dagger \otimes}) G^{\ddagger \otimes} (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^{j-i-1} r \\ &= (F^{\dagger \otimes} (G^{\ddagger \otimes} F^{\dagger \otimes})^i p (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^i F^{\dagger \otimes}) p G^{\ddagger \otimes} (F^{\dagger \otimes} G^{\ddagger \otimes})^{j-i-1} r \end{aligned}$$

Puisque $pG^{\ddagger \otimes} = 0$, on obtient que $(pt_i p)(ps'_j r) = 0$.

– $(rt'_i r)(rs_j p)$.

De même, on a, dans le cas $j \leq i$:

$$\begin{aligned} (rt'_i r)(rs_j p) &= rt'_i rs_j p \\ &= rG^{\dagger\mathfrak{F}} s'_i rs_j p \\ &= rG^{\dagger\mathfrak{F}} s'_{i-j} (s'_j rs_j p) \\ &= rG^{\dagger\mathfrak{F}} s'_{i-j} (ps'_j rs_j p) \end{aligned}$$

Si $i < j$, on a :

$$\begin{aligned} (rt'_i r)(rs_j p) &= rt'_i rs_j p \\ &= r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^i G^{\dagger\mathfrak{F}} r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^j p \\ &= rG^{\dagger\mathfrak{F}} (F^{\dagger\mathfrak{G}} G^{\dagger\mathfrak{F}})^i r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^i G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}} (G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^{j-i-1} p \end{aligned}$$

Puisque F, G sont hermitiens, dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$, et puisque r est dans $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$, on obtient que $G^{\dagger\mathfrak{F}} (F^{\dagger\mathfrak{G}} G^{\dagger\mathfrak{F}})^i r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^i G^{\dagger\mathfrak{F}}$ est un élément de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$. Il commute donc avec r puisque ce dernier est un élément de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$. Finalement :

$$\begin{aligned} (rt'_i r)(rs_j p) &= r(G^{\dagger\mathfrak{F}} (F^{\dagger\mathfrak{G}} G^{\dagger\mathfrak{F}})^i r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^i G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}} (G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^{j-i-1} p \\ &= (G^{\dagger\mathfrak{F}} (F^{\dagger\mathfrak{G}} G^{\dagger\mathfrak{F}})^i r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^i G^{\dagger\mathfrak{F}}) r F^{\dagger\mathfrak{G}} (G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^{j-i-1} p \end{aligned}$$

Puisque $rF^{\dagger\mathfrak{G}} = 0$, obtient que $(rt'_i r)(rs_j p) = 0$.

– $(rs_i p + ps'_i r)(rs_j p + ps'_j r)$, avec $i \neq j$.

On peut supposer que $i < j$ sans perte de généralité. On a alors :

$$\begin{aligned} (rs_i p + ps'_i r)(rs_j p + ps'_j r) &= rs_i ps'_j r + ps'_i rs_j p \\ &= (rs_i ps'_i) s'_{j-i} r + (ps'_i rs_i) s_{j-i} p \\ &= (rs_i ps'_i r) s'_{j-i} r + (ps'_i rs_i p) s_{j-i} p \end{aligned}$$

Puisque $rF = 0 = pG$, on obtient que $rs'_{j-i} = ps_{j-i} = 0$, et donc que $(rs_i p + ps'_i r)(rs_j p + ps'_j r) = 0$.

Finalement, on a montré que $F :: G$ est une somme de symétries partielles vérifiant les hypothèses du lemme §10.2.21. On en déduit donc que $F :: G$ est une symétrie partielle, et est dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$.

– Projections

Soit $\pi \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})$ est une projection. On peut alors calculer $\text{tr}(\pi A)$:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\pi F :: G) &= \text{tr}(\pi[(pF^{\dagger\mathfrak{G}} + r)(1 - G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^{-1}(p + G^{\dagger\mathfrak{F}} r)]) \\ &= \text{tr}(\pi[\sum_{k=0}^{N-1} pF^{\dagger\mathfrak{G}} (G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^k p]) + \text{tr}(\pi[\sum_{k=0}^{N-1} r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^k G^{\dagger\mathfrak{F}} r]) \\ &\quad + \text{tr}(\pi[\sum_{k=1}^{N-1} r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^k p]) + \text{tr}(\pi[\sum_{k=0}^{N-1} p(F^{\dagger\mathfrak{G}} G^{\dagger\mathfrak{F}})^k r]) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\pi[pF^{\dagger\mathfrak{G}} (G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^k p]) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\pi[r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^k G^{\dagger\mathfrak{F}} r]) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \text{tr}(\pi[r(G^{\dagger\mathfrak{F}} F^{\dagger\mathfrak{G}})^k p]) + \sum_{k=1}^{N-1} \text{tr}(\pi[p(F^{\dagger\mathfrak{G}} G^{\dagger\mathfrak{F}})^k r]) \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que $\text{tr}(\pi p t_k p) = \text{tr}(\pi r t'_k r) = 0$ pour tout $0 \leq k \leq N-1$, et $\text{tr}(\pi r s_k p) = \text{tr}(\pi p s'_k r) = 0$ pour $1 \leq k \leq N-1$.

3. Remarquons que $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})$ par le théorème §3.3.71.

- $\text{tr}(\pi p t_k p) = 0$ et $\text{tr}(\pi r t'_k r) = 0$

On suppose tout d'abord, sans perte de généralité, que $\pi p = \pi$, c'est-à-dire que π est une sous-projection de p . Alors :

$$\text{tr}(\pi p t_k p) = \begin{cases} \text{tr}(F^{\dagger\ominus} (G^{\dagger\ominus} F^{\dagger\ominus})^{\frac{k}{2}} \pi (F^{\dagger\ominus} G^{\dagger\ominus})^{\frac{k}{2}}) & \text{si } k \equiv 0[2] \\ \text{tr}(G^{\dagger\ominus} (F^{\dagger\ominus} G^{\dagger\ominus})^{\frac{k-1}{2}} (F^{\dagger\ominus} \pi F^{\dagger\ominus}) (G^{\dagger\ominus} F^{\dagger\ominus})^{\frac{k-1}{2}}) & \text{si } k \equiv 1[2] \end{cases}$$

Puisque $F^{\dagger\ominus}, G^{\dagger\ominus}$ sont dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$, on peut montrer que ce sont des éléments de $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{p+q+r} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}))$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{p+q+r} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}) &= \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{p+q+r}) \otimes \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}) \\ &\subset \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{p+q+r}) \otimes \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}})) \otimes \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})) \\ &\subset \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{p+q+r} \otimes \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})) \end{aligned}$$

Donc, puisque π est une projection de $\mathfrak{P}_{p+q+r} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})$, on en déduit que les termes $(G^{\dagger\ominus} F^{\dagger\ominus})^{\frac{k}{2}} \pi (F^{\dagger\ominus} G^{\dagger\ominus})^{\frac{k}{2}}$ et $(F^{\dagger\ominus} G^{\dagger\ominus})^{\frac{k-1}{2}} (F^{\dagger\ominus} \pi F^{\dagger\ominus}) (G^{\dagger\ominus} F^{\dagger\ominus})^{\frac{k-1}{2}}$ représentent des projections de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})$.

Finalement, puisque $\text{tr}(F v) = 0$ pour toute projection $v \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}})$, on peut montrer que $\text{tr}(F^{\dagger\ominus} \mu) = 0$ pour toute projection $\mu \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{R}$, et par conséquent pour toute projection dans $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})$. De même, $\text{tr}(G^{\dagger\ominus} \mu) = 0$ pour une telle projection, et on en conclue que $\text{tr}(\pi p t_k p) = 0$.

Le cas $\text{tr}(\pi r t'_k r) = 0$ est traité de manière similaire.

- $\text{tr}(\pi r s_k p) = 0$ et $\text{tr}(\pi p s'_k r) = 0$

Puisque $p = \bar{p} \otimes 1 \otimes 1$ et $\mathfrak{P}$ est commutative, p est dans le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})$ de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ et commute donc avec toute projection dans l'algèbre $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})$. De même, la projection r est dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})$ et commute donc avec toute projection dans $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}})$. Alors, étant donné que $pr = rp = 0$:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\pi r s_k p) &= \text{tr}(r \pi s_k p) = \text{tr}(p r \pi s_k) = 0 \\ \text{tr}(\pi p s'_k r) &= \text{tr}(p \pi s'_k r) = \text{tr}(r p \pi s'_k) = 0 \end{aligned}$$

Finalement, ce projet est sans mise, normalisé, l'opérateur $F :: G$ est une symétrie partielle dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$, et pour toute projection $\pi \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{P})$, on a $\text{tr}(\pi(F :: G)) = 0$. Il est donc prometteur sous l'angle $\mathfrak{P}$. ☺

Classification des MASAs et Logique Linéaire

MASAs singulières

§10.2.25 Dans cette partie, on montre que tout projet prometteur par rapport à un angle $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}_{0,1}$ singulier est trivial, dans le sens où son opérateur est égal à 0. On montre dans un premier temps deux lemmes. On notera $\mathfrak{R}_{0,1}$ le facteur hyperfini de type II_{∞} et par $\mathfrak{R}$ le facteur hyperfini de type II_1 . De plus, on écrira $\mathfrak{A}_p$ l'algèbre de von Neumann $p\mathfrak{A}p$ où p est une projection.

§10.2.26 LEMME.

Soit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ une sous-algèbre commutative maximale d'un facteur $\mathfrak{M}$, et soit p une projection dans $\mathfrak{A}$. Si $A \in \mathfrak{M}$ normalise $\mathfrak{A}$, et $Ap = pA$, alors A normalise $\mathfrak{A}_p$.

Démonstration. On choisit x dans $\mathfrak{A}_p \subset \mathfrak{A}$. Alors $AxA^* = y \in \mathfrak{A}$ puisque A normalise $\mathfrak{A}$. De plus, $yp = AxA^*p = Ax(pA)^* = Ax(Ap)^* = AxpA^* = AxA^* = y$, et on montre de même que $py = y$. D'où $y = pyp$ et $y \in \mathfrak{A}_p$. ☺

§10.2.27 REMARQUE. Ce résultat implique que $pGN_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})p \subset GN_{\mathfrak{M}_p}(\mathfrak{A}_p)$.

§10.2.28 Le lemme suivant est particulièrement important puisqu'il nous permettra de nous ramener au cas des facteurs de II_1 , et donc d'utiliser le résultat de Chifan (Théorème §3.3.71). Le fait que $\mathfrak{A}$ soit abélienne est nécessaire ici. En effet, il est même possible de trouver des contre-exemples en dimension infinie dans le cas où $\mathfrak{A}$ n'est pas nécessairement commutative. Par exemple, le sous-facteur $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ est singulier : $\mathfrak{N}_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Si l'on prend la projection $p = 0 \oplus 1 \oplus 1$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, on obtient que $\mathfrak{A}_p$ n'est pas singulier dans $(\mathfrak{M}_3(\mathbb{C}))_p$ — c'est même une sous-algèbre régulière — puisque $\mathfrak{N}_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})}(\mathfrak{A}_p) = \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

§10.2.29 LEMME.

Soit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ une sous-algèbre commutative maximale d'un facteur $\mathfrak{M}$, et p une projection dans $\mathfrak{A}$. Alors $\mathfrak{A}_p$ est une sous-algèbre commutative maximale dans $\mathfrak{M}_p$. De plus, si $\mathfrak{A}$ est singulière, $\mathfrak{A}_p$ est également singulière.

Démonstration. Soit v un élément de $(\mathfrak{A}_p)'$, le commutant de $\mathfrak{A}_p$ dans $\mathfrak{M}_p$, et soit $a \in \mathfrak{A}$. On a $pa = pap$ et $(1-p)a = (1-p)a(1-p)$ puisque p et $(1-p)$ sont des éléments de $\mathfrak{A}$ — qui est commutative. En utilisant le fait que $vp = pv = v$, on obtient :

$$\begin{aligned} va &= v(pa + (1-p)a) \\ &= vpa + v(1-p)a \\ &= vpap \\ &= papv \\ &= av \end{aligned}$$

Par conséquent, $(\mathfrak{A}_p)' \subset (\mathfrak{A}')_p = \mathfrak{A}_p$ de par la maximalité de $\mathfrak{A}$. Cela nous donne que $(\mathfrak{A}_p)' \subset \mathfrak{A}_p$, i.e. $\mathfrak{A}_p$ est commutative maximale.

Supposons que $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre singulière. Choisissons $u \in N_{\mathfrak{M}_p}(\mathfrak{A}_p)$. Par définition u est un unitaire de $\mathfrak{M}_p$, c'est-à-dire $uu^* = u^*u = p$, et donc $up = pu = u$. Définissons $v = u + (1-p)$, un élément de $\mathfrak{M}$. Alors, étant donné que $p(1-p) = 0$, v est un unitaire : $vv^* = (u + (1-p))(u^* + (1-p)) = uu^* + (1-p) = 1 = v^*v$, et $pvp = u$.

Prenons maintenant $x \in \mathfrak{A}$. Puisque x et $1-p$ sont des éléments de $\mathfrak{A}$ et que $\mathfrak{A}$ est commutative, $ux(1-p) = u(1-p)x = up(1-p)x = 0$. De même, on montre que $(1-p)xu = 0$. Cela implique que $v xv^* = uxu^* + (1-p)x(1-p)$. Or, puisque u normalise $\mathfrak{A}$, $uxu^* = upxpu^*$ est un élément y de $\mathfrak{A}$. De plus, étant donné que $1-p$ est dans $\mathfrak{A}$, l'élément $(1-p)x(1-p)$ est également un élément de $\mathfrak{A}$. Finalement, $v xv^*$ est un élément de $\mathfrak{A}$ et $v \in N_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})$. D'où $u \in pN_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A})p$. Mais $N_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ est singulière), et donc $u \in \mathfrak{A}_p$.

Puisque $N_{\mathfrak{M}_p}(\mathfrak{A}_p) \subset \mathfrak{A}_p$ on obtient que $\mathfrak{N}_{\mathfrak{M}_p}(\mathfrak{A}_p) = \mathfrak{A}_p$. ☺

§10.2.30 THÉORÈME (ANGLES SINGULIERS ET CORRECTION).

Si $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}_{0,1}$ est singulière, alors tout projet prometteur sous l'angle $\mathfrak{P}$ est trivial.

Démonstration. Soit $\alpha = (p, 0, \mathfrak{R}, tr, A)$ un projet prometteur sous l'angle $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}_{0,1}$.

On souhaite montrer que $A \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{R}$. Puisque A est un élément de $(\mathfrak{R}_{0,1})_p \otimes \mathfrak{R}$, on sait que $A\bar{p} = \bar{p}A = A$ où $\bar{p}$ représente la projection $p \otimes 1$. Puisque A est dans le groupoïde normalisant $GN_{\mathfrak{R}_{0,1} \otimes \mathfrak{R}}(\mathfrak{P} \otimes \Omega)$, il est également dans $GN_{(\mathfrak{R}_{0,1})_p \otimes \mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_p \otimes \Omega)$ par le lemme §10.2.26, et il est donc dans l'algèbre $\mathfrak{N}_{(\mathfrak{R}_{0,1})_p \otimes \mathfrak{R}}(\mathfrak{P}_p \otimes \Omega)$ par le théorème §3.3.68. En utilisant maintenant le Théorème §3.3.71, on a $A \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}_{0,1}}(\mathfrak{P}_p) \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\Omega)$. Finalement, puisque $\mathfrak{P}$ est singulière dans $\mathfrak{R}_{0,1}$, $\mathfrak{P}_p$ est singulière dans $(\mathfrak{R}_{0,1})_p$ par le Lemme §10.2.29. Ceci montre que $A \in \mathfrak{P}_p \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\Omega)$. Le fait que A soit prometteur par rapport à $\mathfrak{P}$ implique également que pour toutes projections $\pi \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\Omega)$, on a $tr(\pi A) = 0$. Puisque les projections dans $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\Omega)$ engendrent tous les éléments de $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\Omega)$, et par la continuité de la trace, on en déduit que pour tout élément $B \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\Omega)$, $tr(BA) = 0$.

Puisque $A^3 = A = A^*$, $A^2 = r$ est une projection, avec $rA = Ar = A$. On peut alors conclure, étant donné que $A \in \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}}(\Omega)$, que $tr(A^2) = 0$, c'est-à-dire $A^2 = 0$ et donc $A = A^3 = 0$. ☺

§10.2.31 REMARQUE. Sans la condition additionnelle dans la définition du gain, il serait facile de trouver des projets non triviaux gagnants par rapport à un point de vue singulier $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}_{0,1}$. En

effet, soient p, q deux projections dans $\mathfrak{P}$. Alors le projet $a = (p + q, 0, 1, \mathbf{C}, p + q)$ est clairement prometteur par rapport à $\mathfrak{P}$ si l'on oublie la condition additionnelle.

On pourrait également penser que cette condition peut être affaiblie, en demandant par exemple que la trace de A soit nulle. Cette condition ne serait cependant pas suffisante, puisque pour toutes projections $p, q \in \mathfrak{P}$ telles que $\text{tr}(p) = \text{tr}(q)$, le projet b défini par $(p + q, 0, 1, \mathbf{C}, p - q)$ satisfait toutes les conditions de gain excepté la condition additionnelle, et vérifie de plus $\text{tr}(p - q) = \text{tr}(p) - \text{tr}(q) = 0$.

Une dernière possibilité serait de remplacer la condition additionnelle par la condition suivante : pour toutes projections $\pi \in \mathfrak{P} \otimes \Omega$, $\text{tr}(\pi A) = 0$. Cependant, le projet suivant serait alors prometteur par rapport à $\mathfrak{P}$ lorsque $p, q \in \mathfrak{P}$ sont des projections :

$$c = (p + q, 0, \text{tr}, \mathfrak{M}_2(\mathbf{C}), \begin{pmatrix} 0 & (p + q)_{\otimes 1_{\mathfrak{P}}} \\ (p + q)_{\otimes 1_{\mathfrak{P}}} & 0 \end{pmatrix})$$

MASAs non-singulières

Dans cette section, on considèrera que le point de vue $\mathfrak{P}$ est une sous-algèbre commutative maximale non-singulière $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}_{0,1}$ fixée une fois pour toutes. Nous allons montrer que toute preuve du calcul des séquents $\text{MALL}_{\mathbf{T},0}$ (voir la définition au Chapitre 7) peut être interprétée par un projet prometteur par rapport à $\mathfrak{P}$.

Syntaxe de MALL

§10.2.32 DÉFINITION (DÉLOCALISATION).

Soit p, q des projections dans $\mathfrak{P}$. Une *délocalisation* de p sur q est une isométrie partielle $\theta : p \rightarrow q$ telle que $\theta \in GN_{\mathfrak{R}_{0,1}}(\mathfrak{P})$.

§10.2.33 On va en réalité travailler avec la sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathfrak{R}_{0,1})$ afin d'avoir un *espace primitif* (la première composante de la somme $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P}$) ainsi qu'un *espace d'interprétation* (la seconde composante de la somme). Les interprétations des preuves et formules seront des éléments de l'espace d'interprétation, tandis que l'espace primitif nous servira uniquement à définir correctement la syntaxe. La proposition suivante montre que, puisque les interprétations seront des projets définis dans la seconde composante de la somme $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P}$, le fait qu'ils soient promoteurs par rapport à $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathfrak{R}_{0,1})$ implique qu'ils sont promoteurs par rapport à $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{R}_{0,1}$.

§10.2.34 PROPOSITION (RESTRICTION DE GAIN).

Soit $a = (p, 0, \text{tr}, \mathfrak{R}, A)$ un projet prometteur par rapport à $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}_2(\mathfrak{R}_{0,1})$, tel que $p \leq 0 \oplus 1$. Alors $A(0 \oplus 1) = (0 \oplus 1)A = A$, et a est un projet prometteur par rapport à $\mathfrak{P} \subset (\mathfrak{M}_2(\mathfrak{R}_{0,1}))_{0 \oplus 1} \simeq \mathfrak{R}_{0,1}$.

Démonstration. Il est clair que $\mathfrak{P}$ est une sous-algèbre commutative maximale dans l'algèbre $(\mathfrak{M}_2(\mathfrak{R}_{0,1}))_{0 \oplus 1}$, est le résultat est une simple conséquence du Lemme §10.2.26 page 236. ☺

§10.2.35 On définit maintenant les variables. On choisit tout d'abord une famille de projections deux à deux disjointes $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbf{Q}_+^* \times \mathbf{N}}$, telles que $p_{i,j} \in \mathfrak{P}$ et $\text{tr}(p_{i,j}) = i$. Les projections $p_{i,j} \oplus 0$ seront les *lieux primitifs* des variables, et cette famille de projections est en quelque sorte notre ensemble de variables.

§10.2.36 DÉFINITION (NOMS DE VARIABLE ET VARIABLES).

Un *nom de variable* est un couple $(i, j) \in \mathbf{Q}_+^* \times \mathbf{N}$ que nous noterons par des lettres capitales $X, Y, Z, \dots$. L'entier i est appelé la *taille* du nom de variable.

Une *variable* est un couple $X_\theta = (X = (i, j), \theta)$, où θ est une délocalisation de $p_{i,j} \oplus 0$ sur une projection $0 \oplus q_{X_\theta}$ (nécessairement de trace égale à i). La projection $0 \oplus q_{X_\theta}$ est appelée le *lieu* de la variable, et on se permettra par moments d'oublier la première composante de la somme en écrivant simplement q_{X_θ} .

§10.2.37 REMARQUE. Notons que la définition même des variables présuppose que $\mathfrak{P}$ est non-singulier — ce qui implique que $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P}$ est non-singulier dans $\mathfrak{M}_2(\mathfrak{A}_{0,1})$, puisque nous avons besoin de cette hypothèse pour être certain, par le Théorème §3.3.70, de l'existence d'isométries partielles dans $GN_{\mathfrak{M}_2(\mathfrak{A}_{0,1})}(\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{P})$ de $p_{i,j}$ sur q_{X_θ} . Ces délocalisations vont nous permettre de définir l'interprétation de la règle axiome ainsi que l'interprétation du $\&$, et on peut alors voir que le Théorème §3.3.70 est la clef de voûte de la construction de l'interprétation des preuves.

Interprétation des formules

On définit maintenant l'interprétation des formules.

§10.2.38 DÉFINITION (BASE D'INTERPRÉTATION).

Une *base d'interprétation* est une fonction δ qui associe à chaque nom de variable $X = (i, j)$ un comportement $\delta(X)$ sur le lieu primitif $p_{i,j}$ de X . Cette fonction s'étend à une unique fonction $\tilde{\delta}$ qui à toute variable X_θ associe un comportement $\tilde{\delta}(X_\theta) = \theta(\delta(X))$ de support q_{X_θ} — le lieu de X_θ . On nommera abusivement cette extension une *base d'interprétation*.

§10.2.39 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES FORMULES).

L'interprétation $\|F\|_\delta$ d'une formule F selon la base d'interprétation δ est définie inductivement :

- $F = X_\theta$
On définit $\|F\|_\delta$ comme le comportement $\tilde{\delta}(X_\theta)$ de support q_{X_θ} ;
- $F = X_\theta^\perp$
On définit $\|F\|_\delta = (\|X_\theta\|_\delta)^\perp$, un comportement de support q_{X_θ} ;
- $F = A \star B$ ($\star \in \{\otimes, \wp, \&, \oplus\}$)
On définit $\|F\|_\delta = \|A\|_\delta \star \|B\|_\delta$, un comportement de support $p + q$, où p et q sont les supports respectifs de $\|A\|_\delta$ et $\|B\|_\delta$;
- $F = \mathbf{T}$ (resp. $F = \mathbf{0}$)
On définit $\|F\|_\delta = \mathbf{T}_0$ (resp. $\mathbf{0}_0$).

§10.2.40 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES SÉQUENTS).

Un séquent $\vdash \Gamma$ sera interprété comme le $\wp$ des formules de Γ , noté $\wp \Gamma$.

Interprétation des preuves

§10.2.41 La règle d'introduction du $\wp$ ainsi que la règle d'échange ont une interprétation triviale, puisque les séquents prémisses et conclusion sont interprétés par le même comportement (du fait de la locativité, de la commutativité du $\wp$ et la neutralité de $\perp$). De même, les règles pour $\oplus$ sont évidentes, puisqu'il suffit d'étendre le support du projet interprétant les prémisses pour obtenir le projet interprétant la conclusion. De plus, la règle $\top_p$ est évidemment interprétée par le projet $(0, 0, 1_C, C, 0)$. Concernant les axiomes, ceux-ci seront interprétés naturellement par des délocalisations. Le cas de la coupure ayant déjà été traité §10.2.24, il nous reste donc à définir l'interprétation des règles d'introduction de $\otimes$ et de $\&$.

§10.2.42 Étant donnés deux projets f et g dans les interprétations des deux prémisses d'une règle $\otimes$, nous devons définir un projet h qui sera dans l'interprétation de la conclusion. L'opération qui vient naturellement à l'esprit est de définir ce projet comme le tenseur des deux projets f et g . Il s'avère que cette interprétation de la règle $\otimes$ fonctionne parfaitement : la proposition suivante montre que h définit comme $f \otimes g$ est un projet dans l'interprétation du séquent conclusion.

§10.2.43 PROPOSITION (INTERPRÉTATION DE LA RÈGLE TENSEUR).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ des conduites de supports respectifs p_A, p_B, p_C, p_D . On a l'inclusion :

$$((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} \multimap \mathbf{D})) \subset ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}))$$

Démonstration. On montre que $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$ contient la conduite $(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} \multimap \mathbf{D})$, quelque soit les conduites $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.

On notera p_A, p_B, p_C et p_D les supports des conduites $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Soit $f \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $g \in \mathbf{C} \multimap \mathbf{D}$ les deux projets :

$$\begin{aligned} f &= (p_A + p_B, f, \phi, \mathfrak{F}, F) \\ g &= (p_C + p_D, g, \psi, \mathfrak{G}, G) \end{aligned}$$

On veut montrer que, pour tout projets $a = (p_A, \alpha, \mathfrak{A}, A)$ et $c = (p_C, c, \gamma, \mathfrak{C}, C)$ dans $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ respectivement, le résultat de l'application $(f \otimes g) :: (a \otimes c)$ est bien un élément de la conduite $\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}$.

On a :

$$(f \otimes g) :: (a \otimes c) = (p_B + p_D, w, \nu, \mathfrak{N}, P)$$

où

$$\begin{aligned} w &= \phi \otimes \psi (1_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}})(\alpha \gamma (1_{\mathfrak{C}}) + c \alpha (1_{\mathfrak{A}})) \\ &\quad + \alpha \otimes \gamma (1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}})(f \psi (1_{\mathfrak{G}}) + g \phi (1_{\mathfrak{F}})) \\ &\quad + \text{ldet}(1 - (F^{\dagger \mathfrak{G}} + G^{\ddagger \mathfrak{F}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} (A^{\dagger \mathfrak{C}} + C^{\ddagger \mathfrak{A}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}}) \\ \nu &= \phi \otimes \psi \otimes \alpha \otimes \gamma \\ \mathfrak{N} &= \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C} \\ P &= (F^{\dagger \mathfrak{G}} + G^{\ddagger \mathfrak{F}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} :: (A^{\dagger \mathfrak{C}} + C^{\ddagger \mathfrak{A}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}} \end{aligned}$$

On va alors montrer que ce projet est un variant du projet $(f :: a) \otimes (g :: c)$. On pourra donc en conclure que $(f \otimes g) :: (a \otimes c) \in (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$ par le Lemme §10.2.9.

- Il est clair que $\mathfrak{N}$ est égal au dialecte de $(f :: a) \otimes (g :: c)$ à un isomorphisme de commutativité près. En effet, le dialecte de $(f :: a) \otimes (g :: c)$ est égal à $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{C}$ et le morphisme $\phi = \text{Id}_{\mathfrak{F}} \otimes \tau \otimes \text{Id}_{\mathfrak{C}}$ est un isomorphisme entre cette algèbre et $\mathfrak{N}$;
- Il est de même clair que ν est égal à $\mu \circ \phi^{-1}$ où μ est la pseudo-trace du projet $(f :: a) \otimes (g :: c)$;
- Puisque F et A sont des éléments de $(\mathfrak{N}_{0,1})_{p_A + p_B}$ et G et C sont des éléments de $(\mathfrak{N}_{0,1})_{p_C + p_D}$, on déduit du fait que toutes les projections sont deux à deux disjointes que :

$$P = (F^{\dagger \mathfrak{G}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} :: (A^{\dagger \mathfrak{C}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}} + (G^{\ddagger \mathfrak{F}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} :: (C^{\ddagger \mathfrak{A}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}}$$

Une fois de plus ceci est égal, modulo ϕ , à l'opérateur du projet $(f :: a) \otimes (g :: c)$:

$$(F^{\dagger \mathfrak{A}} :: A^{\dagger \mathfrak{F}})^{\dagger \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{G}} + (G^{\dagger \mathfrak{C}} :: C^{\dagger \mathfrak{G}})^{\ddagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{F}}$$

- En utilisant le fait que $\phi \otimes \psi (1_{\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}}) = \phi \otimes \psi (1_{\mathfrak{F}} \otimes 1_{\mathfrak{G}}) = \phi (1_{\mathfrak{F}}) \psi (1_{\mathfrak{G}})$ et que $\alpha \otimes \gamma (1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}}) = \alpha (1_{\mathfrak{A}}) \gamma (1_{\mathfrak{C}})$, on obtient :

$$\begin{aligned} w &= \gamma (1_{\mathfrak{C}}) \psi (1_{\mathfrak{G}}) (\alpha \phi (1_{\mathfrak{F}}) + f \alpha (1_{\mathfrak{A}})) \\ &\quad + \alpha (1_{\mathfrak{A}}) \phi (1_{\mathfrak{F}}) (c \psi (1_{\mathfrak{G}}) + g \gamma (1_{\mathfrak{C}})) \\ &\quad + \text{ldet}(1 - (F^{\dagger \mathfrak{G}} + G^{\ddagger \mathfrak{F}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} (A^{\dagger \mathfrak{C}} + C^{\ddagger \mathfrak{A}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}}) \end{aligned}$$

De plus, comme $AG = 0$ le Lemme §10.2.6 nous permet d'obtenir que :

$$\begin{aligned} &\text{ldet}(1 - (F^{\dagger \mathfrak{G}} + G^{\ddagger \mathfrak{F}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} (A^{\dagger \mathfrak{C}} + C^{\ddagger \mathfrak{A}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}}) \\ &= \text{ldet}(1 - ((F^{\dagger \mathfrak{G}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} (A^{\dagger \mathfrak{C}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}} + (G^{\ddagger \mathfrak{F}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} (C^{\ddagger \mathfrak{A}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}})) \\ &= \text{ldet}(1 - (F^{\dagger \mathfrak{G}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} (A^{\dagger \mathfrak{C}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}}) + \text{ldet}(1 - (G^{\ddagger \mathfrak{F}})^{\dagger \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}} (C^{\ddagger \mathfrak{A}})^{\ddagger \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}}) \\ &= \gamma (1_{\mathfrak{C}}) \psi (1_{\mathfrak{G}}) \text{ldet}(1 - F^{\dagger \mathfrak{A}} A^{\dagger \mathfrak{F}}) + \alpha (1_{\mathfrak{A}}) \phi (1_{\mathfrak{F}}) \text{ldet}(1 - G^{\ddagger \mathfrak{C}} C^{\ddagger \mathfrak{G}}) \end{aligned}$$

qui nous permet de déduire finalement que :

$$\begin{aligned} w &= \gamma (1_{\mathfrak{C}}) \psi (1_{\mathfrak{G}}) [\alpha \phi (1_{\mathfrak{F}}) + f \alpha (1_{\mathfrak{A}}) + \text{ldet}(1 - F^{\dagger \mathfrak{A}} A^{\dagger \mathfrak{F}})] \\ &\quad + \alpha (1_{\mathfrak{A}}) \phi (1_{\mathfrak{F}}) [c \psi (1_{\mathfrak{G}}) + g \gamma (1_{\mathfrak{C}}) + \text{ldet}(1 - G^{\ddagger \mathfrak{C}} C^{\ddagger \mathfrak{G}})] \end{aligned}$$

qui est la mise du projet $(f :: a) \otimes (g :: c)$.

On en déduit que pour tout f, g, a, c , on a $(f \otimes g) : (a \otimes c) \in (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$ par le Lemme §10.2.9 page 228. Finalement, on a bien montré que $(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} \multimap \mathbf{D}) \subset (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$. ☺

§10.2.44 Nous devons maintenant interpréter la règle $\&$. Nous allons pour cela interpréter une preuve se terminant par une règle $\&$ comme la somme des projets f_{p+q} et g_{p+q} , où f et g — de supports respectifs p et q — sont les interprétations des sous-preuves dont les conclusions sont les prémisses. Afin de pouvoir effectuer cette opération, nous devons dans un premier temps délocaliser les prémisses puisque les lieux des contextes ne sont pas disjoints. Une fois cette délocalisation effectuée, on peut former le projet h défini comme $\theta_1(f) \& \theta_2(g)$ — où θ_1 et θ_2 sont des délocalisations. Il faut alors appliquer le projet implémentant la distributivité afin de superposer les contextes.

§10.2.45 PROPOSITION (INTERPRÉTATION DE LA RÈGLE $\&$).

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ des comportements de supports respectifs p_A, p_B, p_C disjoints deux à deux, et soit $\phi(\mathbf{A})$ une délocalisation de $\mathbf{A}$ de support une projection disjointe des supports de $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Alors pour toutes délocalisations⁴ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dans $GN_{\mathfrak{R}_{0,1}}(\mathfrak{P})$, il existe un projet $\mathfrak{With}$ dans le comportement :

$$((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \& (\phi(\mathbf{A}) \multimap \mathbf{C})) \multimap (\theta_1(\mathbf{A}) \multimap (\theta_2(\mathbf{B}) \& \theta_3(\mathbf{D})))$$

De plus, $\mathfrak{With}$ est prometteur sous l'angle $\mathfrak{P}$.

Démonstration. On choisit $p'_A \sim_{\Pi} p_A$, $p''_A \sim_{\Pi} p_A$, $p'_B \sim_{\Pi} p_B$ et $p'_C \sim_{\Pi} p_C$ des projections deux à deux disjointes et disjointes des supports de $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Alors comme $\mathfrak{P}$ est un angle semi-régulier ou régulier il existe des isométries partielles ϕ, θ_1, θ_2 et θ_3 dans le groupoïde normalisant de $GN_{\mathfrak{R}_{0,1}}(\mathfrak{P})$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \phi & : & p_A \rightarrow p'_A \\ \theta_1 & : & p_A \rightarrow p''_A \\ \theta_2 & : & p_B \rightarrow p'_B \\ \theta_3 & : & p_C \rightarrow p'_C \end{array} \right.$$

On note $p = p_A + p_B + p'_A + p_C$ et $p' = p''_A + p'_B + p'_C$, et on définit $\mathfrak{k} = (p + p', 0, \kappa, \mathfrak{K}, K)$ où :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1_{\mathbf{C}} \oplus 1_{\mathbf{C}}}{2} \\ \mathfrak{K} &= \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \\ K &= (\theta_1 + \theta_1^* + \theta_2 + \theta_2^*) \oplus (\theta_1 \phi^* + \phi \theta_1^* + \theta_3 + \theta_3^*) \end{aligned}$$

On va montrer que le projet $\mathfrak{k}$ prometteur sous l'angle $\mathfrak{P}$ et dans le comportement :

$$((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \& (\phi(\mathbf{A}) \multimap \mathbf{C})) \multimap (\theta_1(\mathbf{A}) \multimap (\theta_2(\mathbf{B}) \& \theta_3(\mathbf{C})))$$

On commence par montrer qu'il s'agit bien d'un élément de ce comportement, et on montrera dans un second temps qu'il est prometteur sous l'angle $\mathfrak{P}$. On notera $q = p_A + p_B$ et $r = p'_A + p_C$.

– Soit $f \in \mathbf{A} \& \mathbf{B}$:

$$f = (q + r, 0, \phi \oplus \gamma, \mathfrak{F}, F)$$

On peut alors calculer $\mathfrak{k} :: f$:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{k} :: f = (p', w, \xi, \mathfrak{W}, W)$$

où :

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \xi &= \frac{1 \oplus 1}{2} \otimes \phi \equiv \frac{\phi \oplus \phi}{2} \\ \mathfrak{W} &= (\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}) \otimes \mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F} \end{aligned}$$

4. Il faut bien entendu supposer que les supports sont deux à deux disjoints.

et

$$\begin{aligned} W &= K^{\dagger_{\mathfrak{F}}} :: F^{\ddagger_{\mathfrak{R}}} \\ &= (\theta_1 + \theta_1^* + \theta_2 + \theta_2^*)^{\dagger_{\mathfrak{F}}} F^{\ddagger_{\mathfrak{R}}} (\theta_1 + \theta_1^* + \theta_2 + \theta_2^*)^{\dagger_{\mathfrak{F}}} \\ &\quad \oplus (\theta_1 \phi^* + \phi \theta_1^* + \theta_3 + \theta_3^*)^{\dagger_{\mathfrak{F}}} F^{\ddagger_{\mathfrak{R}}} (\theta_1 \phi^* + \phi \theta_1^* + \theta_3 + \theta_3^*)^{\dagger_{\mathfrak{F}}} \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que (voir la preuve de la Proposition §7.1.41) :

$$(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \& (\phi(\mathbf{A}) \multimap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \multimap (\mathbf{1}_{\mathbf{r}} \multimap \mathbf{B})) \cap (\phi(\mathbf{A}) \multimap (\mathbf{1}_{\mathbf{q}} \multimap \mathbf{C})) \quad (10.8)$$

On notera également W_1 (resp. W_2) la première (resp. la seconde) composante de W ; c'est-à-dire que l'on a $W = W_1 \oplus W_2$.

La preuve est alors similaire à celle de la Proposition §7.1.41 : on choisit un élément $\mathfrak{w} :: \mathfrak{a} \in \theta_1(\mathbf{A})$ et on montre que $\mathfrak{w} :: \mathfrak{a} \in \theta_2(\mathbf{B}) \& \theta_3(\mathbf{C})$. On considère donc $\mathfrak{w} :: \mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{w} :: \mathfrak{a} = (p'_B + p'_C, m, (\phi \otimes \alpha) \oplus (\phi \otimes \alpha), \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{A}, W_1^{\dagger_{\mathfrak{A}}} :: A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}} \oplus W_2^{\dagger_{\mathfrak{A}}} :: A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})$$

où la mise m est calculée ainsi :

$$\begin{aligned} m &= \text{ldet}(1 - (W_1 \oplus W_2)^{\dagger_{\mathfrak{A}}} A^{\ddagger_{\mathfrak{F}} \oplus \mathfrak{F}}) \\ &= \text{ldet}(1 - W_1^{\dagger_{\mathfrak{A}}} A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}} \oplus W_2^{\dagger_{\mathfrak{A}}} A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}) \\ &= \text{ldet}(1 - W_1^{\dagger_{\mathfrak{A}}} A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}) + \text{ldet}(1 - W_2^{\dagger_{\mathfrak{A}}} A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}) \end{aligned}$$

On peut alors montrer que W_1 est un élément de $\theta_1(\mathbf{A}) \multimap \theta_2(\mathbf{B})$ en utilisant l'égalité de conduites 10.8. Donc $\text{ldet}(1 - W_1^{\dagger_{\mathfrak{A}}} A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}})$ est nul puisque c'est la mise d'un élément de $\theta_2(\mathbf{B})$. De plus, l'opérateur $B = W_1^{\dagger_{\mathfrak{A}}} :: A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}$ définit un élément de $\theta_2(\mathbf{B})$: $\mathfrak{b} = (p'_B, 0, \phi \otimes \alpha, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{A}, B) \in \theta_2(\mathbf{B})$.

Un raisonnement similaire permet de montrer que $\mathfrak{c} = (p'_C, 0, \phi \otimes \alpha, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{A}, W_2^{\dagger_{\mathfrak{A}}} :: A^{\ddagger_{\mathfrak{F}}}) \in \theta_3(\mathbf{C})$. On a donc $\mathfrak{w} :: \mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \in \theta_2(\mathbf{B}) \& \theta_3(\mathbf{C})$, et on a donc montré que $\mathfrak{t}$ est bien un élément du comportement $((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \& (\phi(\mathbf{A}) \multimap \mathbf{C})) \multimap (\theta_1(\mathbf{A}) \multimap (\theta_2(\mathbf{B}) \& \theta_3(\mathbf{D})))$.

– Il est clair que ce projet est prometteur car il est construit à partir de délocalisations.

☺

§10.2.46 REMARQUE. L'interprétation du $\&$ sera donc définie grâce à la construction relativement compliquée⁵ $\overline{\mathfrak{f} \& \mathfrak{g}} = [\mathfrak{With}](\theta_1(\mathfrak{f}) \& \theta_2(\mathfrak{g}))$. Cette construction ne doit cependant pas cacher la relative simplicité de l'idée qui la sous-tend. Ainsi, étant donnés deux projets $\mathfrak{f} = (p + r, 0, \phi, \mathfrak{F}, F)$ et $\mathfrak{g} = (q + r, 0, \gamma, \mathfrak{G}, G)$, nous construisons le projet :

$$\overline{\mathfrak{f} \& \mathfrak{g}} = (p + q + r, 0, \phi \otimes \gamma, \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}, F \oplus G)$$

Adéquation

§10.2.47 THÉORÈME (ADÉQUATION).

Soit $\vdash \Gamma; A$ un séquent prouvable dans *MALL*, et δ une base d'interprétation. Alors l'interprétation de $\vdash \Gamma; A$ est vraie sous l'angle $\mathfrak{P}$.

Ce théorème est en réalité obtenu comme corollaire d'un résultat plus fort (Théorème §10.2.49). Afin d'énoncer ce dernier, nous allons utiliser les constructions de la section précédente afin de définir l'interprétation des preuves de *MALL*.

§10.2.48 DÉFINITION (INTERPRÉTATION DES PREUVES).

On définit inductivement l'interprétation d'une preuve Π par rapport à un système de délocalisations ϕ :

- Si Π est une règle axiome introduisant le séquent $\vdash X_{\theta}; X_{\phi}$, on définit naturellement $\Pi^* = (q_{X_{\theta}} + q_{X_{\phi}}, 0, tr, \mathfrak{R}, \theta \phi^* + \phi \theta^*)$.

5. On rappelle que θ_1 et θ_2 sont des délocalisations.

- Si Π est obtenu par l'application d'une règle $\wp$, ou d'une règle d'échange, sur une preuve Π_1 , on définit $\Pi^\bullet = \Pi_1^\bullet$.
- Si Π est obtenue par l'application d'une règle $\oplus$ sur une preuve Π_1 de support p , alors $\Pi^\bullet = (\Pi_1^\bullet)_{p+q}$ où q est le support de la formule introduite.
- Si Π est obtenue par l'application d'une règle coupure entre deux preuves Π_1 et Π_2 , alors $\Pi^\bullet = \Pi_1^\bullet :: \Pi_2^\bullet$.
- Si Π est obtenue par l'application d'une règle $\otimes$ sur deux preuves Π_1 et Π_2 , alors $\Pi^\bullet = \Pi_1^\bullet \otimes \Pi_2^\bullet$.
- Si Π est obtenue par l'application d'une règle $\&$ sur deux preuves Π_1 et Π_2 , interprétées par des projets $\Pi_1^\bullet$ et $\Pi_2^\bullet$, on forme alors $\Pi^\bullet = [\mathcal{W}ith](\theta_1(\Pi_1^\bullet) \& \theta_2(\Pi_2^\bullet))$ où θ_1, θ_2 sont des délocalisations sur des supports disjoints, et où $\mathcal{W}ith$ est le projet défini dans la Proposition §10.2.45.

§10.2.49 THÉORÈME (ADÉQUATION FORTE).

Soit Π une preuve de conclusion $\vdash \Gamma; A$ dans *MALL*, et δ une base d'interprétation. Alors le projet $\Pi^\bullet$ appartient à $\|\vdash \Gamma; A\|_\delta$ et est prometteur sous l'angle $\wp$.

Démonstration. La preuve est une conséquence directe des Propositions §10.2.43 et §10.2.45 de la section précédente, ainsi que de la compositionnalité (Proposition §10.2.24). ☺

MASAs régulières

§10.2.50 Pour interpréter les exponentielles élémentaires, on utilisera la construction de l'exponentielle proposée par Girard. Il reste cependant un problème de taille. En effet, si α est un projet prometteur sous l'angle $\wp$, il est évident que le projet $!_\Omega \alpha$ est prometteur par rapport à $\Omega(\wp \otimes \Omega)$ où Ω est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$. Cependant, s'il est évident que $\Omega(\wp \otimes \Omega)$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}_{0,1}$, il ne sera pas vrai, en général, que $\Omega(\wp \otimes \Omega) = \wp$. Comme ce sont des sous-algèbres commutatives maximales de $\mathfrak{A}_{0,1}$, les deux algèbres $\Omega(\wp \otimes \Omega)$ et $\wp$ sont des algèbres de von Neumann commutatives diffuses, donc isomorphes en tant qu'algèbres de von Neumann. Ce résultat est cependant trop faible puisque cet isomorphisme n'est pas en général implémenté par un unitaire, condition nécessaire à la bonne interprétation de la promotion.

§10.2.51 PROPOSITION.

Soit α un projet prometteur sous l'angle $\wp$. Supposons que $\wp$ soit une sous-algèbre commutative maximale régulière (de Cartan) de $\mathfrak{A}_{0,1}$. Alors il existe une isométrie partielle u telle que $u\Omega(A)u^*$ soit une symétrie partielle dans le groupoïde normalisant de $\wp$.

Démonstration. Cette preuve repose sur deux hypothèses : le fait que le point de vue soit régulier, et le fait que l'opérateur A soit un élément de $p\mathfrak{A}_{0,1}p$, c'est-à-dire dans une algèbre de type II_1 . En effet, comme α est prometteur par rapport à $\wp$, A est un élément du groupoïde normalisant de $\wp \otimes \Omega$, où Ω est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$ qui est nécessairement régulière puisque $\mathfrak{A}$ est finie de type I. Comme $\wp$ et Ω sont régulières, leur produit tensoriel est une sous-algèbre commutative régulière de $\mathfrak{A}_{0,1} \otimes \mathfrak{A}$, et par conséquent $\Omega(\wp \otimes \Omega)$ est une sous-algèbre commutative maximale régulière de $\mathfrak{A}_{0,1}$.

De plus, $A = pAp$ où p est une projection finie dans $\wp$. Alors $\Omega(A) = \Omega(p)\Omega(A)\Omega(p)$, ce qui implique que $\Omega(A)$ est un élément du groupoïde normalisant de $\Omega(p)\Omega(\wp \otimes \Omega)\Omega(p)$, qui est une sous-algèbre commutative maximale régulière de $\Omega(p)\mathfrak{A}_{0,1}\Omega(p)$ par le Lemme §10.2.29. Soit maintenant p' une projection de $\mathfrak{A}_{0,1}$ de même trace que p (et donc de même trace que $\Omega(p)$). On peut alors considérer la sous-algèbre commutative maximale régulière $p'\wp p'$ de $p\mathfrak{A}_{0,1}p$. Comme p' et $\Omega(p)$ ont la même trace, il existe une isométrie partielle u telle que $uu^* = p'$ et $u^*u = \Omega(p)$. Alors $u^*p\wp pu$ est un sous-algèbre commutative maximale de $\Omega(p)\mathfrak{A}_{0,1}\Omega(p)$. Un

6. On fait un abus de notation ici, puisque $\mathfrak{A}$ n'est pas une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$. Cependant, il est possible de choisir le plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ de manière à ce que $\mathfrak{A}$ soit une sous-algèbre d'une algèbre commutative maximale régulière de $\mathfrak{A}$.

résultat de Connes, Feldman et Weiss (Théorème §3.3.72) montre que deux sous-algèbres commutatives maximales régulières du facteur hyperfini de type II_1 sont unitairement équivalentes. Il existe donc un unitaire $v \in \Omega(p)\mathfrak{K}_{0,1}\Omega(p)$ tel que $v^*(u^*p'\mathfrak{P}p'u)v = \Omega(p)\Omega(\mathfrak{P} \otimes \Omega)\Omega(p)$. Comme le produit uv est une isométrie partielle $(uv)(uv)^*uv = uvv^*u^*uv = u\Omega(p)\Omega(p)v = uv$, on peut alors montrer que $(uv)^*A(uv)$ est une symétrie partielle dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{P}$:

$$\begin{aligned} v^*u^*Auvv^*u^*Auv &= v^*u^*Au\Omega(p)u^*Auv = v^*u^*ApAuv = v^*u^*AAuv = v^*u^*Auv \\ (v^*u^*Auv)^* &= v^*u^*A^*uv = v^*u^*Auv \end{aligned}$$

L'isométrie partielle uv est donc celle recherchée. ☺

- §10.2.52 Grâce à cette proposition, et en remarquant que la contraction et l'implémentation de la promotion fonctorielle n'utilisent que des projets prometteurs, on peut montrer aisément un théorème d'adéquation forte pour les calculs des séquents ELL_{pol} et ELL_{comp} définis au Chapitre 8 lorsque l'angle choisi est une sous-algèbre commutative maximale régulière. Remarquons que cette proposition ne dépend pas du morphisme Ω choisi (le résultat d'adéquation en dépend cependant puisque tout choix de Ω ne permet pas d'interpréter la promotion fonctorielle).
- §10.2.53 Il est alors naturel de se demander si la réciproque est vraie, c'est-à-dire si le fait que $\mathfrak{P}$ ne soit pas régulière implique que l'on ne puisse pas interpréter les (au moins une) exponentielles. Nous ne savons pas si une telle réciproque existe, mais nous allons tout de même discuter cette question.
- §10.2.54 Considérons tout d'abord les invariants de Pukansky de l'angle $\mathfrak{P}$ choisi et de la sous-algèbre $\Omega(\mathfrak{P} \otimes \Omega)$ (en utilisant les notations de la preuve précédente). Il est connu⁷ qu'il existe des sous-algèbres commutatives maximales singulières de $\mathfrak{K}$ dont l'invariant de Pukansky est inclus dans $\{2, 3, \dots, \infty\}$, et la sous-algèbre Ω vérifie $\text{Puk}(\Omega) = \{1\}$ puisqu'elle est régulière (Théorème §3.3.80). En utilisant la Proposition §3.3.83, on obtient que $\text{Puk}(\Omega(\mathfrak{P} \otimes \Omega))$ contient 1, et il est donc impossible dans ce cas que $\Omega(\mathfrak{P} \otimes \Omega)$ et $\mathfrak{P}$ soient unitairement équivalentes.
- §10.2.55 Cependant, l'invariant de Pukansky d'une algèbre semi-régulière est une partie de $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ contenant 1 (du fait du Théorème §3.3.82). La Proposition §3.3.83 nous donne alors que $\text{Puk}(\Omega(\mathfrak{P} \otimes \Omega)) = \text{Puk}(\mathfrak{P})$. Il n'est donc pas possible de montrer la réciproque de la Proposition §10.2.51 de cette manière. Nous conjecturons qu'il existe des pérennisations Ω et des angles $\mathfrak{P}$ semi-réguliers tels que (l'équivalent de) la Proposition §10.2.51 soit satisfaite. Nous conjecturons également qu'il existe des pérennisations Ω et des angles $\mathfrak{P}$ semi-réguliers tels que (l'équivalent de) la Proposition §10.2.51 ne soit pas satisfaite. Une question plus intéressante serait de savoir si pour toute pérennisation (et donc en particulier celle définie par Girard) il existe un angle semi-régulier $\mathfrak{P}$ donnant un contre-exemple à (l'équivalent de) la Proposition §10.2.51.

Conclusion

- §10.2.56 Les différents résultats obtenus dans cette section peuvent être combinés afin d'obtenir le théorème suivant :
- §10.2.57 **THÉORÈME.**

Soit $\mathfrak{P}$ une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{K}_{0,1}$. Alors :

- *Si $\mathfrak{P}$ est singulière, il n'existe pas d'interprétation (non triviale) de MALL (ni de ELL) par des projets matriciels prometteurs sous l'angle $\mathfrak{P}$;*
- *Si $\mathfrak{P}$ est semi-régulière, il est possible d'interpréter les preuves de MALL par des projets matriciels prometteurs sous l'angle $\mathfrak{P}$;*
- *Si $\mathfrak{P}$ est régulière, il est possible d'interpréter les preuves de ELL par des projets matriciels prometteurs sous l'angle $\mathfrak{P}$.*

7. White [Whi08] a montré que toute partie de $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ est l'invariant de Pukansky d'une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{K}$

10.3 Vérité Subjective en GdI5.1 et GdI5.2

Points de vues et angles

§10.3.1 Nous commençons par présenter la notion de vérité de l'article de Girard [Gir11a] basée sur la notion de *projet gagnant*. Nous expliciterons alors une certaine correspondance entre la notion de *projet gagnant* et celle de *projet prometteur*. Celle-ci nous permettra de déduire certains résultats concernant la GdI5.

§10.3.2 DÉFINITION (POINT DE VUE).

Un *point de vue* est une représentation π de l'algèbre $\mathfrak{R}_{0,1}$ sur $L^2(\mathbf{R}, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue, satisfaisant les conditions suivantes :

- $L^\infty(\mathbf{R}, \lambda) \subset \pi(\mathfrak{R}_{0,1})$;
- $\forall A \subset \mathbf{R}, \text{tr}(\pi^{-1}(\chi_A)) = \lambda(A)$, où χ_A est la fonction caractéristique de A .

Un point de vue est dit *fidèle* lorsque la représentation π est fidèle (voir Définition §3.2.71).

§10.3.3 DÉFINITION.

Un projet $\alpha = 0 \cdot + \cdot \alpha + A$ de support p est *gagnant* pour un point de vue π lorsque :

- $\pi(p) \in L^\infty(\mathbf{R})$;
- α est la trace normalisée sur $\mathfrak{A}$;
- Il existe une base $e_1, \dots, e_n$ du dialecte $\mathfrak{A}$ telle que $A = [f]$ où f est une bijection partielle qui préserve la mesure sur $\mathbf{R} \times \{1, \dots, n\}$;
- L'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \times \{1, \dots, n\} \mid f(x) = x\}$ est de mesure nulle.

§10.3.4 REMARQUE. Nous avons ajouté la dernière condition à la définition proposée par Girard [Gir11a]. Celle-ci correspond à la condition concernant la trace dans la définition des *projets prometteurs* (Définition §10.2.17).

§10.3.5 PROPOSITION.

Tout point de vue fidèle définit un angle.

Démonstration. Soit π un point de vue fidèle, alors $L^\infty(\mathbf{R}, \lambda) \subset \pi(\mathfrak{R}_{0,1})$. Comme $L^\infty(\mathbf{R}, \lambda)$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}, \lambda))$, $L^\infty(\mathbf{R}, \lambda)$ est égale à son commutant dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}, \lambda))$. On en déduit que le commutant de $L^\infty(\mathbf{R}, \lambda)$ dans $\pi(\mathfrak{R}_{0,1})$ est inclus dans $L^\infty(\mathbf{R}, \lambda)$. Or, l'algèbre étant commutative, l'inclusion inverse est également vérifiée. Donc $L^\infty(\mathbf{R}, \lambda)$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\pi(\mathfrak{R}_{0,1})$. Posons maintenant $\mathfrak{B} = \pi^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}, \lambda))$. Cette sous-algèbre de $\mathfrak{R}_{0,1}$ est clairement commutative. De plus, si $x \in \mathfrak{R}_{0,1}$ commute avec les éléments de $\mathfrak{B}$, alors $\pi(x)$ commute avec les éléments de $L^\infty(\mathbf{R}, \lambda)$. Par maximalité de cette dernière, on en déduit que $\pi(x) \in L^\infty(\mathbf{R}, \lambda)$, et donc que $x \in \mathfrak{B}$. Donc $\mathfrak{B}$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{R}_{0,1}$. $\odot$

§10.3.6 PROPOSITION.

Soit π un point de vue fidèle, et $\mathfrak{B} = \pi^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}, \lambda))$ l'angle induit par π . Si $\alpha = 0 \cdot + \cdot \text{tr} + A$ est gagnant pour π , alors il est prometteur sous l'angle $\mathfrak{B}$.

Démonstration. Il faut simplement vérifier que A appartient au groupoïde normalisant de $\mathfrak{B} \otimes \Omega$ pour une sous-algèbre commutative maximale $\Omega \subset \mathfrak{A}$. Comme $\mathfrak{A}$ est une algèbre de von Neumann finie, on peut supposer sans perte de généralité (quitte à considérer un variant de a) que celle-ci est égale à $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ pour un entier $n \in \mathbf{N}$. La base $e_1, \dots, e_n$ du dialecte telle que $\pi(A) = [f]$ pour une bijection partielle f préservant la mesure sur $\mathbf{R} \times \{1, \dots, n\}$, définit une sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$, à savoir la sous-algèbre des opérateurs diagonaux dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Soit maintenant p une projection dans $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}$. On sait que $\pi(p) = [\chi_U]$ où U est un sous-ensemble mesurable de $\mathbf{R} \times \{1, \dots, n\}$. Pour tout élément $\xi \in L^2(\mathbf{R}, \lambda)$, on a :

$$\pi(A)^* \pi(p) \pi(A) \xi = \pi(A) \pi(p) \xi \circ f = \pi(A) \xi \circ f \circ \chi_U = \xi \circ f \circ \chi_U \circ f^{-1}$$

Or $f \circ \chi_U \circ f^{-1} = \chi_V$ où V est le sous-ensemble mesurable de $\mathbf{R} \times \{1, \dots, n\}$ défini par $V = f(U)$. Donc finalement, $\pi(A)^* \pi(p) \pi(A) \xi = [\chi_V] \xi = \pi(q) \xi$, où q est la projection $[\chi_V]$. Comme q est dans $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}$, on a montré que $\pi(A)$ normalise toute projection dans $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}$. On conclut que $\pi(A) \in G(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D})$ en utilisant le fait que les projections engendrent l'algèbre $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}$. Donc A est une symétrie partielle dans le groupoïde normalisant de $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}$.

Il reste maintenant à vérifier la dernière condition sur les projets prometteurs. Pour cela, on choisit une projection p dans $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ et on utilise le Lemme §9.A.10 pour montrer :

$$\mathrm{tr}(pA) = \lambda(\{x \in U_p \times \{1, \dots, n\} \mid f(x) = x\}) \leq \lambda(\{x \in \mathbf{R} \times \{1, \dots, n\} \mid f(x) = x\})$$

Comme a est gagnant, on a donc $0 \leq \mathrm{tr}(pA) \leq 0$, ce qui permet de conclure. $\odot$

§10.3.7 THÉORÈME.

Soit π un point de vue fidèle. Alors l'angle associé $\mathfrak{A}$ satisfait que pour toute projection finie $p \in \mathfrak{A}$, $\mathrm{Puk}(p\mathfrak{A}p) = \{1\}$.

Démonstration. Pour toute projection finie $p \in \mathfrak{A}$, l'algèbre $p\mathfrak{A}p$ est une sous-algèbre commutative maximale de $p\mathfrak{R}_{0,1}p$ par le lemme §10.2.29. Supposons qu'il existe une projection p telle que $\mathrm{Puk}(p\mathfrak{A}p)$ contient au moins un entier supérieur ou égal à 2, que l'on notera k . Pour toute sous-algèbre commutative maximale régulière Ω de $\mathfrak{R}$, $\mathrm{Puk}(p\mathfrak{A}p \otimes \Omega)$ contient cet entier par la Proposition §3.3.83. On déduit alors du Théorème §3.3.82 que $p\mathfrak{A}p \otimes \Omega$ n'est pas commutative maximale dans $\mathcal{L}(L^2(p\mathfrak{R}_{0,1}p \otimes \mathfrak{R}))$. Or $\pi(\mathfrak{A}) = L^\infty(\mathbf{R})$ est commutative maximale dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$, et donc $\pi(p\mathfrak{A}p) = L^\infty(X)$ pour X un borélien de mesure finie. On en déduit que $\pi(p\mathfrak{A}p)$ est commutative maximale dans $\mathcal{L}(L^2(X))$, et donc unitairement équivalente (on note u l'unitaire en question) à une sous-algèbre commutative maximale de $\mathcal{L}(L^2(p\mathfrak{R}_{0,1}p) \otimes \mathfrak{R})$ (Proposition §3.3.59). Le morphisme $\phi : a \mapsto u\pi(a)u^*$ est alors un morphisme de $p\mathfrak{R}_{0,1}p \otimes \Omega$ dans $\phi(p\mathfrak{R}_{0,1}p \otimes \Omega)$ tel que $\mathrm{Puk}(\phi(\mathfrak{A})) = \{1\}$ ce qui contredit le fait que $k \in \mathrm{Puk}(\mathfrak{A})$. $\odot$

§10.3.8 PROPOSITION.

Il existe des points de vue réguliers, des points de vue semi-réguliers, et des points de vue non Dixmier-classifiables.

Démonstration. On considère $\mathfrak{R}$ dans sa représentation standard, et on fixe $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ trois sous-algèbres commutatives maximales de $\mathfrak{R}$ telles que $\mathfrak{A}$ soit régulière, $\mathfrak{B}$ soit semi-régulière, $\mathfrak{C}$ soit singulière, et $\mathrm{Puk}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Puk}(\mathfrak{B}) = \{1\}$ (on pourra consulter les paragraphes §3.3.84, §3.3.85 et §3.3.86 à ce sujet).

Puisque $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ ont pour invariant de Pukansky le singleton $\{1\}$, ce sont des sous-algèbres commutatives maximales de $\mathcal{L}(L^2(\mathfrak{R}))$ par la Proposition §3.3.81. De plus, elles sont diffuses puisque $\mathfrak{R}$ est de type II et il existe par conséquent des unitaires u, v, w tels que $u^*\mathfrak{A}u = L^\infty([0, 1])$, $v^*\mathfrak{B}v = L^\infty([0, 1])$ et $w^*\mathfrak{C}w = L^\infty([0, 1])$. On choisit alors une sous-algèbre commutative maximale diagonale $\mathfrak{D}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ associée à une base, et on définit les sous-algèbres commutatives maximales de $\mathfrak{R} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$ suivantes :

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{D} \quad \mathfrak{E}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D} \quad \mathfrak{E}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D}$$

Les unitaires $u \otimes 1, v \otimes 1, w \otimes 1 : L^2(\mathfrak{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H}) \rightarrow L^2([0, 1]) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$ définissent — modulo l'isomorphisme entre $L^2([0, 1]) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$ et $L^2(\mathbf{R})$ — des représentations $\pi_{\mathfrak{A}} : x \mapsto (u \otimes 1)^* x (u \otimes 1)$, $\pi_{\mathfrak{B}} : x \mapsto (v \otimes 1)^* x (v \otimes 1)$ et $\pi_{\mathfrak{C}} : x \mapsto (w \otimes 1)^* x (w \otimes 1)$ de $\mathfrak{R}_{0,1}$ sur $L^2(\mathbf{R})$ telles que :

$$\pi_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{E}_{\mathfrak{A}}) = L^\infty(\mathbf{R}) \quad \pi_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{E}_{\mathfrak{B}}) = L^\infty(\mathbf{R}) \quad \pi_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{E}_{\mathfrak{C}}) = L^\infty(\mathbf{R})$$

Il nous reste à montrer que les angles associés à $\pi_{\mathfrak{A}}$, $\pi_{\mathfrak{B}}$ et $\pi_{\mathfrak{C}}$, c'est-à-dire les sous-algèbres commutatives maximales $\mathfrak{E}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{E}_{\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{E}_{\mathfrak{C}}$, sont respectivement régulières, semi-régulières et non Dixmier-classifiables. Il s'agit pour cela d'une simple application du Théorème §3.3.71. Dans le cas de $\mathfrak{E}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{D}$, on a :

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{R} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{D}) = \mathcal{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{A}) \otimes \mathcal{N}_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{R} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$$

Donc $\mathfrak{E}_{\mathfrak{A}}$ est bien régulière.

Dans le cas de $\mathfrak{E}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}$, on obtient :

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{R} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}) = \mathcal{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{B}) \otimes \mathcal{N}_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{N} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$$

Comme $\mathfrak{B}$ est semi-régulière, $\mathfrak{N}$ est un sous-facteur de $\mathfrak{R}$, et donc $\mathfrak{N} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est un sous-facteur de $\mathfrak{R} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$ (on utilise ici un théorème⁸ de Tomita qui énonce que le commutant d'un produit tensoriel est le produit tensoriel des commutants). Donc $\mathfrak{E}_{\mathfrak{B}}$ est bien semi-régulière.

Dans le cas de $\mathfrak{E}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D}$, on obtient :

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{R} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D}) = \mathcal{N}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{C}) \otimes \mathcal{N}_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{C} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$$

Comme le commutant de $\mathfrak{C} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est égal à $\mathfrak{C} \otimes \mathbf{C}$, le centre de $\mathfrak{C} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est égal à $\mathfrak{C} \otimes \mathbf{C}$. On en déduit que $\mathcal{N}_{\mathfrak{R} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})}(\mathfrak{E}_{\mathfrak{C}})$ n'est ni égale à $\mathfrak{E}_{\mathfrak{C}}$, ni un facteur. $\mathfrak{E}_{\mathfrak{C}}$ est donc bien en dehors de la classification de Dixmier. $\odot$

§10.3.9 La question de l'existence de points de vues singuliers est quant à elle toujours ouverte. En effet, la méthode utilisée dans la preuve précédente ne s'applique pas pour montrer l'existence de sous-algèbres singulières : en écrivant $\mathfrak{R}_{0,1} = \mathfrak{R} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{H})$ et en choisissant une sous-algèbre de la forme $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{D}$, on s'impose une certaine « régularité », puisque $\mathfrak{D}$ est nécessairement une sous-algèbre régulière de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$. L'existence de sous-algèbres commutatives maximales singulières d'invariant de Pukansky égal à $\{1\}$ du facteur hyperfini $\mathfrak{R}$ de type II_1 obtenue par White [WS07] suggère cependant qu'il puisse exister de tels points de vue.

8. Ce théorème se trouve dans les livres de Takesaki [Tak01, Tak03a, Tak03b].

CHAPITRE 11

ENTIERS LOGSPACE

Table des matières

11.1 Représentation des entiers	250
11.1.1 Entiers Unaires	250
11.1.2 Entiers Binaires	254
11.2 Paires normatives	259
11.2.1 Déterminant	259
11.2.2 Nilpotence	260
11.3 Caractérisation de co-NL	261
11.3.1 Machines à pointeurs non déterministes	262
11.3.2 Caractérisation de co-NL	266

- §11.1 Le contenu de ce chapitre présente un travail [AS12] effectué en collaboration avec Clément Aubert. Il s'agit de comprendre et de détailler la caractérisation de la classe de complexité co-NL proposée par Girard [Gir11c]. En dehors de l'explicitation de cette caractérisation, on obtient une nouvelle caractérisation de co-NL par des machines abstraites, les *machines à pointeurs non déterministes*.
- §11.2 Ce chapitre se compose de trois parties. La première partie explicite la représentation des entiers en géométrie de l'interaction. Cette représentation des entiers est en effet celle qui sera utilisée par la suite pour obtenir la caractérisation de co-NL. Dans une seconde partie, on définit et motive la notion de paire normative utilisée par Girard. On donne également un procédé de construction de telles paires basé sur la notion de produit croisé entre une algèbre de von Neumann et un groupe agissant sur celle-ci. Dans la troisième partie, on montre que l'on peut caractériser la classe de complexité co-NL par un ensemble d'opérateurs. La preuve de ce résultat est effectuée en définissant une notion de machine à pointeurs abstraite permettant de résoudre un problème co-NL complet, puis en montrant que ces machines peuvent être encodées par des opérateurs.

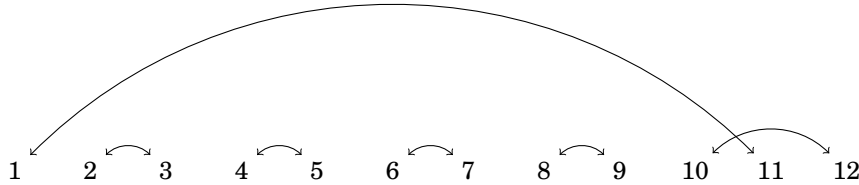
11.1 Représentation des entiers

Entiers Unaires

- §11.1.1 On utilise la représentation des entiers en GdI : on représente l'entier n par l'ensemble des liens axiomes de la preuve de $\forall X!(X \multimap X) \multimap !(X \multimap X)$ (le type des entiers en Logique Linéaire Élémentaire) qui utilise n fois la règle de contraction :

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash X(2n+1), X(1)^\perp} \text{ ax} \quad \frac{}{\vdash X(2), X(3)^\perp} \text{ ax} \quad \frac{}{\vdash X(4), X(5)^\perp} \text{ ax} \\
 \vdash X(1)^\perp \otimes X(2), X(2n+1), X(3)^\perp \quad \vdash X(4), X(5)^\perp \\
 \vdash X(1)^\perp \otimes X(2), X(3)^\perp \otimes X(4), X(2n+1), X(5)^\perp \\
 \vdots \\
 \vdash X(2n), X(2n+2)^\perp \\
 \vdash X(1)^\perp \otimes X(2), \dots, X(2n-1)^\perp \otimes X(2n), X(2n+1), X(2n+2)^\perp \\
 \vdash X(1)^\perp \otimes X(2), \dots, X(2n-1)^\perp \otimes X(2n), X(2n+1) \wp X(2n+2)^\perp \\
 \vdash ?(X(1)^\perp \otimes X(2)), \dots, ?(X(2n-1)^\perp \otimes X(2n)), !(X(2n+1) \wp X(2n+2)^\perp) \\
 \vdash ?(X(1)^\perp \otimes X(2)), !(X(2n+1) \wp X(2n+2)^\perp) \\
 \vdash \forall X ?(X(1)^\perp \otimes X(2)), !(X(2n+1) \wp X(2n+2)^\perp) \quad \forall
 \end{array}$$

- §11.1.2 La partie de cette preuve se trouvant avant la promotion est interprétée par un graphe ayant $2n+2$ sommets¹ dont les arêtes représentent les liens axiomes. Par exemple, l'entier 5 sera représenté par le graphe :

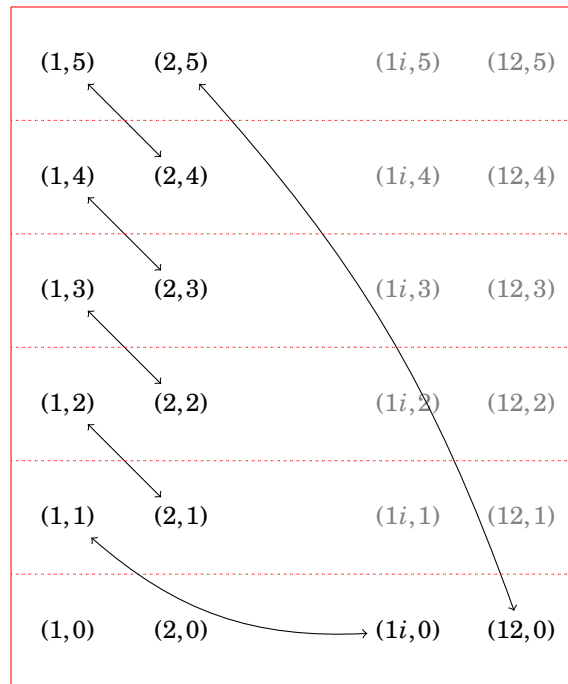


1. Comme nous considérons ici la contraction, le graphe en question est un graphage épais tranché n'ayant qu'une seule tranche et les sommets sont en réalité des boréliens de même mesure, par exemple les intervalles $[\frac{i}{2n+2}, \frac{i+1}{2n+2}]$. Cependant, puisque la promotion se fera sur un graphe sans tranches, la promotion reviendra à une simple délocalisation, et il est donc suffisant de considérer ces sommets comme de simples points.

La matrice des poids de ce graphe :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

§11.1.3 Comme ce graphe est sans tranches, la promotion de celui-ci n'est rien d'autre qu'une délocalisation, et la matrice reste donc inchangée. L'application de la règle de contraction permet alors de superposer les points $2, 4, 6, \dots, 2n$ et les points $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ dans un dialecte². On obtient alors le graphe épais suivant dans le cas de l'entier 5 :



2. La représentation des entiers choisie par Girard considère que les points $2n+1$ et $2n+2$ sont dans une tranche particulière, ce qui n'est pas nécessaire. Ce détail est cependant d'importance puisqu'il permet de distinguer les points de « départ » et d'« arrivée » du cycle décrit par le graphe.

La matrice des poids de ce graphe est une matrice bloc 4×4 contenant des matrices 6×6 :

$$n = \begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ u^* & 0 & 0 & w^* \\ v^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

§11.1.4 De manière générale, l'entier n est représenté par une matrice bloc 4×4 :

$$\begin{pmatrix} 0 & u_n & v_n & 0 \\ u_n^* & 0 & 0 & w_n^* \\ v_n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les u_n, v_n, w_n sont les matrices $(n+1) \times (n+1)$:

$$u_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

§11.1.5 L'entier n est finalement représenté comme une matrice carrée de taille $4(n+1)$. Il est donc a priori difficile de définir des algorithmes agissant sur tous les entiers avec cette représentation. C'est pourquoi Girard utilise le facteur hyperfini de type II_1 , que nous notons $\mathfrak{R}$. En effet, toute algèbre de matrices carrées peut être plongée dans celui-ci. Supposons que l'on veuille plonger l'algèbre des matrices carrées de taille n dans $\mathfrak{R}$. On commence par choisir une famille $p_1, \dots, p_n$ de projections équivalentes (au sens de Murray et von Neumann) dont la somme est égale à l'identité. On fixe alors des isométries partielles $u_{i,i+1}$ telles que $u_{i,i+1}^* u_{i,i+1} = p_{i+1}$ et $u_{i,i+1} u_{i,i+1}^* = p_i$. On définit alors :

$$u_{i,j} = \begin{cases} u_{i,i+1} u_{i+1,i+2} \dots u_{j-1,j} & \text{lorsque } j > i \\ u_{i,i+1}^* u_{i-1,i}^* \dots u_{j,j+1}^* & \text{lorsque } i < j \\ p_i & \text{lorsque } i = j \end{cases}$$

Cette famille vérifie que $u_{i,j} u_{k,l}$ est égal à 0 si $j \neq k$ et à $u_{i,l}$ sinon. On peut alors représenter une matrice carrée $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ par $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u_{i,j}$.

§11.1.6 La représentation des matrices $n \times n$ que nous venons de décrire n'est cependant pas unique ! On se retrouve donc avec de nombreuses représentations d'un même entier n dans le facteur hyperfini. Celles-ci sont caractérisées par certaines équations dont il est aisé de voir qu'elles sont vérifiées par les matrices décrites ci-dessus.

§11.1.7 DÉFINITION (ENTIERS - REPRÉSENTATION UNAIRE).

Un opérateur $N \in \mathfrak{M}_4(\mathfrak{R})$ est une représentation unaire de l'entier $n \in \mathbf{N}$ lorsqu'il existe des projections $\pi_0, \dots, \pi_n$ dans $\mathfrak{R}$ telles que $\sum_{i=0}^n \pi_i = 1$ et :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & e_n & d_n & 0 \\ e_n^* & 0 & 0 & f_n^* \\ d_n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les isométries partielles e_n, d_n, f_n (pour « entier », « début » et « fin ») satisfont :

$$\begin{aligned} d_n &= \pi_1 d_n \pi_0 \\ e_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_{i+1} e_n \pi_i \\ f_n &= d_n^* (e_n^*)^{n-1} = \pi_0 f_n \pi_n \end{aligned}$$

§11.1.8 PROPOSITION.

Si u est une représentation de l'entier n , alors il existe un morphisme $\phi : \mathfrak{M}_{4(n+1)}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathfrak{R}$ tel que $u = \phi(N)$ où N est la matrice représentant n .

Démonstration. Soit N une représentation de l'entier $n \in \mathbf{N}$ dans $\mathfrak{R}$, et $\pi_0, \dots, \pi_n$ les projections associées. Dans un premier temps, il est nécessaire de remarquer que les projections π_i sont toutes équivalentes au sens de Murray et von Neumann : on a $\pi_i = e_n^i d_n (e_n^i d_n)^*$ et $\pi_0 = (e_n^i d_n)^* e_n^i d_n$ donc π_0 est équivalente à toutes les autres projections. On définit maintenant un plongement ϕ de $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$ dans $\mathfrak{R}$ par :

$$\phi : (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \mapsto \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{i,j} u_{i,j}$$

avec :

$$u_{i,j} = \begin{cases} e_n^{j-1} d_n & \text{si } i = 0 \\ e_n^{j-1} & \text{si } i < j \text{ et } i \neq 0 \\ (e_n^{i-1} d_n)^* & \text{si } j = 0 \\ (e_n^{i-1})^* & \text{si } i > j \text{ et } j \neq 0 \\ \pi_k & \text{si } i = j = k \end{cases}$$

L'image de v_n dans la représentation matricielle des entiers (voir §11.1.4), est alors l'opérateur d_n . De même, l'image de w_n est $(e_n^{n-1} d_n)^* = d_n^* (e_n^*)^{n-1} = f_n$. La matrice u_n est représentée par l'opérateur e_n .

On en déduit que l'image de la représentation matricielle de n par le plongement ϕ est égale à N . $\odot$

§11.1.9 PROPOSITION.

Soient $N, N' \in \mathfrak{M}_4(\mathbf{C}) \otimes \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$ deux représentations d'un même entier $n \in \mathbf{N}$. Alors il existe un unitaire $u \in \mathfrak{R}$ tel que $(\text{Id} \otimes u)N(\text{Id} \otimes u)^* = N'$.

Démonstration. On note $\pi_0, \dots, \pi_n$ (resp. $\nu_0, \dots, \nu_n$) les projections et d_n, e_n, f_n (resp. d'_n, e'_n, f'_n) les isométries partielles associées à N (resp. N'). Il est clair que π_0 et ν_0 sont équivalentes au sens de Murray et von Neumann. Il existe donc une isométrie partielle v telle que $vv^* = \nu_0$ et $v^*v = \pi_0$. On définit alors les isométries partielles :

$$v_i = ((e'_n)^{i-1} d'_n) v (e_n^{i-1} d_n)^*$$

Alors :

$$\begin{aligned} v_i v_i^* &= ((e'_n)^{i-1} d'_n) v (e_n^{i-1} d_n)^* (e_n^{i-1} d_n) v^* ((e'_n)^{i-1} d'_n)^* \\ &= ((e'_n)^{i-1} d'_n) v \pi_0 v^* ((e'_n)^{i-1} d'_n)^* \\ &= ((e'_n)^{i-1} d'_n) \nu_0 ((e'_n)^{i-1} d'_n)^* \\ &= \nu_i \\ v_i^* v_i &= (e_n^{i-1} d_n) v^* ((e'_n)^{i-1} d'_n)^* ((e'_n)^{i-1} d'_n) v (e_n^{i-1} d_n)^* \\ &= (e_n^{i-1} d_n) v^* \nu_0 v (e_n^{i-1} d_n)^* \\ &= (e_n^{i-1} d_n) \pi_0 (e_n^{i-1} d_n)^* \\ &= \pi_i \end{aligned}$$

La somme $u = \sum_{i=0}^n v_i$ est alors un unitaire et $(\text{Id} \otimes u)N(\text{Id} \otimes u)^* = N'$. $\odot$

Entiers Binaires

§11.1.10 Les suites binaires finies sont représentées par les preuves de la formule

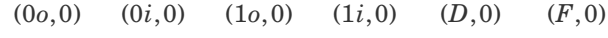
$$\forall X \ ! (X \multimap X) \multimap (! (X \multimap X) \multimap ! (X \multimap X))$$

Cela correspond donc à montrer le séquent $\vdash ?(X \otimes X^\perp), ?(X \otimes X^\perp), ! (X \multimap X)$. Ces preuves dépendent donc de la manière dont les contractions sont faites et des éventuels affaiblissements (pour la liste vide ou les listes contenant uniquement des 0 ou uniquement des 1). Par exemple :

- la preuve représentant la liste vide est obtenue à l'aide de deux affaiblissements :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\vdash X(D)^\perp, X(F)}{ax}}{\vdash X(D) \multimap X(F)}{w}}{\vdash ! (X(D) \multimap X(F))}{!}}{\vdash ? (X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ! (X(D) \multimap X(F))}{?w}}{\vdash ? (X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ? (X(1i) \otimes X(1o)^\perp), ! (X(D) \multimap X(F))}{?w}}{\vdash ! (X(0i) \multimap X(0o)) \multimap (! (X(1i) \multimap X(1o)) \multimap ! (X(D) \multimap X(F)))}{\multimap}}{\vdash \forall X \ ! (X(0i) \multimap X(0o)) \multimap (! (X(1i) \multimap X(1o)) \multimap ! (X(D) \multimap X(F)))}{\forall}}$$

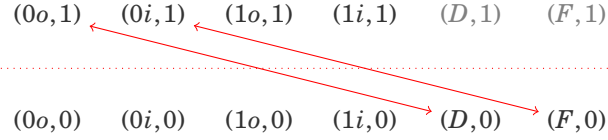
Le graphe correspondant est :



- la preuve représentant la liste $< 0 >$ est obtenue à l'aide d'un affaiblissement pour introduire $X(1i) \multimap X(1o)$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash X(D)^\perp, X(0i)} \text{ ax} \quad \frac{}{\vdash X(0o)^\perp, X(F)} \text{ ax} \\
 \frac{}{\vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(D)^\perp, X(F)} \otimes \\
 \frac{}{\vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(D) \multimap X(F)} \wp \\
 \frac{}{\vdash ?(X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ! (X(D) \multimap X(F))} ! \\
 \frac{}{\vdash ?(X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ?(X(1i) \otimes X(1o)^\perp), ! (X(D) \multimap X(F))} ?_{iw} \\
 \frac{}{\vdash ! (X(0i) \multimap X(0o)) \multimap (! (X(1i) \multimap X(1o)) \multimap ! (X(D) \multimap X(F)))} \forall \\
 \frac{}{\vdash \forall X ! (X(0i) \multimap X(0o)) \multimap (! (X(1i) \multimap X(1o)) \multimap ! (X(D) \multimap X(F)))} \forall
 \end{array}$$

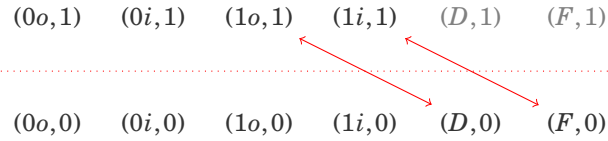
Le graphe correspondant est le suivant :



- la preuve représentant la liste $< 1 >$ est obtenue à l'aide d'un affaiblissement pour introduire $X(0i) \multimap X(0o)$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash X(D)^\perp, X(1i)} \text{ ax} \quad \frac{}{\vdash X(1o)^\perp, X(F)} \text{ ax} \\
 \frac{}{\vdash X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(D)^\perp, X(F)} \otimes \\
 \frac{}{\vdash X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(D) \multimap X(F)} \wp \\
 \frac{}{\vdash ?(X(1i) \otimes X(1o)^\perp), ! (X(D) \multimap X(F))} ! \\
 \frac{}{\vdash ?(X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ?(X(1i) \otimes X(1o)^\perp), ! (X(D) \multimap X(F))} ?_{iw} \\
 \frac{}{\vdash ! (X(0i) \multimap X(0o)) \multimap (! (X(1i) \multimap X(1o)) \multimap ! (X(D) \multimap X(F)))} \forall \\
 \frac{}{\vdash \forall X ! (X(0i) \multimap X(0o)) \multimap (! (X(1i) \multimap X(1o)) \multimap ! (X(D) \multimap X(F)))} \forall
 \end{array}$$

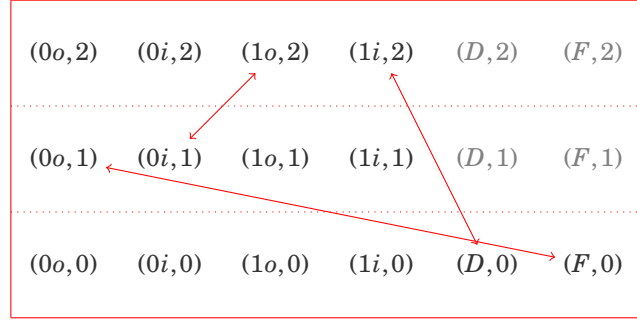
Son graphe est :



- la preuve représentant la liste $< 10 >$ est la suivante :

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash X(0i), X(F)^\perp} \text{ ax} \quad \frac{}{\vdash X(1i), X(0o)^\perp} \text{ ax} \\
 \frac{}{\vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i), X(F)^\perp} \otimes \quad \frac{}{\vdash X(D), X(1o)^\perp} \text{ ax} \\
 \frac{}{\vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(D), X(F)^\perp} \otimes \\
 \frac{}{\vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(D) \multimap X(F)} \wp \\
 \frac{}{\vdash ?(X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ?(X(1i) \otimes X(1o)^\perp), ! (X(D) \multimap X(F))} ! \\
 \frac{}{\vdash \forall X ! (X(0i) \multimap X(0o)) \multimap (! (X(1i) \multimap X(1o)) \multimap ! (X(D) \multimap X(F)))} \forall
 \end{array}$$

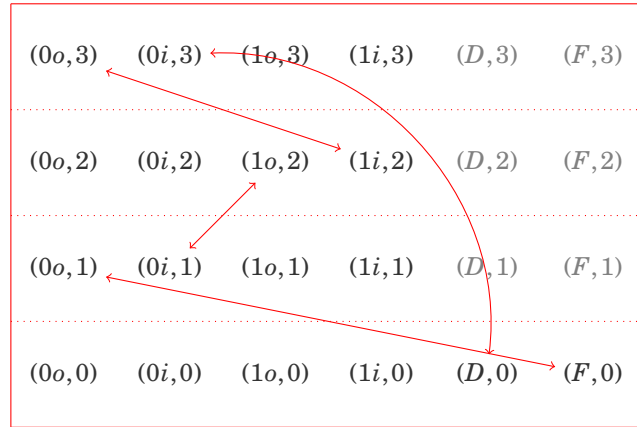
Et le graphe correspondant est :



- la preuve représentant la liste $\langle 010 \rangle$ est celle utilisant une contraction sur la première copie de $X \otimes X^\perp$, c'est-à-dire sur $X(0i) \otimes X(0o)^\perp$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash X(0i), X(F)^\perp} \text{ax} \quad \frac{}{\vdash X(1i), X(0o)^\perp} \text{ax} \quad \frac{}{\vdash X(Ai), X(1o)^\perp} \text{ax} \\
 \vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i), X(F)^\perp \quad \vdash X(Ai), X(1o)^\perp \\
 \vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(Ai), X(F)^\perp \quad \vdash X(D), X(Ao)^\perp \\
 \vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(Ai) \otimes X(Ao)^\perp, X(D), X(F)^\perp \\
 \vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(Ai) \otimes X(Ao)^\perp, X(D) \multimap X(F) \\
 \vdash ?(X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ?(X(1i) \otimes X(1o)^\perp), ?(X(Ai) \otimes X(Ao)^\perp), !(X(D) \multimap X(F)) \\
 \vdash ?(X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ?(X(1i) \otimes X(1o)^\perp), !(X(D) \multimap X(F)) \\
 \vdash \forall X !(X(0i) \multimap X(0o)) \multimap !(X(1i) \multimap X(1o)) \multimap !(X(D) \multimap X(F))
 \end{array}$$

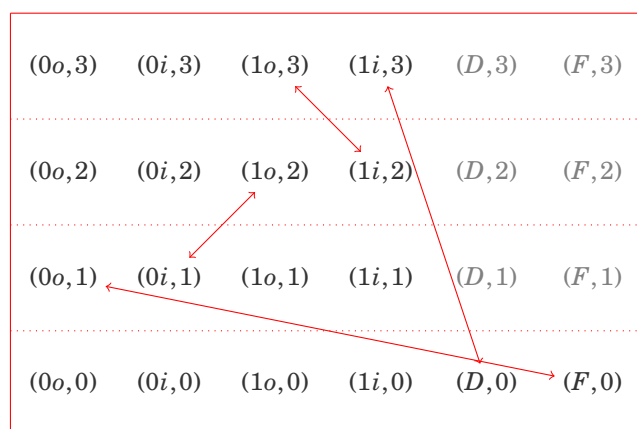
Son graphe est le suivant :



- la preuve représentant la liste $\langle 110 \rangle$ est celle utilisant une contraction sur la seconde copie de $X \otimes X^\perp$, c'est-à-dire sur $X(1i) \otimes X(1o)^\perp$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash X(0i), X(F)^\perp} \text{ax} \quad \frac{}{\vdash X(1i), X(0o)^\perp} \text{ax} \quad \frac{}{\vdash X(Ai), X(1o)^\perp} \text{ax} \\
 \vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i), X(F)^\perp \quad \vdash X(Ai), X(1o)^\perp \\
 \vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(Ai), X(F)^\perp \quad \vdash X(D), X(Ao)^\perp \\
 \vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(Ai) \otimes X(Ao)^\perp, X(D), X(F)^\perp \\
 \vdash X(0i) \otimes X(0o)^\perp, X(1i) \otimes X(1o)^\perp, X(Ai) \otimes X(Ao)^\perp, X(D) \multimap X(F) \\
 \vdash ?(X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ?(X(1i) \otimes X(1o)^\perp), ?(X(Ai) \otimes X(Ao)^\perp), !(X(D) \multimap X(F)) \\
 \vdash ?(X(0i) \otimes X(0o)^\perp), ?(X(1i) \otimes X(1o)^\perp), !(X(D) \multimap X(F)) \\
 \vdash \forall X !(X(0i) \multimap X(0o)) \multimap !(X(1i) \multimap X(1o)) \multimap !(X(D) \multimap X(F))
 \end{array}$$

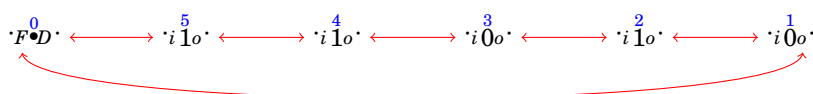
Le graphe correspondant à cette preuve est :



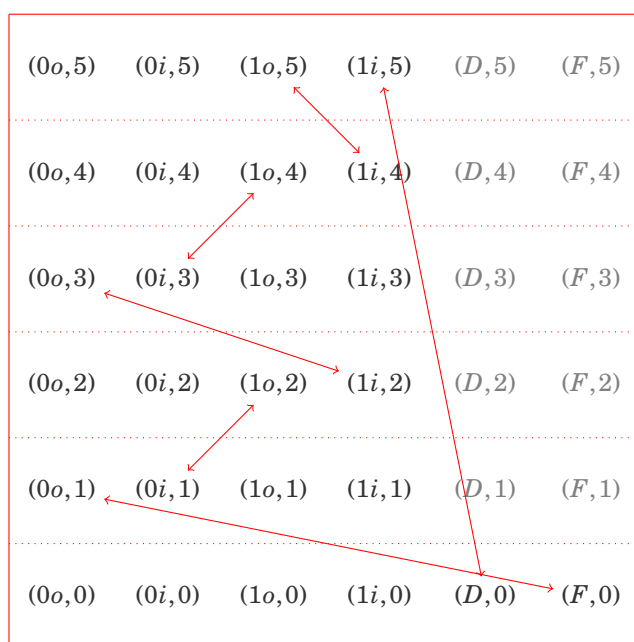
§11.1.11 On remarque que les arêtes des graphes décrivent un parcours de la liste : l'arête partant de $X(D)$ a pour but :

- $X(0i)$ lorsque la liste commence par un 0 ;
- $X(1i)$ lorsque la liste commence par un 1 ;

Les arêtes suivantes relient un $X(0o)$ (dans le cas d'un 0) ou un $X(1o)$ (dans le cas d'un 1) à un $X(0i)$ ou un $X(1i)$ selon que l'élément suivant dans la liste est un 0 ou un 1. Ceci explique notre choix de notation : $X(0i)$ (resp. $X(1i)$) est le point d'entrée (« input ») dans un 0 (resp. dans un 1), et $X(0o)$ (resp. $X(1o)$) est le point de sortie (« output ») d'un 0 (resp. d'un 1). On peut donc construire le graphe correspondant directement à partir de la liste. Par exemple, prenons la liste $\langle 11010 \rangle$. Alors on va construire le graphe dont les arêtes sont représentées dans la figure suivante :



En tenant compte du fait que chaque élément de la liste vit dans une tranche séparée (les tranches sont indiquées par les chiffres en bleu au-dessus des éléments de la liste), et donc chaque arête change de tranche, on obtient le graphe suivant :



§11.1.12 Les listes non vides de longueur n sont donc représentées par des matrices bloc 6×6 dont les coefficients sont des matrices $(n+1) \times (n+1)$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & l_{00} & 0 & l_{10} & d_0 & 0 \\ l_{00}^* & 0 & l_{01}^* & 0 & 0 & f_0^* \\ 0 & l_{01} & 0 & l_{11} & d_1 & 0 \\ l_{10}^* & 0 & l_{11}^* & 0 & 0 & f_1^* \\ d_0^* & 0 & d_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 & f_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les termes $l_{00}, l_{01}, l_{10}, l_{11}$ correspondent aux arêtes entre les éléments de la liste :

- l_{00} correspond aux arêtes entre $X(0o)$ et $X(0i)$, c'est-à-dire allant d'un 0 dans un 0 ;
- l_{10} correspond aux arêtes entre $X(1o)$ et $X(0i)$, c'est-à-dire allant d'un 1 dans un 0 ;
- l_{01} correspond aux arêtes entre $X(0o)$ et $X(1i)$, c'est-à-dire allant d'un 0 dans un 1 ;
- l_{11} correspond aux arêtes entre $X(1o)$ et $X(1i)$, c'est-à-dire allant d'un 1 dans un 1 ;

Les termes d_0, d_1 correspondent aux arêtes entre $X(D)$ et l'un parmi $X(0i)$ et $X(1o)$ (selon que la suite commence par un 0 ou un 1), et les termes f_0, f_1 correspondent aux arêtes entre l'un parmi $X(1i)$ et $X(1o)$ (selon que la suite termine par un 1 ou un 0). En particulier, un seul des termes parmi d_0, d_1 (resp. f_0, f_1) est non-nul.

§11.1.13 Comme dans le cas de la représentation unaire des entiers, on va plonger les matrices $(n+1) \times (n+1)$ dans le facteur hyperfini $\mathfrak{R}$ afin d'obtenir une représentation uniforme des listes : une liste sera représentée par un opérateur dans $\mathfrak{M}_6(\mathfrak{R})$ satisfaisant certaines propriétés. Pour énoncer celles-ci, on définit, étant donné une suite $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ représentant un entier n , les ensembles :

$$\begin{aligned} I_{00}^n &= \{1 \leq i \leq k \mid a_i = a_{i+1} = 0\} \\ I_{01}^n &= \{1 \leq i \leq k \mid a_i = 0, a_{i+1} = 1\} \\ I_{10}^n &= \{1 \leq i \leq k \mid a_i = 1, a_{i+1} = 0\} \\ I_{11}^n &= \{1 \leq i \leq k \mid a_i = a_{i+1} = 1\} \\ I_{D0}^n &= \{i = 1 \mid a_i = 0\} \\ I_{D1}^n &= \{i = 1 \mid a_i = 1\} \\ I_{0F}^n &= \{i = k \mid a_i = 0\} \\ I_{1F}^n &= \{i = k \mid a_i = 1\} \end{aligned}$$

§11.1.14 DÉFINITION (ENTIERS - REPRÉSENTATION BINAIRE).

Un opérateur $u \in \mathfrak{M}_6(\mathbf{C})$ est une *représentation binaire* d'un entier $n = \sum_{i=0}^k a_i 2^i$ lorsqu'il existe des projections $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_k$ dans $\mathfrak{R}$ vérifiant $\sum_{i=0}^k \pi_i = 1$ et telles que :

$$u = \begin{pmatrix} 0 & l_{00} & 0 & l_{10} & l_{D0} & 0 \\ l_{00}^* & 0 & l_{01}^* & 0 & 0 & l_{0F}^* \\ 0 & l_{01} & 0 & l_{11} & l_{D1} & 0 \\ l_{10}^* & 0 & l_{11}^* & 0 & 0 & l_{1F}^* \\ l_{D0}^* & 0 & l_{D1}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{0F} & 0 & l_{1F} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients sont des isométries partielles satisfaisant les équations (où $\pi_{k+1} = \pi_0$) :

$$\begin{aligned} l_{\star} &= \sum_{i \in I_{\star}^n} \pi_{i+1} l_{\star} \pi_i \quad (\star \in \{00, 01, 10, 11, D0, D1, 0F, 1F\}) \\ \pi_0 &= (l_{0F} + l_{1F})(l_{00} + l_{01} + l_{10} + l_{11})^{k-1}(l_{D0} + l_{D1}) \end{aligned}$$

§11.1.15 PROPOSITION.

Soit $N \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{A})$ une représentation binaire de l'entier n dont l'écriture en binaire est de longueur k . Alors il existe un plongement $\phi : \mathfrak{M}_{k+1}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathfrak{A}$ tel que $\text{Id} \otimes \phi(M) = N$, où M est la représentation matricielle binaire de l'entier n .

Démonstration. Soit N une représentation de l'entier $n \in \mathbf{N}$ dans $\mathfrak{A}$, et $\pi_0, \dots, \pi_k$ les projections associées. Comme dans le cas des représentations unaires, on montre aisément que les projections π_i sont deux à deux équivalentes au sens de Murray et von Neumann.

On définit maintenant un plongement ϕ de $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$ dans $\mathfrak{A}$ par :

$$\phi : (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \mapsto \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{i,j} u_{i,j}$$

avec :

$$u_{i,j} = \begin{cases} (l_{00} + l_{01} + l_{10} + l_{11})^{j-1} (l_{D0} + l_{D1}) & \text{si } i = 0 \\ (l_{00} + l_{01} + l_{10} + l_{11})^{j-1} & \text{si } i < j \text{ et } i \neq 0 \\ ((l_{00} + l_{01} + l_{10} + l_{11})^{i-1} (l_{D0} + l_{D1}))^* & \text{si } j = 0 \\ ((l_{00} + l_{01} + l_{10} + l_{11})^{i-1})^* & \text{si } i > j \text{ et } j \neq 0 \\ \pi_k & \text{si } i = j = k \end{cases}$$

On vérifie alors que l'image de la représentation matricielle de n par le plongement ϕ est égale à N . ☺

§11.1.16 PROPOSITION.

Soit N, N' deux représentations binaires d'un même entier n . Alors il existe un unitaire $u \in \mathfrak{A}$ tel que $(\text{Id} \otimes u)N(\text{Id} \otimes u)^* = N'$.

Démonstration. La preuve est similaire au cas unaire. On note $\pi_0, \dots, \pi_n$ (resp. $v_0, \dots, v_n$) les projections et l_* (resp. l'_*) les isométries partielles associées à N (resp. N'). Il est clair que π_0 et v_0 sont équivalentes au sens de Murray et von Neumann. Il existe donc une isométrie partielle v telle que $vv^* = v_0$ et $v^*v = \pi_0$. On définit alors les isométries partielles :

$$v_i = ((l'_{00} + l'_{01} + l'_{10} + l'_{11})^{i-1} (l'_{D0} + l'_{D1})) v ((l_{00} + l_{01} + l_{10} + l_{11})^{i-1} (l_{D0} + l_{D1}))^*$$

On vérifie alors aisément que :

$$\begin{aligned} v_i v_i^* &= v_i \\ v_i^* v_i &= \pi_i \end{aligned}$$

La somme $u = \sum_{i=0}^n v_i$ est alors un unitaire et $(\text{Id} \otimes u)N(\text{Id} \otimes u)^* = N'$. ☺

11.2 Paires normatives

Déterminant

§11.2.1 On souhaite représenter les algorithmes par un opérateur. Cependant, le résultat du calcul de l'algorithme sur l'entier n ne devrait pas dépendre du choix d'une représentation de n . La notion de *paire normative* permet de résoudre ce problème.

§11.2.2 DÉFINITION (PAIRE NORMATIVE (GIRARD)).

Soient deux sous-algèbres $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{A}$. La paire $(\mathfrak{N}, \mathfrak{D})$ est une *paire normative* si :

- L'algèbre $\mathfrak{N}$ est isomorphe à $\mathfrak{A}$;
- Pour tout $\Phi \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{D})$, et toutes représentations N, N' d'un même entier dans $\mathfrak{M}_6(\mathfrak{N})$,

$$\text{ldet}(1 - \Phi N) = \text{ldet}(1 - \Phi N')$$

§11.2.3 Le fait que le déterminant ne dépend pas de la représentation de l'entier permet alors d'écrire la définition suivante, celle de l'ensemble des entiers *reconnus* par un élément de $\mathfrak{D}$.

§11.2.4 DÉFINITION.

Soit $(\mathfrak{N}, \mathfrak{D})$ une paire normative, $\mathfrak{E}$ une algèbre de von Neumann finie de type I, et $\Phi \in \mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E}$. On note $[\Phi]$ l'ensemble des entiers reconnus par Φ :

$$[\Phi] = \{n \in \mathbf{N} \mid \text{ldet}(1 - (N \otimes 1_{\mathfrak{E}})\Phi) = 0\}$$

§11.2.5 PROPOSITION.

Soit S un ensemble et pour tout $s \in S$, $\mathfrak{N}_s = \mathfrak{R}$. Pour tout groupe G moyennable et toute action α de G sur S , l'algèbre $(\bigotimes_{s \in S} \mathfrak{N}_s) \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ est isomorphe à ${}^3 \mathfrak{R}$, où $\hat{\alpha}$ est l'action induite par α . Alors, pour tout $s \in S$, le couple $(\mathfrak{N}_s, \mathfrak{G})$ est une paire normative, où $\mathfrak{G}$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par G .

Démonstration. On notera $\mathfrak{M}$ l'algèbre $(\bigotimes_{s \in S} \mathfrak{N}_s) \rtimes_{\hat{\alpha}} G$. On notera $\mathfrak{G}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{M}$ engendrée par G — c'est-à-dire engendrée par $\{\lambda(h) \mid h \in G\}$ (voir Chapitre 3, Section 3.3.2). Finalement, on notera $\mathfrak{N}_s$ la sous-algèbre de $\mathfrak{M}$ engendrée par la copie $s \in S$ de $\mathfrak{N}$ dans le tenseur, c'est-à-dire engendrée par $\{\pi_a \mid a \in \bigotimes_{t \in S} \mathfrak{N}_t, \forall t \in S, t \neq s, a_t = 1\}$.

Soit alors N, N' deux représentations d'un même entier n dans $\mathfrak{M}_6(\mathfrak{N}_s)$. Par la proposition §11.1.16 il existe un unitaire $u \in \mathfrak{N}_s$ tel que $(\text{Id} \otimes u)N(\text{Id} \otimes u)^* = N'$. On considère alors l'unitaire $v = \bigotimes_{s \in S} u$ dans $\bigotimes_{s \in S} \mathfrak{N}_s$ et π_v l'unitaire de $\mathfrak{M}$ engendré par v . Pour tout $\phi \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{G}) \otimes \mathfrak{E}$, on remarque que v et ϕ commutent : en effet, si $\eta \in L^2(G, \bigotimes_{s \in S} \mathbb{H})$ est un vecteur, et $\lambda(h)$ est l'unitaire engendré par un élément $h \in G$, on a :

$$\begin{aligned} (\pi_u \lambda(h) \eta)(g) &= \pi_u v \eta(h^{-1}g) \\ &= \hat{\alpha}(gh^{-1})(u) \eta(h^{-1}g) \\ (\lambda(h) \pi_u \eta)(g) &= \lambda(h)(\hat{\alpha}(g^{-1})(u) \eta)(g) \\ &= \hat{\alpha}(g^{-1})(u) \eta(h^{-1}g) \end{aligned}$$

Or $\hat{\alpha}(g)(u) = u$ pour tout $g \in G$, d'où $\pi_u \lambda(h) = \lambda(h) \pi_u$. Finalement, puisque tout unitaire de la forme $\lambda(h)$ commute avec π_v , ce dernier commute avec tout élément de l'algèbre $\mathfrak{G}$ engendrée par $\{\lambda(h) \mid h \in G\}$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \text{ldet}(1 - ((\text{Id} \otimes u)N(\text{Id} \otimes u)^*) \otimes 1_{\mathfrak{E}} \phi) &= \text{ldet}(1 - ((\text{Id} \otimes u \otimes 1_{\mathfrak{E}})N \otimes 1_{\mathfrak{E}}(\text{Id} \otimes u \otimes A_{\mathfrak{E}})^*) \phi) \\ &= \text{ldet}(1 - N \otimes 1_{\mathfrak{E}}(\text{Id} \otimes u \otimes A_{\mathfrak{E}})^*) \phi((\text{Id} \otimes u \otimes 1_{\mathfrak{E}})) \\ &= \text{ldet}(1 - N \otimes 1_{\mathfrak{E}} \phi) \end{aligned}$$

☺

Nilpotence

§11.2.6 Le choix de travailler avec le déterminant nous impose de considérer les paires normatives dans $\mathfrak{R}$. En particulier, cela nous contraint à considérer uniquement des groupes moyennables dans la Proposition §11.2.5. En effet, il est nécessaire dans ce cas de se restreindre aux produits croisés produisant un facteur de type II_1 , puisque le déterminant de Fuglede-Kadison n'est défini que dans ce type d'algèbres. Or Girard déduit de sa condition sur le déterminant la nilpotence de l'opérateur $(N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}})\Phi$, et il n'utilise en réalité que la nilpotence dans ses preuves. On propose donc de simplement considérer une notion de paire normative définie sur la base de la nilpotence. On obtient alors les mêmes résultats que dans la section précédente, mais sans la restriction sur les groupes induite par l'utilisation du déterminant.

3. Ceci nous assure que le déterminant est bien défini.

§11.2.7 DÉFINITION (PAIRE NORMATIVE).

Soient deux sous-algèbres $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{D}$ d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$. La paire $(\mathfrak{N}, \mathfrak{D})$ est une *paire normative* si :

- L'algèbre $\mathfrak{N}$ est isomorphe à $\mathfrak{K}$;
- Pour tout $\Phi \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{D})$, et toutes représentations N, N' d'un même entier dans $\mathfrak{M}_6(\mathfrak{N})$,

$$\Phi N \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \Phi N' \text{ nilpotent}$$

§11.2.8 Cette généralisation nous permet d'obtenir une généralisation de la Proposition §11.2.5. En effet, puisque nous n'utilisons plus le déterminant, il est inutile de se restreindre aux groupes moyennables. En effet, cette restriction nous assurait l'existence d'une trace — et donc du déterminant — dans le produit croisé. Le passage à la nilpotence nous permet maintenant d'oublier cette restriction.

§11.2.9 PROPOSITION.

Soit S un ensemble et pour tout $s \in S$, $\mathfrak{N}_s = \mathfrak{K}$. Pour tout groupe G et toute action α de G sur S , l'algèbre $\mathfrak{M} = (\otimes_{s \in S} \mathfrak{N}_s) \rtimes_{\alpha} G$ contient une sous-algèbre engendrée par G que l'on notera $\mathfrak{G}$. Alors pour tout $s \in S$, le couple $(\mathfrak{N}_s, \mathfrak{G})$ est une paire normative.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition §11.2.5 : l'hypothèse de la moyennabilité du groupe G servait uniquement à nous assurer de l'existence du déterminant. Il suffit de plus de montrer l'une des deux implications, l'autre étant obtenue par symétrie. Comme nous l'avons déjà expliqué, si N, N' sont deux représentations d'un même entier, alors il existe un unitaire u tel que $(\text{Id} \otimes u)N(\text{Id} \otimes u)^* = N'$. On définit alors $v = \otimes_{s \in S} u$ et π_v l'unitaire de $\mathfrak{M}$ engendré par v . On montre alors, comme dans la preuve de la Proposition §11.2.5 (sans jamais utiliser le fait que G soit moyennable), que cet unitaire commutait avec les éléments de $\mathfrak{G}$. Le reste de la démonstration est simple : si $(\phi N)^k = 0$, alors $(\phi u N u^*)^k = (u \phi N u^*)^k = u(\phi N)^k u^* = 0$. $\odot$

§11.2.10 COROLLAIRE.

Soit $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations finies de $\mathbf{N}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{K}$. Alors $(\otimes_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{N}_n) \rtimes_{\alpha} \mathfrak{S}$ est le facteur hyperfini de type II_1 et $(\mathfrak{N}_0, \mathfrak{S})$ est une paire normative.

11.3 Caractérisation de co-NL

§11.3.1 DÉFINITION (OBSERVATION).

Soit $(\mathfrak{N}, \mathfrak{D})$ une paire normative. Une *observation* est la donnée d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{E}$ finie de type ⁴ I — l'algèbre des états — et d'un opérateur $\Phi \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{D}) \otimes \mathfrak{E}$.

§11.3.2 DÉFINITION.

Soit $(\mathfrak{N}, \mathfrak{D})$ une paire normative et Φ une observation. On note :

$$[\Phi] = \{n \in \mathbf{N} \mid \forall N_n \text{ représentant de } n, \Phi(N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}}) \text{ nilpotent}\}$$

§11.3.3 DÉFINITION.

Soit $(\mathfrak{N}, \mathfrak{D})$ une paire normative et $P \subset \cup_{i \in \mathbf{N}} \mathfrak{M}_6(\mathfrak{D}) \otimes \mathfrak{M}_i(\mathbf{C})$. On notera $\{P\}$ l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ reconnues par les éléments de P , c'est-à-dire :

$$\{P\} = \{[\phi] \mid \phi \in P\}$$

§11.3.4 DÉFINITION.

Soit $(\mathfrak{N}_0, \mathfrak{S})$ la paire normative définie dans le Corollaire §11.2.10. On note P_{NL} l'ensemble des opérateurs ϕ de $\cup_{i \in \mathbf{N}} \mathfrak{M}_6(S) \otimes \mathfrak{M}_i(\mathbf{C})$ tels que les coefficients de ϕ soient des combinaisons linéaires positives finies d'éléments de $\mathfrak{S}$.

4. Il s'agit d'un dialecte : la définition est la même, et il interagira comme tel.

§11.3.5 Dans cette section, on va montrer que $\{P_{NL}\} = co - NL$, l'ensemble des langages reconnus par une machine de Turing non déterministe en espace logarithmique. Pour cela, on introduit la notion de *machine à pointeurs non déterministe*, et l'on montrera qu'une telle machine peut être correctement représentée par une observation dans P_{NL} .

Machines à pointeurs non déterministes

§11.3.6 On va montrer que l'on peut coder certaines opérations à l'aide d'opérateurs dans P_{NL} . On définit une *machine à pointeurs non déterministe* comme la donnée :

- d'une bande d'entrée finie contenant des symboles $a_0, \dots, a_s$ avec $a_i \in \{0, 1\}$ ($i \neq 0$) et $a_0 = \star$ est un symbole permettant de repérer le début de la chaîne ;
- d'un ensemble fini d'états $\{q_0, q_1, \dots, q_e\}$, on supposera que q_0 est l'état initial ;
- d'un ensemble de pointeurs $p_1, \dots, p_p$ pouvant lire la valeur a_k se trouvant à la position $k = \#p_i \in \{0, \dots, s\}$;

On considère que la bande d'entrée est une boucle, c'est-à-dire que $a_{s+1} = a_0$. Les opérations sur les pointeurs sont alors les suivantes :

- $p_i +$: avancer d'un symbole ;
- $p_i -$: reculer d'un symbole ;

On note $P = \{p_i + \mid i \in \{1, \dots, p\}\} \cup \{p_i - \mid i \in \{1, \dots, p\}\}$.

§11.3.7 On suppose de plus donnée avec la machine une fonction de transition, c'est-à-dire une fonction : $A^p \times Q \rightarrow \mathcal{P}(P \times (Q \cup \{\text{accept}, \text{reject}\}))$ où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X . Quitte à augmenter le nombre d'états pour enregistrer les valeurs lues par certains pointeurs (dans le pire des cas, on le multiplie donc par 2 à la puissance le nombre de pointeurs moins 1), on peut se restreindre aux fonctions de transition qui dépendent de la valeur d'un unique pointeur : par exemple une machine ayant un seul état et une fonction de transition dépendant de la valeur de deux pointeurs peut être représentée par une machine à deux états dont la fonction de transition dépend de la valeur d'un seul pointeur parmi les deux utilisés.

Une entrée est *acceptée* (resp. *rejetée*) si après un nombre fini d'itérations chacune des branches de calcul est dans l'état accept (resp. au moins une des branches est dans l'état reject).

§11.3.8 On va montrer que l'on peut coder les opérations de base de ces machines à l'aide des opérateurs dans P_{NL} . La bande d'entrée sera représentée bien entendu par une représentation N d'une suite binaire, et on va considérer un opérateur ϕ dans l'algèbre $\mathcal{M}_6(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}$, où

$$\mathcal{E} = \underbrace{\mathcal{M}_6(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_6(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_6(\mathbb{C})}_{p \text{ copies}} \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$$

dont on distingue une base dont les éléments seront notés $(a_1, \dots, a_p, q)$ où $a_1, \dots, a_p$ sont des états contenant la valeur lue par les pointeurs, et q est un élément de l'ensemble :

$$\{\text{mouv}_i, \text{mouv-retour}_i, \text{retour}_i \mid 1 \leq i \leq p\} \cup \{\text{accept}, \text{reject}\} \cup \{q_0, \dots, q_e\}$$

On considèrera pour cela les projections $\pi_{start}, \pi_{end}, \pi_{00}, \pi_{01}, \pi_{10}, \pi_{11}$ de $\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})$ définies par :

$$\begin{aligned} \pi_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \pi_{0i} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \pi_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \pi_{1i} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \pi_{start} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \pi_{end} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On utilisera également les notations $\pi_0. = \pi_{0i} + \pi_{0o}$ et $\pi_1. = \pi_{1o} + \pi_{1i}$.

§11.3.9 Les opérations qu'une observation peut effectuer sont en nombre assez limité : il est possible de déplacer un pointeur et de changer d'état. Nous allons décrire ces deux opérations. La définition d'une observation associée à une machine à pointeur non-deterministe sera construite à partir de la fonction de transition. À chaque élément a de $A^p \times Q$ est associé un ensemble T d'éléments de $P \times (Q \cup \{\text{accept}, \text{reject}\})$. Alors pour chaque $t \in T$, on peut définir un opérateur $\phi_{a,t}$ dont l'action correspond à effectuer t lorsque la machine est dans l'état a . On représente alors l'action de la machine sur a comme la somme $\sum_{t \in T} (1/\text{Card}(T)) \phi_{a,t}$. La fonction de transition μ est alors simplement représentée par l'opérateur :

$$[\mu] = \sum_{a \in A^p \times Q} \sum_{t \in \mu(a)} \frac{1}{\text{Card}(\mu(a))} \phi_{a,t}$$

On va maintenant expliquer comment définir ces opérateurs $\phi_{a,t}$.

§11.3.10 Afin de simplifier les définitions, nous allons commencer par poser quelques notations. Ainsi, nous utiliserons dans l'algèbre $\mathfrak{E}$ des états un ensemble relativement simple d'opérateurs. La seule opération dont nous avons besoin au niveau des états est le passage d'un état q à un état q' (éventuellement avec $q = q'$). Cette opération sera effectuée par un opérateur noté $(q \rightarrow q')$. Ainsi, si $q = (a_1, \dots, a_p, e)$ et $q' = (a'_1, \dots, a'_p, e')$, cet opérateur est défini par :

$$(q \rightarrow q') = (a_1 \rightarrow a'_1) \otimes (a_2 \rightarrow a'_2) \otimes \dots \otimes (a_p \rightarrow a'_p) \otimes (e \rightarrow e')$$

avec :

$$(p \rightarrow p') = \begin{matrix} & p \\ p' & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (p \in \{a_1, \dots, a_p, e\})$$

On notera également $(S \rightarrow a'_i)$ où S est un ensemble d'états, et on écrira $(\rightarrow a'_i)$ l'élément qui passe de n'importe quel état à a'_i (si X est l'ensemble des valeurs possibles pour a_i , c'est un raccourci de notation pour $(X \rightarrow a'_i)$).

Dans la plupart des cas la fonction de transition aura le même comportement sur tout un ensemble d'états. Par exemple, une transition ne dépendant que de la valeur d'un sous-ensemble $p_{i_1}, \dots, p_{i_l}$ des pointeurs et d'un état e sera représentée par l'opérateur :

$$([a_{i_1} \rightarrow a'_{i_1}]_{i_1}; \dots; [a_{i_l} \rightarrow a'_{i_l}]_{i_l}; e \rightarrow e') = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_p \otimes (e \rightarrow e')$$

où on définit $u_i = (a_{i_j} \rightarrow a'_{i_j})$ lorsque $\exists j, i = i_j$ et $u_i = \text{Id}$ sinon.

§11.3.11 Avancer un pointeur, lire la valeur et changer d'état.

On veut avancer le pointeur k dans l'état $q = (a_1, \dots, a_p; e)$, lire la valeur a'_k se trouvant au nouvel emplacement du pointeur et changer l'état en $q' = (a_1, \dots, a_{k-1}, a'_k, a_{k+1}, \dots, a_p; e')$. On utilise pour cela l'opérateur :

$$\begin{aligned} m_k(q; e \rightarrow e') &= [\text{out}] \otimes \tau_{0,k} \otimes (e \rightarrow \text{mouv}_k) \\ la_{k,0}(q; e \rightarrow e') &= \pi_{0i} \otimes \tau_{0,k} \otimes ([\rightarrow \pi_{0i}]_k; \text{mouv}_k \rightarrow e') \\ la_{k,1}(q; e \rightarrow e') &= \pi_{1i} \otimes \tau_{0,k} \otimes ([\rightarrow \pi_{1i}]_k; \text{mouv}_k \rightarrow e') \\ la_{k,e}(q; e \rightarrow e') &= \pi_{end} \otimes \tau_{0,k} \otimes ([\rightarrow \pi_e]_k; \text{mouv}_k \rightarrow e') \end{aligned}$$

où $[\text{out}]$ est la matrice :

$$[\text{out}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'opérateur permettant de représenter cette transition est donc $\alpha_k(q; e \rightarrow e') = m_k(q; e \rightarrow e') + la_{k,0}(q; e \rightarrow e') + la_{k,1}(q; e \rightarrow e') + la_{k,e}(q; e \rightarrow e')$.

§11.3.12 Reculer un pointeur, lire la valeur et changer d'état.

Pour reculer le pointeur k dans l'état $q = (a_1, \dots, a_p; e)$, lire la valeur du symbole a'_k et changer l'état en $q' = (a_1, \dots, a_{k-1}, a'_k, a_{k+1}, \dots, a_p; e')$. On utilise pour cela les opérateurs :

$$\begin{aligned} m_k(q; e \rightarrow e') &= [\text{in}] \otimes \tau_{0,k} \otimes (e \rightarrow \text{mouv}_k) \\ lr_{k,0}(q; e \rightarrow e') &= \pi_{0o} \otimes \tau_{0,k} \otimes ([\rightarrow \pi_{0o}]_k; \text{mouv}_k \rightarrow e') \\ lr_{k,1}(q; e \rightarrow e') &= \pi_{1o} \otimes \tau_{0,k} \otimes ([\rightarrow \pi_{1o}]_k; \text{mouv}_k \rightarrow e') \\ lr_{k,s}(q; e \rightarrow e') &= \pi_{start} \otimes \tau_{0,k} \otimes ([\rightarrow \pi_{start}]_k; \text{mouv}_k \rightarrow e') \end{aligned}$$

où $[in]$ est la matrice :

$$[in] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'opérateur permettant de représenter cette transition est alors $\rho_k(q; e \rightarrow e') = m_k(q; e \rightarrow e') + lr_{k,0}(q; e \rightarrow e') + lr_{k,1}(q; e \rightarrow e') + lr_{k,s}(q; e \rightarrow e')$.

§11.3.13 **Rejet.**

Dans le cas d'un rejet, on veut faire boucler l'opérateur. Cependant, celui-ci ne doit pas boucler dans tous les cas mais seulement si l'état reject est atteint. Une solution simple comme d'utiliser l'opérateur suivant ne convient donc pas :

$$\text{reject}_{\text{naif}} = \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbb{C})} \otimes \text{Id} \otimes \pi_{\text{reject}}$$

En effet, dans ce cas, $N_n^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, et le calcul suivant nous assure que le calcul va boucler :

$$((N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}}) \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbb{C})} \otimes \text{Id} \otimes \pi_{\text{reject}})^k = (N_n \otimes \pi_{\text{reject}})^k = N_n^k \otimes \pi_{\text{reject}}$$

Cependant, puisque le terme $\text{reject}_{\text{naif}}$ apparaît dans l'opérateur final Φ (construit, on le rappelle, comme une somme d'opérateurs de base), il est impossible que $\Phi(N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}})$ soit nilpotent⁵. Il faut donc ruser et s'assurer de la création d'une boucle *si et seulement si* l'état de rejet est atteint. Pour cela, on propose de faire revenir la machine à son état initial lors d'un rejet. On ajoute donc à la machine des états retour_i et mouv-retour_i pour $i = 1, \dots, p$ et on définit :

$$\begin{aligned} rm_i &= [in] \otimes \tau_{0,i} \otimes (\text{retour}_i \rightarrow \text{mouv-retour}_i) \\ rr_i^0 &= \pi_{0o} \otimes \tau_{0,i} \otimes ([\rightarrow \pi_{0o}]_i; \text{mouv-retour}_i \rightarrow \text{retour}_i) \\ rr_i^1 &= \pi_{1o} \otimes \tau_{0,i} \otimes ([\rightarrow \pi_{1o}]_i; \text{mouv-retour}_i \rightarrow \text{retour}_i) \\ rc_i &= \pi_{\text{start}} \otimes \tau_{0,i} \otimes ([\rightarrow \pi_{\text{start}}]_i; \text{mouv-retour}_i \rightarrow \text{retour}_{i+1}) \quad (1 \leq i < p) \\ rc_p &= \pi_{\text{start}} \otimes \tau_{0,p} \otimes ([\rightarrow \pi_{\text{start}}]_p; \text{mouv-retour}_p \rightarrow q_0) \end{aligned}$$

L'opérateur de base représentant le rejet sera alors simplement la somme **reject** des opérateurs rm_i, rr_i^0, rr_i^1 et rc_i pour $i = 1, \dots, p$ et de l'opérateur $1 \otimes 1 \otimes (\text{reject} \rightarrow \text{retour}_0)$ qui permet de lancer la réinitialisation lorsque l'on se trouve dans l'état reject.

§11.3.14 DÉFINITION.

Soit M une machine à pointeurs non déterministe dont la fonction de transition sera notée μ . On définit alors l'opérateur $[M]$ comme l'opérateur $[\mu] + \mathbf{reject}$, où μ est défini comme dans le paragraphe §11.3.9.

§11.3.15 DÉFINITION.

Soit M une machine à pointeurs non déterministe et e un état de M . On définit M_e comme la machine M dans laquelle l'état initial est e .

Une machine est dite *acyclique* lorsque pour tout état e et entrée $n \in \mathbf{N}$, le calcul de $M_e(n)$ termine.

§11.3.16 LEMME.

Soit M une machine à pointeur non déterministe acyclique. Alors l'opérateur $[M]$ associé représente M , c'est-à-dire que pour tout entier n et représentation N_n de n :

$$M \text{ accepte } n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow [M](N_n \otimes 1) \text{ est nilpotent}$$

5. Il faut penser que $N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}} = N_n \otimes \text{Id}_{\otimes_{n=1}^{n+1} \mathfrak{M}_6(\mathbb{C})} \otimes \pi_{\text{reject}} + N_n \otimes \text{Id}_{\otimes_{n=1}^{n+1} \mathfrak{M}_6(\mathbb{C})} \otimes (1 - \pi_{\text{reject}})$.

Démonstration. Soit n un entier naturel et N_n une représentation de n . Du fait de la définition de la représentation du rejet, il est clair que si une branche de la machine M termine sur l'état reject, l'opérateur $[M](N_n \otimes 1)$ ne sera pas nilpotent. Il nous faut donc simplement montrer que si la machine ne termine pas sur un rejet, l'opérateur $[M](N_n \otimes 1)$ sera nilpotent. On va en réalité montrer la réciproque, et on suppose donc que $[M]N_n$ n'est pas nilpotent. Cette direction est bien plus délicate que l'autre : en effet, puisque l'on considère le produit $[M](N_n \otimes 1)$, l'entier — ou plutôt sa représentation — N_n est donc donné en argument à la machine (sa représentation $[M]$) dans tous les états simultanément. Ainsi, si la restriction $[M](N_n \otimes 1)\pi_1$ va enclencher la simulation de la machine, le calcul ne se résume pas à cela : il est tout à fait possible que $[M](N_n \otimes 1)\pi_i$ boucle ($i \neq 1$) tandis que $([M](N_n \otimes 1))^k \pi_1 = 0$ pour une valeur suffisamment grande de k — $[M](N_n \otimes 1)$ serait donc « partiellement nilpotent ». Cependant, du fait de la représentation du rejet choisie, et du fait que la machine M soit acyclique, l'opérateur $[M](N_n \otimes 1)$ ne peut être nilpotent sans passer par l'état de rejet. Or une fois l'état de rejet atteint la simulation de la machine M revient à son état initial, c'est-à-dire l'état atteint après p (le nombre de pointeur) itérations du calcul, c'est-à-dire l'état atteint lors du calcul $([M](N_n \otimes 1))^p \pi_1$. Ainsi, on a montré que $[M](N_n \otimes 1)$ n'est pas nilpotent si et seulement si $([M](N_n \otimes 1))^k \pi_1 \neq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Or il est clair que si $([M](N_n \otimes 1))^k \pi_1 \neq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, la machine M rejette nécessairement l'entrée n . $\odot$

Caractérisation de co-NL

§11.3.17 LEMME.

On fixe la paire normative $(\mathfrak{N}_0, \mathfrak{S})$ définie dans le Corollaire §11.2.10 et on note $\mathfrak{R} = (\otimes_{n \geq 0} \mathfrak{R}) \rtimes \mathfrak{S}$. Soit N_n une représentation binaire d'un entier n dans $\mathfrak{M}_6(\mathfrak{N}_0)$ et Φ une observation dans $\mathfrak{M}_6(\mathfrak{S})$ appartenant à P_{NL} . Alors il existe un entier k et un morphisme injectif $\psi : \mathfrak{M}_k(\mathbf{C}) \rightarrow \mathfrak{R}$ et deux matrices $M \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{M}_k(\mathbf{C}))$ et $\tilde{\Phi} \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{M}_k(\mathbf{C})) \otimes \mathfrak{E}$ tels que $\text{Id} \otimes \psi(M) = (N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}})$ et $\text{Id} \otimes \psi \otimes \text{Id}_{\mathfrak{E}}(\tilde{\Phi}) = \Phi$.

Démonstration. On notera n l'entier représenté par N_n et $R \in \mathfrak{M}_{6(n+1)}(\mathbf{C})$ la représentation matricielle de n . Alors il existe un morphisme $\theta : \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathfrak{R}$ tel que $\text{Id} \otimes \theta(R) = N_n$ par la Proposition §11.1.15. En composant θ avec l'inclusion $\mu : \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C}) \rightarrow \otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$, $x \mapsto x \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$, on a :

$$\text{Id} \otimes \left(\bigotimes_{n=0}^N \theta(\mu(R)) \right) = \tilde{N}_n \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{N \text{ copies}}$$

où $\tilde{N}_n$ est la représentation de n dans $\mathfrak{M}_6(\mathbf{C}) \otimes \mathfrak{R}$ (on rappelle que la représentation N_n de l'énoncé est un élément de $\mathfrak{M}_6(\mathbf{C}) \otimes \mathfrak{R}$).

De plus, Φ étant une observation, il contient un nombre fini d'éléments engendrés par les éléments de $\mathfrak{S}$, et il appartient donc à la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{S}_N$ pour un entier N fixé, c'est-à-dire la sous-algèbre engendrée par $\{\lambda(\sigma) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_N\}$. On considère alors l'algèbre $(\otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})) \rtimes \mathfrak{S}_N$. Celle-ci est isomorphe à une algèbre de matrices $\mathfrak{M}_k(\mathbf{C})$: l'algèbre $\otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$ peut être représentée comme agissant sur l'espace de Hilbert $\mathbf{C}^{N(n+1)}$, et le produit croisé $(\otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})) \rtimes \mathfrak{S}_N$ est alors défini comme une sous-algèbre $\mathfrak{J}$ de l'algèbre $\mathcal{L}(L^2(\mathfrak{S}_N, \mathbf{C}^{(n+1)^N})) \cong \mathfrak{M}_{(n+1)^N N!}(\mathbf{C})$. On veut alors montrer que $(N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}})$ et Φ sont l'image de matrices dans $\mathfrak{J}$ par un morphisme injectif ψ qu'il nous reste à définir.

On note α l'action de $\mathfrak{S}_N$ sur $\otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$. Par définition, $\mathfrak{J} = (\otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})) \rtimes \mathfrak{S}_N$ est engendrée par les deux familles d'unitaires :

- $\lambda_{\alpha}(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_N$;
- $\pi_{\alpha}(x)$ pour x dans $\otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$.

On note γ l'action de $\mathfrak{S}$ sur $\otimes_{n=0}^{\infty} \mathfrak{R}$. Alors $\mathfrak{R} = (\otimes_{n \geq 0} \mathfrak{R}) \rtimes \mathfrak{S}$ est engendrée par les familles :

- $\lambda_{\gamma}(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}$;
- $\pi_{\gamma}(x)$ pour x dans $\otimes_{n \geq 0} \mathfrak{R}$.

On rappelle que Φ est une observation et ne contient donc qu'un nombre fini d'éléments de la forme $\lambda_\gamma(\sigma)$. De plus, N_n est l'image par θ d'une matrice dans $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$. En notant β l'action de $\mathfrak{S}_N$ sur $\bigotimes_{n=0}^N \mathfrak{R}$, le calcul a donc lieu dans la sous-algèbre $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{R}$ engendrée par :

- $\lambda_\beta(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_N$;
- $\pi_\beta(\bigotimes_{n=0}^N \theta(x))$ pour x dans $\bigotimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$.

On rappelle que Φ est une matrice dont les coefficients sont des combinaisons linéaires finies à coefficients positifs d'éléments de la forme $\lambda_\gamma(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_N$, c'est-à-dire (on note k la dimension de l'algèbre des états)

$$\Phi = \left(\sum_{i \in I_{a,b}} \alpha_{a,b}^i \lambda_\gamma(\sigma_{a,b}^i) \right)_{1 \leq a, b \leq 6k}$$

On peut donc associer à Φ la matrice $\bar{\Phi}$ définie comme $\bar{\Phi} = (\sum_{i \in I_{a,b}} \alpha_{a,b}^i \lambda_a(\sigma_{a,b}^i))_{1 \leq a, b \leq 6k}$. On utilise maintenant un théorème qui énonce que le produit croisé d'une algèbre et d'un groupe ne dépend pas de la représentation choisie (Théorème §3.3.38). L'algèbre $\bigotimes_{n=0}^N$ est représentée (fidèlement) par le morphisme $\pi_\beta \circ \bigotimes_{n=0}^\infty \theta$. On en déduit qu'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{J}$ dans l'algèbre engendrée par les $\lambda_\beta(\sigma)$ ($\sigma \in \mathfrak{S}_N$) et les $\pi_\beta \circ \bigotimes_{n=0}^\infty \theta(x)$ ($x \in \bigotimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})$). Cet isomorphisme définit donc un morphisme injectif ω de $\mathfrak{J}$ dans $\mathfrak{J}$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \omega(\pi_\alpha(x)) &= \pi_\beta\left(\bigotimes_{n=0}^N \theta(x)\right) \\ \lambda_\alpha(\sigma) &\mapsto \lambda_\beta(\sigma) \end{aligned}$$

On notera ι l'inclusion $\bigotimes_{n=0}^N \mathfrak{R} \subset \bigotimes_{n=0}^\infty \mathfrak{R}$ et ν l'inclusion $\mathfrak{S}_N \subset \mathfrak{S}$. On veut utiliser le même théorème qu'auparavant, mais ce n'est pas aussi immédiat. On notera $\mathfrak{S}_N \backslash \mathfrak{S}$ l'ensemble des orbites de $\mathfrak{S}$ pour l'action de $\mathfrak{S}_N$ par multiplication à gauche, et on choisit un représentant $\bar{\tau}$ dans chaque orbite. On rappelle que l'ensemble des orbites est une partition de $\mathfrak{S}$ et que $\mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_N \backslash \mathfrak{S}$ est en bijection avec $\mathfrak{S}$. De ce fait, on a $L^2(\mathfrak{S}_N, L^2(\mathfrak{S}_N \backslash \mathfrak{S}, \bigotimes_{n=0}^\infty \mathbb{H}))$ est unitairement équivalent à $L^2(\mathfrak{S}, \bigotimes_{n=0}^\infty \mathbb{H})$. On va donc représenter $\bigotimes_{n=0}^N \mathfrak{R}$ sur cet espace de Hilbert et montrer que cette représentation correspond avec π_γ . Pour $x \in \bigotimes_{n=0}^N \mathfrak{R}$, on définit $\rho(x)$ par :

$$\rho(x)\xi(\bar{\tau}) = \gamma(\bar{\tau}^{-1})(\iota(x))\xi(\bar{\tau})$$

Cette représentation est bien entendu fidèle. On peut alors définir le produit croisé construit à partir de cette représentation sur $L^2(\mathfrak{S}_N, L^2(\mathfrak{S}_N \backslash \mathfrak{S}, \bigotimes_{n=0}^\infty \mathbb{H}))$. Celui-ci est engendré par les opérateurs (ξ est un élément de l'espace de Hilbert $L^2(\mathfrak{S}_N, L^2(\mathfrak{S}_N \backslash \mathfrak{S}, \bigotimes_{n=0}^\infty \mathbb{H}))$) :

$$\begin{aligned} \lambda(\nu)\xi(\bar{\tau})(\sigma) &= \xi(\bar{\tau})(\nu^{-1}\sigma) \\ \pi(x)\xi(\bar{\tau})(\sigma) &= \rho(\beta(\sigma^{-1})(x))\xi(\bar{\tau})(\sigma) \\ &= \gamma(\bar{\tau}^{-1})(\gamma(\sigma^{-1})(\iota(x)))\xi(\bar{\tau})(\sigma) \\ &= \gamma(\bar{\tau}^{-1}\sigma^{-1})(\iota(x))\xi(\bar{\tau})(\sigma) \\ &= \gamma((\sigma\bar{\tau})^{-1})(\iota(x))\xi(\bar{\tau})(\sigma) \end{aligned}$$

Via l'identification de $L^2(\mathfrak{S}_N, L^2(\mathfrak{S}_N \backslash \mathfrak{S}, \bigotimes_{n=0}^\infty \mathbb{H}))$ et $L^2(\mathfrak{S}, \bigotimes_{n=0}^\infty \mathbb{H})$, on a donc (on note maintenant $\xi \in L^2(\mathfrak{S}_N, L^2(\mathfrak{S}_N \backslash \mathfrak{S}, \bigotimes_{n=0}^\infty \mathbb{H}))$) :

$$\begin{aligned} \lambda(\nu)\xi(\sigma\bar{\tau}) &= \xi(\nu^{-1}\sigma\bar{\tau}) \\ &= \lambda_\gamma(\nu)\xi(\sigma\bar{\tau}) \\ \pi(x)\xi(\sigma\bar{\tau}u) &= \gamma((\sigma\bar{\tau})^{-1})(\iota(x))\xi(\sigma\bar{\tau}) \\ &= \pi_\gamma(\iota(x))\xi(\sigma\bar{\tau}) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème on obtient alors l'existence d'un morphisme injectif ζ de $\mathfrak{J}$ dans $\mathfrak{R}$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \pi_\beta(x) &\mapsto \pi_\gamma(\iota(x)) \\ \lambda_\beta(\sigma) &\mapsto \lambda_\gamma(\sigma) \end{aligned}$$

Voici une illustration de la situation :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{S}_N & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & (\otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C})) \rtimes_\alpha \mathfrak{S}_N & \xleftarrow{\pi_\alpha} & \otimes_{n=0}^N \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C}) \\
 \parallel & & \downarrow \omega & & \downarrow \otimes_{n=0}^N \theta \\
 \mathfrak{S}_N & \xrightarrow{\lambda_\beta} & (\otimes_{n=0}^N \mathfrak{R}) \rtimes_\beta \mathfrak{S}_N & \xleftarrow{\pi_\beta} & \otimes_{n=0}^N \mathfrak{R} \\
 \downarrow \subset & & \downarrow \zeta & & \downarrow \iota \\
 \mathfrak{S} & \xrightarrow{\lambda_\gamma} & (\otimes_{n \geq 0} \mathfrak{R}) \rtimes_\gamma \mathfrak{S} & \xleftarrow{\pi_\gamma} & \otimes_{n=0}^\infty \mathfrak{R}
 \end{array}$$

On définit maintenant $\psi : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{K}$ par $\psi = \zeta \circ \omega$. En remarquant que $N_n = \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})} \otimes (\pi_\gamma(\iota \circ \mu(\bar{N}_n)))$, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})} \otimes \psi(M) &= \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})} \otimes \psi(\text{Id} \otimes \pi_\alpha(\text{Id} \otimes \mu)(R)) \\
 &= \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})} \otimes \pi_\gamma(\iota \circ \bigotimes_{n=0}^N \theta(\mu(R))) \\
 &= \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})} \otimes \pi_\gamma(\iota(\bar{N}_n \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)) \\
 &= \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})} \otimes \pi_\gamma(\iota \circ \mu(\bar{N}_n)) \\
 &= N_n \\
 \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})} \otimes \psi \otimes \text{Id}_{\mathfrak{E}}(\Phi) &= \left(\sum_{i \in I_{a,b}} \alpha_{a,b}^i \psi(\lambda_\alpha(\sigma_{a,b}^i)) \right)_{1 \leq a,b \leq 6k} \\
 &= \left(\sum_{i \in I_{a,b}} \alpha_{a,b}^i \lambda_\gamma(\sigma_{a,b}^i) \right)_{1 \leq a,b \leq 6k} \\
 &= \Phi
 \end{aligned}$$

Le morphisme ψ vérifie donc bien les conditions voulues. ☺

§11.3.18 THÉORÈME.

En gardant les notations de la définition précédente :

$$\{P_{NL}\} = co - NL$$

Démonstration. On montre dans un premier temps l'inclusion $\{P_{NL}\} \subset co - NL$. Soit Φ une observation dans P_{NL} , $\mathfrak{E}$ l'algèbre des états associée et N_n la représentation d'un entier n . En se basant sur le Lemme §11.3.17, on sait qu'il existe un morphisme ϕ (avec ψ le morphisme décrit dans le lemme, $\phi = \text{Id}_{\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})} \otimes \psi \otimes \text{Id}_{\mathfrak{E}}$) et deux matrices M et $\bar{\Phi}$ telles que $\phi(M \otimes 1_{\mathfrak{E}}) = N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}}$ et $\phi(\bar{\Phi}) = \Phi$. On a donc $\Phi(N_n \otimes 1_{\mathfrak{E}})$ nilpotent si et seulement si $(M \otimes 1_{\mathfrak{E}})\bar{\Phi}$ est nilpotent. Il reste à montrer qu'il est possible de vérifier la nilpotence de cette matrice en espace logarithmique avec une machine non-déterministe.

On commence par définir une base de l'algèbre :

$$\mathfrak{M}_6(\mathbf{C}) \otimes \underbrace{(\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C}) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{C}))}_{N \text{ copies}} \rtimes \mathfrak{S}_N \otimes \mathfrak{E}$$

Un élément de la base sera de la forme :

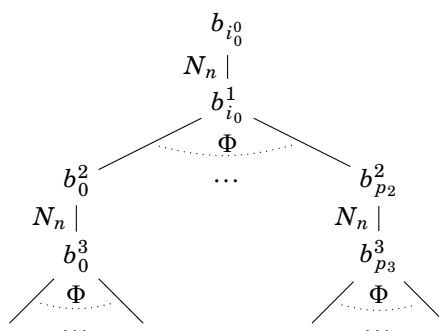
$$(\pi, a_0, a_1, \dots, a_N; \sigma; e)$$

où les $a_i \in \{0, \dots, n\}$ sont les éléments de la base choisie pour représenter l'entier n , σ est un élément de $\mathfrak{S}_N$, e est un élément d'une base de $\mathfrak{E}$, et $\pi \in \{1, 6\}$ est un élément de la base de $\mathfrak{M}_6(\mathbf{C})$ correspondant aux projections π_{0i} , π_{1i} , etc. Lorsque l'on applique la matrice

$M \otimes \mathfrak{E}$ représentant l'entier à un élément de la base, on obtient un nouveau vecteur de base $(\pi, a_0, a_1, \dots, a_N; \sigma; e)$. C'est lors de l'application de l'observation $\bar{\Phi}$ que l'on se retrouve avec quelque chose de plus compliqué. De manière générale, le résultat est une combinaison linéaire positive de L éléments de la base :

$$\bar{\Phi}(\pi, a_0, a_1, \dots, a_N; \sigma; e) = \sum_{i=0}^L \alpha_i(\rho, a_{\tau_i(0)}, \dots, a_{\tau_i(N)}; \tau_i \sigma; e_i)$$

Puisque l'on travaille avec une machine non déterministe, on peut alors poursuivre le calcul en parallèle sur chacun des vecteurs de base. De manière générale, on va donc construire un arbre (on note b_i des éléments de la base) :



On remarque que le degré de nilpotence de $\bar{\Phi}(M \otimes 1_{\mathfrak{E}})$ est borné par la dimension de l'espace sous-jacent : il est inférieur à $6(n+1)^N N!k$ où k est la dimension de $\mathfrak{E}$. Le degré des branchements non déterministes est borné par la même valeur. De plus, puisque chaque coefficient α_i (voir l'équation 11.3.2) est positif, la matrice est nilpotente si et seulement si chacune des branches de l'arbre est de longueur inférieure à $6(n+1)^N N!k$, ce qui peut se vérifier en espace logarithmique par une machine non-déterministe. Puisque la nilpotence correspond à l'acceptation dans toutes les branches de calcul, nous avons donc montré que $\{P_{NL}\} \subseteq co-NL$.

On montre maintenant la seconde inclusion, à savoir $co-NL \subset \{P_{NL}\}$. Pour montrer cette inclusion, on va montrer qu'il existe une machine à pointeurs non déterministe permettant de décider un ensemble $co-NL$ complet. Par le Lemme §11.3.16, on en déduit alors immédiatement l'inclusion. On a choisi de travailler avec le problème $ST-Conn$ de connectivité dans un graphe orienté. Il est connu que ce problème est NL -complet [Pap94]. Le problème $ST-Conn$ prend trois arguments : un graphe orienté, une source et un but. On codera cette entrée dans les suites binaires. Étant donné un graphe à n sommets et $(a_{i,j}^j)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ sa matrice d'adjacence, le sommet source i et le sommet but j , on considère la suite :

$$\underbrace{11\dots 10}_{n} \underbrace{11\dots 10}_{i} \underbrace{11\dots 10}_{j} \overbrace{0a_1^1 a_2^1 \dots a_n^1 0 \dots 0 a_1^n a_2^n \dots a_n^n 0}^{\text{matrice d'adjacence}} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{arêtes de source 1}} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{arêtes de source } n}$$

On va maintenant décrire la machine à pointeurs non déterministe permettant de décider de l'**absence** d'une suite d'arêtes de source i et de but j : on rappelle que nous voulons décider le complémentaire de $ST-Conn$. On considère une machine à 4 pointeurs p_1, p_2, p_3, p_4 et un ensemble d'états conséquent (ceci est principalement dû au fait que nous ne faisons qu'une opération à chaque étape). On va décrire la fonction de transition en notant les transitions par :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, e) \rightarrow (\alpha, e')$$

où a_i est la valeur lue par le pointeur p_i , α est une action (avancer un pointeur — p_i+ , reculer un pointeur — p_i- , ou ne rien faire — ϵ) et e, e' sont des états. On notera $a_i = \bullet$ lorsque la valeur lue par p_i n'importe pas. La figure 11.1 présente la fonction de transition de la machine permettant de décider *ST-Conn* (dans les cas où la fonction décrite est non

définie, comme par exemple $(\star, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init-}p_1)$, on considère que la fonction de transition a pour valeur $(\epsilon, \text{accept})$). Le principe est le suivant :

- le pointeur p_1 parcourt la matrice d'adjacence en fonction du pointeur p_2 qui code le sommet courant pour se mettre en place sur la colonne correspondant ;
- le pointeur p_1 parcourt alors la liste des arêtes partant du sommet courant : lorsqu'il trouve une arête il effectue une transition non-déterministe en continuant à parcourir la liste d'un côté et en suivant l'arête trouvée en parallèle ;
- lorsque le sommet courant change, le pointeur p_3 permet de tester si celui-ci est le sommet but recherché ;
- le pointeur p_4 permet de compter le nombre d'arêtes parcourues pour s'arrêter lorsque l'on en a parcouru n .

Cette machine est une machine à pointeurs non déterministe. Si on montre qu'elle est acyclique, on saura qu'il est possible de la représenter par un opérateur dans P_{NL} par le Lemme §11.3.16. Or, on peut montrer [AS12] que toute machine à pointeur non déterministe qui décide un ensemble S peut être transformée en une machine acyclique décidant S en ajoutant une « horloge » (en effet, le nombre de configurations possibles pour une machine étant fini, on peut borné le temps de calcul de celle-ci). On a donc montré $co - NL \subset \{P_{NL}\}$ puisque $ST - Conn$ est NL -complet. ☺

$(\star, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init})$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{init-}p_2 - \star)$
$(\bullet, \star, \bullet, \bullet, \text{init-}p_2 - \star)$	$\rightarrow$	$(p_2+, \text{init-}p_1)$
$(1, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init-}p_1)$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{init-}p_2)$
$(0, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init-}p_1)$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{init-}p_2)$
$(\bullet, 1, \bullet, \bullet, \text{init-}p_2)$	$\rightarrow$	$(p_2+, \text{init-}p_1)$
$(\bullet, 0, \bullet, \bullet, \text{init-}p_2)$	$\rightarrow$	$(p_2-, \text{init-}p_1\text{-source})$
$(1, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init-}p_1\text{-source})$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{init-}p_2\text{-source})$
$(0, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init-}p_1\text{-source})$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{init-}p_1\text{-but})$
$(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init-}p_2\text{-source})$	$\rightarrow$	$(p_2-, \text{init-}p_1\text{-source})$
$(1, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init-}p_1\text{-but})$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{init-}p_1\text{-but})$
$(0, \bullet, \bullet, \bullet, \text{init-}p_1\text{-but})$	$\rightarrow$	$(\epsilon, \text{init-}p_3 - \star)$
$(\bullet, \bullet, \star, \bullet, \text{init-}p_3 - \star)$	$\rightarrow$	$(p_3+, \text{init-}p_3)$
$(\bullet, \bullet, 1, \bullet, \text{init-}p_3)$	$\rightarrow$	$(p_3+, \text{init-}p_3)$
$(\bullet, \bullet, 0, \bullet, \text{init-}p_3)$	$\rightarrow$	$(p_3+, \text{init-}p_3\text{-source})$
$(\bullet, \bullet, 1, \bullet, \text{init-}p_3\text{-source})$	$\rightarrow$	$(p_3+, \text{init-}p_3\text{-source})$
$(\bullet, \bullet, 0, \bullet, \text{init-}p_3\text{-source})$	$\rightarrow$	$(\epsilon, \text{init-}p_4)$
$(\bullet, \bullet, \bullet, \star, \text{init-}p_4)$	$\rightarrow$	$(p_4+, \text{col-}p_1\text{-sep})$
(a) Initialisation		
$(0, 1, \bullet, \bullet, \text{col-}p_1\text{-sep})$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{col-}p_2)$
$(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \text{col-}p_2)$	$\rightarrow$	$(p_2+, \text{col-}p_1\text{-bool})$
$(\bullet, 1, \bullet, \bullet, \text{col-}p_1\text{-bool})$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{col-}p_1\text{-sep})$
$(\bullet, 0, \bullet, \bullet, \text{col-}p_1\text{-bool})$	$\rightarrow$	$(\epsilon, \text{go-bool})$
(b) Mise en place de p_1		
$(1, \bullet, \bullet, \bullet, \text{go-sep})$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{go-bool})$
$(0, \bullet, \bullet, \bullet, \text{go-bool})$	$\rightarrow$	$(p_1+, \text{go-sep})$
$(0, \bullet, \bullet, \bullet, \text{go-sep})$	$\rightarrow$	(p_1-, accept)
$(1, \bullet, \bullet, \bullet, \text{go-bool})$	$\rightarrow$	$\begin{cases} (\epsilon, \text{step-bool}) \\ (p_1+, \text{go-sep}) \end{cases}$
(c) Avancer d'une arête		
$(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \text{step-bool})$	$\rightarrow$	$(p_1-, \text{step-}p_2)$
$(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \text{step-}p_2)$	$\rightarrow$	$(p_2-, \text{step-}p_3)$
$(\bullet, \bullet, 1, \bullet, \text{step-}p_3)$	$\rightarrow$	$(p_3+, \text{step-sep})$
$(1, \bullet, \bullet, \bullet, \text{step-sep})$	$\rightarrow$	$(p_1-, \text{step-bool})$
$(\bullet, \bullet, 0, \bullet, \text{step-}p_3)$	$\rightarrow$	$(\epsilon, \text{step-sep-3stop})$
$(0, \bullet, 0, \bullet, \text{step-sep})$	$\rightarrow$	$(\epsilon, \text{reject})$
$(0, \bullet, 1, \bullet, \text{step-sep})$	$\rightarrow$	$(\epsilon, \text{return-}p_1)$
$(0, \bullet, \bullet, \bullet, \text{step-sep-3stop})$	$\rightarrow$	(p_3-, step)
(d) Vérifier si on a atteint la source		
$(\bullet, \bullet, \bullet, 1, \text{step})$	$\rightarrow$	$(p_4+, \text{return-}p_3)$
$(\bullet, \bullet, \bullet, 0, \text{step})$	$\rightarrow$	$(\epsilon, \text{accept})$
$(\bullet, \bullet, 1, \bullet, \text{return-}p_3)$	$\rightarrow$	$(p_3-, \text{return-}p_3)$
$(\bullet, \bullet, 0, \bullet, \text{return-}p_3)$	$\rightarrow$	$(\epsilon, \text{col-}p_1\text{-sep})$
(e) Vérifier le nombre d'étapes et retour de p_3		

FIGURE 11.1 – Machine pour $ST - Conn$

CHAPITRE 12

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Table des matières

12.1 Graphes, Graphages et GdI	274
12.1.1 Liens entre graphages et GdI	274
12.1.2 Vérité Subjective	275
12.2 Complexité	275
12.2.1 Les permutations finies de $\mathbf{N}$	275
12.2.2 Autres paires normatives	276
12.3 Topologie Algébrique de l'Interaction	277
12.3.1 Cobordismes	277
12.3.2 Catégories de modèle	277

12.1 Graphes, Graphages et GdI

Liens entre graphages et GdI

- §12.1.1 Nous avons montré dans le Chapitre 9 que les graphes d'interaction permettent de définir des versions combinatoires des diverses constructions proposées par Girard. En particulier, nous avons montré que l'adjonction géométrique des 1-circuits,

$$\mathcal{C}(F, G \cup H) \cong \mathcal{C}(F, G) \cup \mathcal{C}(F :: G, H)$$

correspondait, lorsque l'on choisit la mesure $m(x) = \infty$, à l'adjonction :

$$f(d(g) + g(h)) \text{ nilpotent si et seulement si } fd(g) \text{ nilpotent et } Ex(f, d(g))g(h) \text{ nilpotent}$$

et correspondait, lorsque l'on choisit $m(x) = -\log(1 - x)$, à l'adjonction

$$-\log(\det(1 - f(g + h))) = -\log(\det(1 - fg)) - \log(\det(1 - Ex(f, g)h))$$

- §12.1.2 Il est donc naturel de se demander si la généralisation des graphes d'interaction, les graphages, permettent d'obtenir des résultats similaires. Quelques résultats allant dans ce sens peuvent être trouvés dans l'appendice du Chapitre 9, mais ces résultats méritent d'être discutés dans cette conclusion. En effet, il ne s'agit que de quelques résultats préliminaires qui, uniquement énoncés, n'apportent qu'assez peu d'informations.
- §12.1.3 Afin de montrer une telle correspondance entre graphages et opérateurs, le premier pas — et à première vue le plus complexe — serait de démontrer que l'exécution entre graphages définit une solution à l'équation de rétroaction. L'exécution entre deux graphages F, G correspond au calcul de la série $\sum_{i=0}^{\infty} (p+r)(u_F u_G)^i (p+r)$, où $u_F \in (p+q)\mathcal{L}(\mathbb{H})(p+q)$ et $u_G \in (q+r)\mathcal{L}(\mathbb{H})(q+r)$ sont les opérateurs associés aux graphages F et G . En dimension finie, et sous les hypothèses $\|u_F\| \leq 1$ et $\|u_G\| \leq 1$, cette série est toujours convergente¹. Nous ne savons pas aujourd'hui montrer que cette série converge dans le cas général ($u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ de norme au plus 1, $\mathbb{H}$ de dimension infinie) ni construire de contre-exemple à la convergence de cette série dans le cas d'opérateurs agissant sur un espace de Hilbert de dimension infinie.
- §12.1.4 Girard a montré l'existence d'une solution à l'équation de rétroaction dans le cas général (dimension infinie), ainsi que l'unicité de cette solution. Sa solution passe par l'inversion d'un opérateur non borné et ne donne pas de solution explicite. La convergence dans le cas général de la série $\sum_{i=0}^{\infty} p(u_F u_G)^i p$ permettrait donc de définir explicitement la solution unique de l'équation de rétroaction. De plus, un tel résultat montrerait que l'opération d'exécution sur les graphages donne une construction explicite de cette solution.
- §12.1.5 À côté de la question de la correspondance entre le résultat de l'exécution et la solution de l'équation de rétroaction se pose la question de la correspondance entre les mesures définissables entre graphages et les différentes « mesures » considérées par Girard. Dans cette direction, nous conjecturons qu'il est possible d'obtenir des mesures sur les graphages correspondant à chacune des mesures utilisées par Girard : nilpotence, faible nilpotence, déterminant. En effet, la fonction $q_{\det}$ définie au Chapitre 9 permet déjà d'obtenir la série du logarithme du déterminant (Proposition §9.A.13), même s'il n'est pas évident que cette série corresponde dans ce cas au déterminant. En effet, le déterminant de Fuglede-Kadison ne correspond pas en général à cette série, contrairement à ce qui se passe dans le cas des matrices (Lemme §9.1.28), mais il est possible que dans le cas particulier des opérateurs associés à des graphages l'égalité entre la série et le déterminant soit vérifiée. Nous pensons cependant que dans le cas où elle ne correspondrait pas il ne serait pas difficile de modifier légèrement la mesure associée afin d'obtenir le résultat souhaité.
- §12.1.6 D'un autre côté, nous conjecturons que la fonction q_{∞} définie dans la Proposition §9.A.3 permettra d'obtenir l'orthogonalité basée sur la nilpotence faible. En effet, la condition $q_{\infty} \neq \infty$

1. Il est donc possible d'étendre la Proposition §9.1.31 même dans le cas où $\|F, G\| = \infty$.

correspond à la non-existence de cycles finis, ce qui semble correspondre à la nilpotence faible de l'opérateur associé. En utilisant la fonction ρ_ϕ définie dans le Théorème §8.3.3, on peut définir une famille de fonctions de quantification des circuits sur le même modèle que la famille décrite dans le Théorème §8.3.11 :

$$r_m : \pi \mapsto \int_{\rho_{\phi_\pi}^{-1}(\mathbf{N} \cup \{\infty\})} \frac{m(\omega(\pi)^{\rho_{\phi_\pi}(x)})}{\rho_{\phi_\pi}(x)} d\lambda(x)$$

Nous conjecturons que la fonction r_∞ obtenue pour $m(x) = \infty$ correspond à la nilpotence.

- §12.1.7 Il faut également remarquer que l'exponentielle des graphages n'est bien entendue pas celle de la GdI5. Dans le cas où l'on obtiendrait une correspondance entre graphages et opérateurs, il serait donc intéressant de comprendre à quelle opération sur les graphages correspondrait la pérennisation définie par Girard. Inversement, l'exponentielle des graphages permettrait d'obtenir une nouvelle pérennisation dans le cadre des opérateurs.

Vérité Subjective

- §12.1.8 Le travail que nous avons effectué sur la notion de vérité subjective est principalement axé sur une version légèrement modifiée de la GdI5. Cependant, comme nous l'avons expliqué dans la dernière section du Chapitre 10, celle-ci est reliée à la notion de vérité des GdI5.1 et GdI5.2.
- §12.1.9 Obtenir un résultat d'adéquation forte semble envisageable, au sens de la construction explicite d'un point de vue π et de l'interprétation du système ELL_{pol} — présenté au Chapitre 8 — par des projets gagnants par rapport à ce point de vue spécifique π . Cependant, un résultat plus général tel que le Théorème §10.2.57 semble difficile à obtenir car la caractérisation des unitaires de $L^2(\mathbf{R})$ (et donc des isométries partielles obtenues par restriction de ces unitaires) définis par pré-composition par une transformation préservant la mesure sur $\mathbf{R}$ n'est pas très naturelle. En effet, ces unitaires — notons-les u — sont caractérisés par la propriété que $u(fg) = u(f)u(g)$ pour tout $f, g \in L^\infty(\mathbf{R})$, une propriété qui fait référence à l'espace de Hilbert sur lequel les opérateurs agissent.
- §12.1.10 L'obtention d'un théorème d'adéquation peut également être relié à la question de la correspondance entre les graphages et les GdI de Girard. En effet, la géométrie de l'interaction que nous avons construite autour de la notion de graphage, tout comme les graphes d'interaction, correspond en quelque sorte à travailler dans la GdI5.2 avec un point de vue fixé. Montrer que les constructions sur les graphages correspondent aux constructions sur les opérateurs nous donnerait alors un résultat d'adéquation pour MALL (car les exponentielles ne correspondraient pas) qui s'étendrait aisément au système ELL_{pol} .

12.2 Complexité

- §12.2.1 Concernant la nouvelle approche de la complexité proposée par Girard et présentée au Chapitre 11, de nombreuses pistes de recherche s'offrent à nous. Une première direction est l'étude de la paire normative obtenue à partir de l'action du groupe des permutations finies, c'est-à-dire la paire normative définie dans le Corollaire §11.2.10. Ensuite, on peut s'intéresser à d'autres actions de groupes, ou d'autres représentations des entiers.

Les permutations finies de $\mathbf{N}$

- §12.2.2 Dans un premier temps, il est naturel, en étudiant la preuve du Théorème §11.3.18, de considérer l'ensemble d'observations suivant :

$$P_{+,1} = \{\phi \mid \phi \in P_+, \|\phi\| \leq 1\}$$

où P_+ est l'ensemble des observations booléennes : les observations $(\phi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 6k} \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{S}) \otimes \mathfrak{M}_k(\mathbf{C})$ telles que pour tout i, j , $\phi_{i,j}$ est une somme finie d'unitaires induits par des éléments de $\mathfrak{S}$, i.e. $\phi_{i,j} = \sum_{l=0}^m \alpha_l \lambda(g_l)$ avec $\alpha_l = 1$.

En effet, la condition sur la norme implique que l'arbre construit dans la preuve du Théorème §11.3.18 ne contient pas de branchements. Le fait que cet arbre soit réduit à une unique branche implique que l'on a l'inclusion $\{P_{+,1}\} \subset L$, où L est la classe des langages reconnaissables par une machine de Turing déterministes en espace logarithmique. Pour obtenir l'inclusion inverse, il semble naturel de considérer la version déterministe des machines à pointeurs considérées dans le Chapitre 11. Nous conjecturons que cette notion de machine permettra de prouver l'inclusion inverse et donc d'obtenir :

$$\{P_{+,1}\} = L$$

§12.2.3 Dans un deuxième temps, on peut considérer pour tout entier n la sous-algèbre $\mathfrak{S}_n$ de $\mathfrak{S}$ définie comme la sous-algèbre engendrée par l'ensemble des unitaires $\{\lambda(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$ où S_n est le sous-groupe de S laissant l'ensemble des entiers supérieurs à n invariants. On définit alors :

$$P_{\text{fin}} = \{\phi \mid \exists n, \exists k, \phi \in \mathfrak{M}_6(\mathfrak{S}_n) \otimes \mathfrak{M}_k(\mathbf{C})\}$$

En calculant explicitement le produit des matrices obtenues grâce au Lemme §11.3.17 on peut montrer l'inclusion $\{P_{\text{fin}}\} \subset P$ où P est l'ensemble des langages reconnaissables par les machines de Turing déterministes en temps polynomial. Il n'est cependant pas clair que l'inclusion inverse soit satisfaite. Pour montrer une telle inclusion, il faudrait comprendre comment l'introduction de coefficients négatifs dans les observations permettrait de simuler des machines en temps polynomial.

Autres paires normatives

§12.2.4 Afin de considérer d'autres paires normatives, plusieurs méthodes sont possibles. La première est de considérer d'autres actions de groupe. Dans ce cas, on distinguera plusieurs possibilités : la première est de construire une paire normative en s'aidant du Théorème §11.2.9, la seconde est de considérer une nouvelle construction de paire normative, utilisant éventuellement une autre construction que le produit croisé. Nous nous contenterons ici de discuter la première méthode. Pour construire une telle paire normative, il faut tout d'abord choisir un groupe.

- Si le groupe est localement fini (comme le groupe des permutations finies de $\mathbf{N}$), on sera capable de montrer un équivalent du Lemme §11.3.17. Alors il sera aisé de montrer une inclusion des classes de complexité définies par les ensembles d'observations dans des classes usuelles de manière similaire à ce qui a été fait dans le Chapitre 11. Cependant, les classes que l'on définira seront toutes incluses dans P .
- Si le groupe n'est pas localement fini, alors il n'est pas sûr que l'on puisse montrer un équivalent du Lemme §11.3.17. Dans ce cas, il est envisageable d'obtenir des caractérisations de classes de complexité plus grandes que P . Il faudra cependant trouver une méthode nouvelle pour prouver l'inclusion des classes de complexité définies par les observations dans les classes de complexité usuelles.

§12.2.5 La seconde méthode pour obtenir d'autres paires normatives — et qui peut être combinée avec la méthode précédente — est de considérer d'autres représentations des entiers. Cependant, la représentation utilisée par Girard est exactement l'interprétation des entiers en géométrie de l'interaction. Ce choix permet d'envisager de définir, par exemple, la conduite des observations dans P_{NL} . Or une telle caractérisation ne serait pas envisageable avec une représentation ad-hoc des entiers. Cette approche nécessite donc une étude plus approfondie des liens entre la caractérisation des classes de complexité comme décrite au Chapitre 11 et la géométrie de l'interaction. En particulier, la compréhension du type des fonctions des entiers dans les entiers en GdI permettrait probablement de se forger plus d'intuitions qui seraient utiles à la caractérisation de classes de complexité plus grandes que P puisque, on le rappelle, il est a priori possible de représenter toute fonction élémentaire en GdI !

12.3 Topologie Algébrique de l'Interaction

Cobordismes

- §12.3.1 Les résultats sur les graphes d'interaction (Chapitres 6, 7 et 8) font apparaître la propriété cyclique comme la propriété géométrique sous-jacente aux constructions de Géométrie de l'Interaction proposées par Girard. Ce résultat permet d'envisager la définition d'un cadre plus général où les ensembles de cycles sont définis comme des groupes d'homotopie. Nous avons déjà trouvé un cadre dans lequel ceci s'avère possible : les cobordismes, et plus particulièrement les 2-1-cobordismes. Travailler avec les cobordismes permet également de ne plus avoir de mises : celles-ci sont représentées par des trous dans la surface.
- §12.3.2 La catégorie des cobordismes est ² la catégorie dont les objets sont les variétés compactes fermées sans bords, et un morphisme M d'un objet A dans un objet B est une variété compacte fermée dont le bord δM est homéomorphe à $A \uplus B$. On distinguera la sous-catégorie des 2-1-cobordismes qui est la sous-catégorie dont les objets sont les variétés compactes fermées de dimension 1, et dont les morphismes M sont des morphismes dans la catégorie des cobordismes — donc des variétés — de dimension 2.
- §12.3.3 Il est connu que la catégorie des cobordismes est une catégorie compacte close. On peut donc définir une « trace » au sens catégorique, et celle-ci est unique. Cette trace, que nous noterons abusivement $M ::_U M'$, vérifie en particulier l'associativité : $M ::_U (M' ::_V M'') = (M ::_U M') ::_V M''$. Nous souhaiterions développer une GdI dans ce cadre suivant l'idée qu'un 2-1-cobordisme M est la donnée simultanée d'un graphe $G(M)$ — l'ensemble des classes d'homotopie de chemins entre les (composantes connexes des) bords de M — et d'un ensemble de cycles — le groupe ³ $\pi_1(M)$. On remarquera que le graphe $G(M ::_U M')$ est égal au graphe $G(M) \dot{\cap} G(M')!$ De plus, l'associativité a une conséquence sur les groupes d'homotopies : $\pi_1(M ::_U (M' ::_V M'')) = \pi_1((M ::_U M') ::_V M'')$. Cette égalité est en réalité une reformulation de la propriété cyclique. Ainsi, l'associativité de l'exécution entre les graphes $G(M) \dot{\cap} G(M')$ et la propriété cyclique $\pi_1(M ::_U (M' ::_V M'')) = \pi_1((M ::_U M') ::_V M'')$ sont des conséquences de l'associativité d'une notion d'exécution sur des objets de dimension supérieure.

Catégories de modèle

- §12.3.4 Plus généralement, nous pensons que la géométrie de l'interaction est intimement liée à la théorie de l'homotopie. Nous souhaiterions dans cette optique comprendre dans quelle mesure la notion axiomatisée d'homotopie permet d'obtenir une propriété cyclique, et plus particulièrement caractériser les catégories de modèles permettant de définir une géométrie de l'interaction. Les catégories de modèles offrent en effet un cadre axiomatique adapté à l'étude de cette question, puisqu'il s'agit d'une axiomatisation catégorique des contextes dans lesquels il est possible de définir les concepts de base de la théorie de l'homotopie.
- §12.3.5 Nous ne souhaitons pas « catégorifier » la géométrie de l'interaction, mais plutôt axiomatiser les contextes dans lesquels il est possible de définir une géométrie de l'interaction où l'exécution est définie comme un calcul de chemins et l'orthogonalité peut être définie en mesurant les cycles. Une telle caractérisation permettrait alors de produire aisément de nouvelles constructions de GdI dans divers champs des mathématiques — par exemple en géométrie algébrique. Il serait intéressant d'obtenir de tels modèles car, comme la théorie des algèbres d'opérateurs a permis à Girard de considérer l'opération de produit croisé pour obtenir des résultats en complexité, ils permettraient d'utiliser des outils spécifiques au contexte choisi.

2. Cette définition est un peu simpliste, et la définition formelle de la catégorie des cobordismes demande un peu plus de travail. Cependant la définition intuitive que l'on en donne ici permet de ne pas rentrer dans des détails techniques qui ne feraient qu'alourdir la discussion informelle qui suit.

3. Ici encore, il s'agit d'une simplification : on ne considérera pas $\pi_1(M)$ mais $\pi_1(\bar{M})$, où $\bar{M}$ est obtenue à partir de M en « recousant les bords ».

- §12.3.6 L'étude de cette question est également intéressante du fait des récents développements concernant la théorie homotopique des types, c'est-à-dire la définition de modèles de la théorie des types intentionnelle de Martin-Löf utilisant des notions de la théorie de l'homotopie. Ceux-ci ont été axiomatisés dans le cadre des catégories de modèle, et il serait particulièrement intéressant de disposer d'un cadre commun à la théorie des types et la géométrie de l'interaction.
-

Bibliographie

- [AHS02] Samson Abramsky, Esfandiar Haghverdi, and Philip Scott. Geometry of interaction and linear combinatory algebras. *Mathematical. Structures in Comp. Sci.*, 12(5) :625–665, 2002.
- [AJM94] Samson Abramsky, Radha Jagadeesan, and Pasquale Malacaria. Full abstraction for PCF. In *TACS '94 : Proceedings of the International Conference on Theoretical Aspects of Computer Software*, number 789 in Lecture Notes in Computer Science, pages 1–15, London, UK, 1994. Springer-Verlag.
- [AS12] Clément Aubert and Thomas Seiller. Characterizing co-NL by a group action. *Arxiv preprint arXiv :1209.3422*, 2012.
- [CFW81] Alain Connes, J. Feldman, and B. Weiss. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynamical Syst.*, 1(4) :431–450, 1981.
- [Chi07] Ionut Chifan. On the normalizing algebra of a masa in a II_1 factor. *Preprint*, 2007.
- [Chu41] Alonzo Church. *The Calculi of Lambda Conversion*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1941.
- [Coh82] Paul Cohn. *Algebra*, volume 1. Wiley, 1982.
- [Con90] John B. Conway. *A course in functional analysis*. Springer, 1990.
- [Cur34] H. B. Curry. Functionality in combinatory logic. In *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, volume 20, pages 584–590, November 1934.
- [Cur06] Pierre-Louis Curien. Introduction to linear logic and ludics. *Advances in Mathematics*, 35 :1–44, 2006.
- [dF09] Marc de Falco. An explicit framework for interaction nets. In *RTA '09 : Proceedings of the 20th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, pages 209–223, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.
- [Dix54] Jacques Dixmier. Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini. *Annals of mathematics*, 59 :279–286, 1954.
- [DR95] Vincent Danos and Laurent Regnier. Proof-nets and the Hilbert space. In *Advances in linear logic*, pages 307–328, New York, NY, USA, 1995. Cambridge University Press.
- [Duc09] Etienne Duchesne. *La localisation en logique : géométrie de l'interaction et sémantique dénotationnelle*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, 2009.
- [Dye63] Henry A. Dye. On groups of measure preserving transformations. II. *American Journal of Mathematics*, 85 :119–159, 1963.
- [FK52] Bent Fuglede and Richard V. Kadison. Determinant theory in finite factors. *Annals of Mathematics*, 56(2), 1952.
- [Gab00] Damien Gaboriau. Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Inventiones Mathematicae*, 139 :41–98, 2000.

-
- [Gen64] Gerhard Gentzen. Investigations into logical deduction. *American Philosophical Quarterly*, 1(4) :288–306, 1964.
 - [Gir87a] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1) :1–102, 1987.
 - [Gir87b] Jean-Yves Girard. Multiplicatives. In Lolli, editor, *Logic and Computer Science : New Trends and Applications*, pages 11–34, Torino, 1987. Università di Torino. Rendiconti del seminario matematico dell’università e politecnico di Torino, special issue 1987.
 - [Gir88a] J. Girard. Normal functors, power series and λ -calculus. *Annals of Pure and Applied Logic*, 37(2) :129–177, February 1988.
 - [Gir88b] Jean-Yves Girard. Geometry of interaction II : Deadlock-free algorithms. In *Proceedings of COLOG*, number 417 in Lecture Notes in Computer Science, pages 76–93. Springer, 1988.
 - [Gir89a] Jean-Yves Girard. Geometry of interaction I : Interpretation of system F. In *In Proc. Logic Colloquium 88*, 1989.
 - [Gir89b] Jean-Yves Girard. Towards a geometry of interaction. In *Proceedings of the AMS Conference on Categories, Logic and Computer Science*, 1989.
 - [Gir95a] Jean-Yves Girard. Geometry of interaction III : Accommodating the additives. In *Advances in Linear Logic*, number 222 in Lecture Notes Series, pages 329–389. Cambridge University Press, 1995.
 - [Gir95b] Jean-Yves Girard. Light linear logic. In *Selected Papers from the International Workshop on Logical and Computational Complexity*, LCC ’94, pages 145–176, London, UK, UK, 1995. Springer-Verlag.
 - [Gir95c] Jean-Yves Girard. Proof nets : the parallel syntax for proof theory. In Agliano Ursini, editor, *Logic and Algebra*, number 180 in Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. M. Dekker, 1995.
 - [Gir01] Jean-Yves Girard. Locus solum : From the rules of logic to the logic of rules. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11(3), 2001.
 - [Gir06] Jean-Yves Girard. Geometry of interaction IV : the feedback equation. In Stoltenberg-Hansen and Väänänen, editors, *Logic Colloquium 2003*, pages 76 – 117. The Association for Symbolic Logic, 2006.
 - [Gir07] Jean-Yves Girard. *Le point aveugle, tome 2 : vers l’imperfection*. Vision des Sciences, Hermann, Paris, 2007.
 - [Gir10] Jean-Yves Girard. *The Blind Spot*. European Mathematical Society Publishing House, 2010.
 - [Gir11a] Jean-Yves Girard. Geometry of interaction V : Logic in the hyperfinite factor. *Theoretical Computer Science*, 412 :1860–1883, 2011.
 - [Gir11b] Jean-Yves Girard. La syntaxe transcendantale, manifeste, 2011.
 - [Gir11c] Jean-Yves Girard. Normativity in logic. *Epistemology vs. Ontology*, 2011.
 - [GLT89] Jean-Yves Girard, Yves Lafont, and Paul Taylor. *Proofs and types*. CUP, 1989.
 - [GSS92] Jean-Yves Girard, Andre Scedrov, and Philip J. Scott. Bounded linear logic : a modular approach to polynomial-time computability. *Theor. Comput. Sci.*, 97(1) :1–66, April 1992.
 - [Haa75] Uffe Haagerup. The standard form of von neumann algebras. *Math. Scand.*, 37(271–283), 1975.
 - [How80] William A. Howard. The formulas-as-types notion of construction. In J. P. Seldin and J. R. Hindley, editors, *To H. B. Curry : Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus, and Formalism*, pages 479–490. Academic Press, 1980.
 - [JP82] Vaughan F.R. Jones and Sorin Popa. Some properties of masas in factors. In *Invariant subspaces and other topics*, 1982.
-

-
- [KR97a] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, volume 15 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [KR97b] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*, volume 16 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [Kri70] Wolfgang Krieger. On constructing non- $*$ -isomorphic hyperfinite factors of type III. *Journal of Functional Analysis*, 6(1) :97 – 109, 1970.
- [Laf04] Yves Lafont. Soft linear logic and polynomial time. *Theor. Comput. Sci.*, 318(1-2) :163–180, June 2004.
- [Lüc02] Wolfgang Lück. *L^2 -Invariants : Theory and Applications to Geometry and K -Theory*. Springer, 2002.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Number 2ed. in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1998.
- [Mun00] James Munkres. *Topology*. Prentice Hall, second edition edition, 2000.
- [Mur90] Gerard J. Murphy. *C^* -algebras and operator theory*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1990.
- [MvN36] Francis Murray and John von Neumann. On rings of operators. *Annals of Mathematics*, 37(2) :116–229, 1936.
- [Pap94] Christos H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [Puk60] L. Pukanszky. On maximal abelian subrings of factors of type II_1 . *Canad. J. Math.*, 12 :289–296, 1960.
- [Sak71] Shoichiro Sakai. *C^* -algebras and W^* -algebras*. Springer-Verlag, New York ; Berlin :, 1971.
- [Sch77] Kurt Schütte. *Proof Theory*. Springer-Verlag, 1977.
- [See89] R. A. G. Seely. Linear logic, $\star$ -autonomous categories and cofree coalgebras. In J. W. Gray and A. Scedrov, editors, *Categories in Computer Science and Logic*, pages 371–382. American Mathematical Society, 1989. Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, June 14–20, 1987, Boulder, Colorado ; Contemporary Mathematics Volume 92.
- [Sei12] Thomas Seiller. Interaction graphs : Multiplicatives. *Annals of Pure and Applied Logic*, 163 :1808–1837, December 2012.
- [SS08] Allan Sinclair and Roger Smith. *Finite von Neumann algebras and Masas*. Number 351 in *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 2008.
- [Tak01] Masamichi Takesaki. *Theory of Operator Algebras 1*, volume 124 of *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer, 2001.
- [Tak03a] Masamichi Takesaki. *Theory of Operator Algebras 2*, volume 125 of *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer, 2003.
- [Tak03b] Masamichi Takesaki. *Theory of Operator Algebras 3*, volume 127 of *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer, 2003.
- [Tur37] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42(1) :230–265, January 1937.
- [Whi06] Stuart White. Tauer masas in the hyperfinite II_1 factor. *Quarterly Journal of Mathematics*, 57 :377–393, 2006.
- [Whi08] Stuart White. Values of the pukanszky invariant in meduff factors. *Journal of Functional Analysis*, 254 :612–631, 2008.
-

- [WS07] Stuart White and Allan Sinclair. A continuous path of singular masas in the hyperfinite II_1 factor. *J. London Math. Soc.*, 75 :243–254, 2007.
- [Zim77] Robert J. Zimmer. Hyperfinite factors and amenable ergodic actions. *Inventiones Mathematicae*, 41 :23–31, 1977.
-

Table des figures

Partie I : Introduction et Préliminaires 9

Chapitre 2 : Logique Linéaire 17

2.1 Règles de LK	18
2.2 Les règles de pLK_R	19
2.3 Les règles de pLK_R^{ax}	19
2.4 Calcul des séquents de la logique linéaire	22
(a) Groupe Identité	22
(b) Groupe Multiplicatif	22
(c) Groupe Additif	22
(d) Groupe Exponentiel	22
2.5 Structures de preuve non séquentialisables	24
2.6 La preuve non typée π	25
2.7 Le typage de π (premier exemple)	25
2.8 Le typage de π (second exemple)	26
2.9 Élimination des coupures : $\otimes - \wp$	26
2.10 Élimination des coupures : $\text{ax} - \text{ax}$	26
2.11 Vérification de la compatibilité des spécifications (partie axiomatique non utilisée)	27
2.12 Calcul de l'exécution (partie typée non utilisée)	28
2.13 Choix d'indications pour la définition d'un itinéraire	29
(a) Indications pour les sommets $\otimes$	29
(b) Indications pour les sommets $\wp$	29
(c) Indications pour les conclusions, axiomes et coupures	29
2.14 Exemple d'un itinéraire pour une structure de preuve ; les atomes sont représentés sur les arêtes sortant des noeuds axiomes	30
2.15 Les permutations de l'itinéraire de la Figure 2.14	30
(a) Permutation engendrée par les axiomes	30
(b) Permutation engendrée par l'itinéraire	30

Chapitre 3 : Algèbres d'Opérateurs 33

3.1 Diagrammes de Naturalité	50
--	----

Chapitre 4 : Géométrie de l'Interaction 65

4.1 Calcul des séquents avec coupures explicites	68
--	----

Partie II : Graphes d'Interaction**87****Chapitre 5 : Adjonctions géométriques****87**

5.1	Représentation graphique de la propriété cyclique	89
(a)	Représentation des graphes F, G, H et leurs interactions	89
(b)	Les cycles entre $F :: G$ et H	89
(c)	Les cycles entre $G :: H$ et F	89
(d)	Les cycles entre $F :: G$ et H	89
5.2	Graphes F, G et H	90
5.3	Branchement de F et G	90
5.4	Branchement de F et H	91
5.5	Chemins alternants dans $F \square G$	94
5.6	Chemins alternants dans $F \square H$	94
5.7	Contre-exemple à l'adjonction pour les cycles eulériens : $F \square (G \cup H)$	97
5.8	Contre-exemple à l'adjonction pour les cycles eulériens : $(F \curvearrowright_e G) \square H$	97
5.9	Contre-exemple à l'adjonction pour les circuits simples : $F \square (G \cup H)$	100
5.10	Contre-exemple à l'adjonction pour les circuits simples : $(F \curvearrowright_s G) \square H$	100
5.11	Exemple de graphe tranché : $\frac{1}{2}F + \pi(G \cup H)$	104
5.12	Deux graphes épais G et H , tous deux de dialectes $\{1, 2\}$	106
5.13	Les graphes $G^{\dagger_{D^H}}$ et $H^{\ddagger_{D^G}}$	107
5.14	Le branchement des graphes épais G et H	107
5.15	Les chemins alternés dans le branchement des graphes épais G et H	108
5.16	Le résultat de l'exécution des graphes épais G et H	108
5.17	Le graphe épais $G :: H$ représenté en deux dimensions.	109
5.18	Exemples de graphe épais tranché $\frac{1}{2}F + 3G$ et $F_a + F_b$	112
5.19	Les graphes G_1 et G_2	112

Chapitre 6 : Fragment Multiplicatif**117**

6.1	Calcul des séquents localisé locMLL	127
6.2	Calcul des séquents de MLL+MIX	127
6.3	Une preuve de MLL+MIX	127
6.4	Une preuve de locMLL+MIX	128

Chapitre 7 : Fragment Multiplicatif-Additif**131**

7.1	Représentation graphique du branchement de $f \& g$ avec $h \otimes o_{VC}$	143
7.2	Calcul des séquents localisé locMALL	147
7.3	Calcul des séquents MALL $_{T,0}$	147
7.4	Interprétation de la règle $\&$ (de conclusion $\vdash \Gamma, A_0 \& A_1$) entre deux preuves π_0 et π_1 de conclusions respectives $\vdash \Gamma, A_0$ et $\vdash \Gamma, A_1$	150
(a)	Interprétations de π_0 et π_1	150
(b)	Délocalisations des interprétations	150
(c)	Sommation des deux délocalisations	150
(d)	Interprétation de π	150

Chapitre 8 : Exponentielles**153**

8.1	Le graphe d'un projet de contraction	154
8.2	Les graphes des projets $\mathcal{C}tr_{\psi}^{\phi}$, a et b	155
(a)	Le graphe du dessin $\mathcal{C}tr_{\psi}^{\phi}$	155

(b) Les graphes A et B des dessins a et b	155
8.3 Branchements de Ctr_ψ^ϕ avec les deux graphes A et B	156
(a) Branchement de Ctr_ψ^ϕ et A	156
(b) Branchement de Ctr_ψ^ϕ et B	156
8.4 Les graphes des projets $\mathcal{C}\text{tr}_\psi^\phi :: a$ et $\phi(a) \otimes \psi(a)$	156
(a) Résultat de l'exécution de Ctr_ψ^ϕ et A	156
(b) Le graphe de $\phi(a) \otimes \psi(a)$	156
8.5 Graphes des projets $\mathcal{C}\text{tr}_\psi^\phi :: b$ et $\phi(b) \otimes \psi(b)$	157
(a) Résultat de l'exécution de Ctr_ψ^ϕ et B	157
(b) Graphe du projet $\phi(b) \otimes \psi(b)$	157
8.6 Exemple de branchement de graphages	159
8.7 Exemple de branchement de graphages	159
8.8 Exemples d'évolution d'un cycle lors d'un raffinement	169
(a) Un cycle qui double de longueur	169
(b) Un cycle qui devient deux cycles	169
8.9 Promotion Fonctorielle	185
(a) Schéma général	185
(b) Action de T_τ	185
(c) Action de T_θ	185
8.10 Calcul des séquents ELL_{comp}	188
(a) Groupe Identité	188
(b) Groupe Multiplicatif	188
(c) Groupe Additif	188
(d) Groupe Exponentiel	188
8.11 Connecteurs et Polarisation	196
(a) Tenseur	196
(b) Parr	196
(c) Avec(1)	196
(d) Plus(1)	196
8.12 Calcul des séquents ELL_{pol}	200
(a) Groupe Identité	200
(b) Groupe Multiplicatif	200
(c) Groupe Additif	200
(d) Groupe Exponentiel	200

Partie III : Géométrie de l'Interaction dans le Facteur Hyperfini 203

Chapitre 9 : Circuits et Opérateurs 203

9.1 Les graphes A (à gauche) et B (à droite)	209
9.2 Les graphes $A \square B$ (à gauche) et $\angle(A) \square \angle(B)$ (à droite)	209

Chapitre 11 : Entiers Logspace 249

11.1 Machine pour $ST - \text{Conn}$	271
(a) Initialisation	271
(b) Mise en place de p_1	271
(c) Avancer d'une arête	271
(d) Verifier si on a atteint la source	271
(e) Vérifier le nombre d'étapes et retour de p_3	271

Résumé de la thèse : Cette thèse est une étude de la géométrie de l'interaction dans le facteur hyperfini (GdI5), introduite par Jean-Yves Girard, et de ses liens avec les constructions plus anciennes. Nous commençons par montrer comment obtenir des adjonctions purement géométriques comme une identité entre des ensembles de cycles apparaissant entre des graphes. Il est alors possible, en choisissant une fonction qui mesure les cycles, d'obtenir une adjonction numérique. Nous montrons ensuite comment construire, sur la base d'une adjonction numérique, une géométrie de l'interaction pour la logique linéaire multiplicative additive où les preuves sont interprétées par des graphes. Nous expliquons également comment cette construction permet de définir une sémantique dénotationnelle de MALL, et une notion de vérité. Nous étudions finalement une généralisation de ce cadre afin d'interpréter les exponentielles et le second ordre.

Les constructions sur les graphes étant paramétrées par une fonction de mesure des cycles, nous entreprenons ensuite l'étude de deux cas particuliers. Le premier s'avère être une version combinatoire de la GdI5, et nous obtenons donc une interprétation géométrique de l'orthogonalité basée sur le déterminant de Fuglede-Kadison. Le second cas particulier est une version combinatoire des constructions plus anciennes de la géométrie de l'interaction, où l'orthogonalité est basée sur la nilpotence. Ceci permet donc de comprendre le lien entre les différentes versions de la géométrie de l'interaction, et d'en déduire que les deux adjonctions — qui semblent à première vue si différentes — sont des conséquences d'une même identité géométrique.

Nous étudions ensuite la notion de vérité subjective. Nous commençons par considérer une version légèrement modifiée de la GdI5 avec une notion de vérité dépendant du choix d'une sous-algèbre maximale commutative (masa). Nous montrons qu'il existe une correspondance entre la classification des masas introduite par Dixmier (régulière, semi-régulière, singulière) et les fragments de la logique linéaire que l'on peut interpréter dans cette géométrie de l'interaction. Nous étudions alors la vérité subjective de la GdI5, qui dépend du choix d'une représentation du facteur hyperfini de type II_1 , à la lumière de ce résultat.

Finalement, nous détaillerons une proposition de Girard pour étudier les classes de complexité et détaillons la caractérisation obtenue par ce dernier de la classe de complexité co-NL, en montrant comment coder un problème complet pour cette classe à l'aide d'opérateurs.

Summary : This work is a study of the geometry of interaction in the hyperfinite factor introduced by Jean-Yves Girard, and of its relations with ancient constructions.

We start by showing how to obtain purely geometrical adjunctions as an identity between sets of cycles appearing between graphs. It is then possible, by choosing a function that measures those cycles, to obtain a numerical adjunction. We then show how to construct, on the basis of such a numerical adjunction, a geometry of interaction for multiplicative additive linear logic where proofs are interpreted as graphs. We also explain how to define from this construction a denotational semantics for MALL, and a notion of truth. We extend this setting in order to deal with exponential connectives and show a full soundness result for a variant of elementary linear logic (ELL).

Since the constructions on graphs we define are parametrized by a function that measures cycles, we then focus our study to two particular cases. The first case turns out to be a combinatorial version of GoI5, and we thus obtain a geometrical characterisation of its orthogonality which is based on Fuglede-Kadison determinant. The second particular case we study will give us a refined version of older constructions of geometry of interaction, where orthogonality is based on nilpotency. This allows us to show how these two versions of GoI, which seem quite different, are related and understand that the respective adjunctions are both consequences of a unique geometrical property.

In the last part, we study the notion of subjective truth. We first define a slightly modified version of GoI5 where the notion of subjective truth is dependent on the choice of a maximal abelian subalgebra (masa). We can show in this setting that there is a correspondance between Dixmier's classification of masas (regular, semi-regular, singular) and the fragments of linear logic one can interpret. We then explain how this notion of truth related to the notion of truth of GoI5, which depends on a choice of representation for the hyperfinite factor of type II_∞ .

Finally, we study a proposition made by Girard to study complexity classes through the geometry of interaction in the hyperfinite factor. In particular, we detail Girard's characterisation of the co-NL complexity class by showing how to encode by operators a problem which is complete for this complexity class.