

Le théorème de représentation de Gelfand

Emmanuel Beffara

24 septembre 2010

Ceci est une petite auto-formation à la théorie spectrale. Je me base sur le premier chapitre du Murphy [1] en détaillant ce que j'ai besoin de détailler. J'utilise aussi les Rudin [2, 3] pour les détails, notamment en analyse complexe et sur les algèbres de Banach.

1	Rappels d'analyse complexe	1
2	Espaces de Banach	2
3	Algèbres de Banach	4
4	Spectres	6
5	Caractères et représentations	9
6	Un peu d'analyse complexe	13

1 Rappels d'analyse complexe

Tout se passe dans des espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$, et ce n'est pas pour rien : les propriétés des complexes sont nécessaires pour obtenir les résultats centraux de la théorie. On se contente de rappeler les résultats utiles, sans les démontrer.

- 1 **Définition.** Une fonction $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est dite dérivable en un point $z_0 \in \mathbf{C}$ s'il existe un complexe $f'(z_0)$ tel que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

On dit que f est holomorphe sur un ouvert U si elle est dérivable en tout point de U . Si $U = \mathbf{C}$, alors f est dite entière.

L'étude des fonctions holomorphes est un sujet vaste, dont on n'utilisera qu'une petite partie ici. La première chose cruciale est que la simple condition de dérivabilité au sens des complexes est infiniment plus forte que son analogue dans les réels.

- 2 **Théorème.** Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Pour tout point $z_0 \in U$, f est infiniment dérivable en z_0 et il existe un voisinage V de z_0 sur lequel on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0) \cdot (z - z_0)^n.$$

En d'autres termes, toute fonction holomorphe est développable en série entière en tout point au voisinage duquel elle est holomorphe. Réciproquement, si une fonction f est définie par une série entière, alors elle est holomorphe à l'intérieur de son rayon de convergence.

- 3 **Théorème.** Soient (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs dans $\mathbf{C}$ telles qu'on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

pour tout z d'un certain ouvert où les deux séries convergent, alors $(a_n) = (b_n)$.

- 4 **Théorème (Liouville).** Toute fonction entière bornée est constante.

Ce théorème est crucial et on peut en déduire le théorème de d'Alembert :

- 5 **Théorème.** Tout polynôme non constant dans $\mathbf{C}[X]$ a au moins une racine. En conséquence, tout polynôme $P(X)$ de degré n se décompose en $P(X) = c \cdot (X - z_1) \cdots (X - z_n)$ de façon unique à permutation près des z_i .

Démonstration. Soit $P(X)$ un polynôme complexe. En tant que fonction, P est holomorphe, donc entière. Supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$. Il est facile de montrer que P tend vers l'infini à l'infini, donc P est minorée en module par un réel strictement positif. La fonction $z \mapsto z^{-1}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ donc la fonction $z \mapsto P(z)^{-1}$ l'est aussi, de plus elle est bornée puisque $|P(z)|$ est minoré. Elle est donc constante par le théorème de Liouville, et identiquement nulle puisque P tend vers l'infini. C'est contradictoire. $\square$

2 Espaces de Banach

- 6 **Définition.** Un espace de Banach est un espace vectoriel A sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ muni d'une norme $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbf{R}^+$ vérifiant les axiomes

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \text{et} \quad \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$$

et qui est topologiquement complète pour cette norme.

- 7 **Définition.** Soient A et B deux espaces de Banach. On note $\mathcal{B}(A, B)$ le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des applications linéaires continues de A dans B . L'espace dual d'un espace de Banach A est $A^* := \mathcal{B}(A, \mathbf{C})$.

- 8 **Proposition.** Soient X et Y deux espaces de Banach. Pour toute application linéaire $f : X \rightarrow Y$, on appelle norme de f le nombre $\|f\| := \sup_{\|a\| \leq 1} \|f(a)\|$, élément de $\mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$. Alors f est continue si et seulement si $\|f\|$ est fini, et cette norme fait de $\mathcal{B}(X, Y)$ un espace de Banach. Avec la composition comme produit, $\mathcal{B}(X, X)$ est une algèbre de Banach, notée $\mathcal{B}(X)$.

Démonstration. Il est clair qu'une application linéaire est continue si et seulement si elle l'est en 0. Supposons que $\|f\|$ est fini. Évacuons le cas $\|f\| = 0$: dans ce cas on a évidemment $f = 0$, donc f est continue. Remarquons pour commencer que pour tout $a \in X$ non nul on a $\|f(a)\| = \|a\| \|f(a/\|a\|)\| \leq \|a\| \|f\|$, et l'inégalité est évidemment vraie aussi pour $a = 0$. Pour tous $a, x \in A$ on a donc $\|f(a + x)\| \leq \|f(a)\| + \|f\| \|x\|$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $B_Y(0, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε dans Y . Soit $a \in f^{-1}(B_Y(0, \varepsilon))$, notons $\eta = (\varepsilon - \|f(a)\|)/\|f\|$, alors pour tout $x \in A$ tel $\|x\| < \eta$ on a $\|f(a)\| < \varepsilon$, donc $B_X(a, \eta) \subseteq f^{-1}(B_Y(0, \varepsilon))$, ce qui prouve que $f^{-1}(B_Y(0, \varepsilon))$ est ouvert, et donc que f est continue.

Réciproquement, supposons f continue. Pour la contradiction, supposons $\|f\| = \infty$, alors il existe une suite de vecteurs (a_n) dans X tels que $\|a_n\| \leq 1$ pour tout n et $\|f(a_n)\|$ tend vers l'infini. On peut supposer que les $f(a_n)$ ne sont pas nuls, et dans ce cas la suite des $a_n/\|f(a_n)\|$ est une suite qui tend vers 0, mais pour tout n on a $\|f(a_n/\|f(a_n)\|)\| = 1$ donc la suite des $f(a_n/\|f(a_n)\|)$ ne peut pas tendre vers 0, ce qui contredit la continuité de f .

On a déjà remarqué que $\|f\| = 0$ implique $f = 0$. Vérifions rapidement que cette la norme est bien compatible avec la somme : pour f et g de normes finies, pour tout a tel que $\|a\| \leq 1$ on a $\|(f+g)(a)\| \leq \|f(a)\| + \|g(a)\| \leq \|f\| + \|g\|$ donc $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. De même pour la composition : pour $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ de normes finies, on a $\|g(f(a))\| \leq \|g\|\|f(a)\| \leq \|g\|\|f\|$ d'après les remarques précédentes.

Reste à vérifier que $\mathcal{B}(X, Y)$ est complet pour cette norme. Soit (f_n) une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathcal{B}(X, Y)$, alors pour tout $a \in X$ la suite $(f_n(a))$ est de Cauchy, elle converge donc vers un certain $f(a)$ puisque Y est complet. La linéarité de f se déduit du fait que somme et multiplication scalaire sont continues. Comme la suite (f_n) est de Cauchy, elle est bornée en norme, donc f est aussi de norme finie, il suffit de le vérifier point par point. $\square$

- 9 **Théorème.** Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , p une semi-norme sur E et f une forme linéaire sur F majorée par p , alors il existe une forme linéaire $\bar{f}$ sur E qui étend f et est majorée par p .

Démonstration. Il s'agit d'une version (un rien spécialisée) d'un théorème de Hahn-Banach. La démonstration est assez violente qui rappelle les théorèmes sur l'existence de bases dans des espaces vectoriels arbitraires. On commence par faire la démonstration dans le cas d'espaces vectoriels réels.

Considérons l'ensemble Ω des couples (F', f') tels que F' est un sous-espace de E contenant F et f' est une extension linéaire de f à F' majorée par p . On ordonne cet ensemble par l'inclusion (des sous-espaces et des fonctions). Il est clair que Ω n'est pas vide puisqu'il contient (F, f) , de plus si l'on considère une partie A totalement ordonnée de Ω , alors A a une borne supérieure dans Ω , qui est simplement la réunion. Par le lemme de Zorn, Ω a donc au moins un élément maximal que l'on notera (G, g) .

Reste à vérifier que $G = E$. Supposons donc que ce n'est pas le cas et considérons un vecteur $y \in E \setminus G$. Pour tous $x_1, x_2 \in G$, on a les inégalités

$$\begin{aligned} g(x_1) + g(x_2) &= g(x_1 + x_2) \leq p(x_1 + x_2) \leq p(x_1 - y) + p(x_2 + y) \\ g(x_1) - p(x_1 - y) &\leq p(x_2 + y) - g(x_2) \\ g(x_1) - p(x_1 - y) &\leq \alpha \leq p(x_2 + y) - g(x_2) \quad \text{avec } \alpha := \sup_{x \in G} (g(x) - p(x - y)) \\ g(\lambda x_1) - p(\lambda x_1 - \lambda y) &\leq \lambda \alpha \leq p(\lambda x_2 + \lambda y) - g(\lambda x_2) \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \end{aligned}$$

Soit $x \in G$. En posant $x_1 := -x/\lambda$ et $x_2 := x/\lambda$ on en déduit $-p(-x - \lambda y) \leq g(x) + \lambda \alpha \leq p(x + \lambda y)$ donc $|g(x) + \lambda \alpha| \leq p(x + \lambda y)$, pour tous $x \in G$ et $\lambda > 0$. On déduit le même résultat pour $\lambda < 0$ en remplaçant x par $-x$, on obtient donc une forme linéaire $h(x + \lambda y) := g(x) + \lambda \alpha$, définie sur $H := G \oplus \mathbf{R}y$ et majorée par p . Ce couple (H, h) contredit la maximalité du couple (G, g) , par conséquent on avait $G = E$.

Passons au cas d'espaces vectoriels complexes. Si E est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, il est aussi un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, et la forme $\mathbf{C}$ -linéaire f est une application $\mathbf{R}$ -linéaire de F dans $\mathbf{C}$. Appelons u sa partie réelle, c'est-à-dire sa première projection. Par $\mathbf{C}$ -linéarité on a $\Im f(x) = -\Re f(ix)$ donc $f(x) = u(x) - iu(ix)$, d'autre part u est majorée par p . En appliquant le résultat précédent à u , on déduit une forme linéaire $\bar{u} : E \rightarrow \mathbf{R}$ majorée par p , et en posant $\bar{f}(x) := \bar{u}(x) - i\bar{u}(ix)$ on obtient bien une extension de f à E . Soit alors $x \in E$ et soit α un complexe unitaire tel que $\bar{f}(\alpha x) \in \mathbf{R}$, on a enfin $|\bar{f}(x)| = |\bar{f}(\alpha x)| = |\bar{u}(\alpha x)| \leq p(\alpha x) = p(x)$. $\square$

- 10 **Corollaire.** Pour tout $x \in A$ il existe $f \in A^*$ tel que $f(x) \neq 0$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 9 en choisissant $F = \mathbf{C}x$ et la forme linéaire f sur F définie par $f(\lambda x) = \lambda$. Comme f est majorée par la norme sur A , $\bar{f}$ l'est aussi, elle est donc continue. $\square$

- 11 **Théorème.** Soit A un espace de Banach, soit X un sous-ensemble de A . Si pour tout $\tau \in A^*$ l'ensemble $\tau(X)$ est borné, alors X est borné.

Démonstration. TODO $\square$

3 Algèbres de Banach

- 12 **Définition.** Une algèbre de Banach est un espace de Banach A sur $\mathbf{C}$ muni d'un produit bilinéaire $(\cdot) : A \times A \rightarrow A$ associatif vérifiant l'axiome $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Si la multiplication a un élément neutre, alors A est dite unitaire. Si la multiplication est commutative, alors A est dite commutative ou abélienne.

Une sous-algèbre de A est un sous-espace vectoriel clos par produit, et une sous-algèbre close topologiquement est une algèbre de Banach.

- 13 *Exemple.* Les exemples qui serviront ici sont de deux espèces. Le cas abélien correspond aux espaces de fonctions à valeurs complexes, considérés avec l'addition et la multiplication point par point, et pour norme la borne supérieure du module. On y trouve notamment :
- les espaces vectoriels de dimension finie,
 - donc en particulier le corps de base $\mathbf{C}$ lui-même,
 - les espaces $\ell^\infty(X)$ des fonctions bornées de X dans $\mathbf{C}$,
 - les espaces $C_b(X)$ de fonctions continues bornées sur un espace topologique X ,
 - les espaces $L^\infty(X, \mu)$ des (classes d'équivalences de) fonctions essentiellement bornées sur un espace mesurable (X, μ) .

Le cas non abélien correspond à des algèbres d'opérateurs sur les précédents, dans ce cas le produit est la composition et la norme est définie au sens des opérateurs. On trouve donc :

- les espaces de matrices,
 - les opérateurs linéaires bornés sur les espaces plus gros.
- 14 Tous les exemples donnés plus haut sont unitaires, avec pour unité la fonction constante égale 1 dans le cas abélien et l'identité dans le cas non abélien. Dans le cas d'une algèbre de Banach A où il n'y a pas d'unité, par exemple pour l'ensemble des suites qui tendent vers 0, on fait comme s'il y en avait une en considérant l'algèbre «unitarisée» A^1 obtenu en ajoutant formellement l'identité.

- 15 **Lemme.** Soit A une algèbre de Banach. Soit A^1 l'algèbre définie par

$$\begin{aligned} A^1 &:= \mathbf{C} \times A \quad \text{en tant qu'espace vectoriel} \\ \|(\lambda, x)\| &:= \max(|\lambda|, \|x\|) \\ (\lambda, x) \cdot (\mu, y) &:= (\lambda\mu, \lambda y + \mu x + xy) \end{aligned}$$

Alors A^1 est une algèbre de Banach unitaire, commutative si A l'est. Son unité est $(1, 0)$.

Démonstration. On vérifie facilement que le produit ainsi défini est associatif, commutatif si le produit sur A est commutatif, et que $(1, 0)$ en est l'élément neutre. On vérifie facilement aussi que la norme vérifie les propriétés voulues. A^1 est complet pour cette norme, il suffit de considérer la composante $\mathbf{C}$ et la composante A séparément (c'est le même argument que pour montrer qu'un espace de dimension finie est toujours complet). $\square$

Dans la suite, on identifiera chaque scalaire λ au vecteur $\lambda \cdot 1$ dans les algèbres unitaires : tout ce qui se passe dans les scalaires se passe aussi sur la droite $\mathbf{C} \cdot 1$. La structure d'algèbre de Banach permet en fait d'étendre un certain nombre de choses que l'on sait faire dans le corps de base. Pour commencer, pour tout polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^n \lambda_i X^i$ et tout vecteur a d'une algèbre de Banach, on peut définir $P(a) = \sum_{i=0}^n \lambda_i a^i$. La notation s'étend aux séries entières :

- 16 **Proposition.** Soit A une algèbre de Banach unitaire. Soit $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n z^n$ une série entière de rayon de convergence r . Pour tout vecteur a tel que $\|a\| < r$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n a^n$ est convergente.

Démonstration. Par hypothèse, la série $\sum_{i \in \mathbf{N}} \lambda_i \|a\|^i$ est convergente, donc la suite $(\sum_{i \geq n} \lambda_i \|a\|^i)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0. Pour tous entiers n et $p \geq n$, on a alors

$$\left\| \sum_{i < p} \lambda_i a^i - \sum_{i < n} \lambda_i a^i \right\| = \left\| \sum_{n \leq i < p} \lambda_i a^i \right\| \leq \sum_{n \leq i < p} \lambda_i \|a\|^i \leq \sum_{i \geq n} \lambda_i \|a\|^i$$

donc la suite des sommes partielles $(\sum_{i < n} \lambda_i a^i)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, et donc convergente par définition des algèbres de Banach. $\square$

On peut alors s'autoriser à utiliser n'importe quelle fonction analytique en l'appliquant à des vecteurs dont la norme est inférieure à son rayon de convergence. Notons également que la somme d'une telle série entière commute avec toute autre série entière en a , puisque tout se passe dans la sous-algèbre de Banach unitaire engendrée par a , qui est commutative.

- 17 **Corollaire.** Soit A une algèbre de Banach unitaire, soit $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$, alors $1 - a$ est inversible et son inverse est $\sum_{n \in \mathbf{N}} a^n$.

Démonstration. Soit b la limite de la série. Le produit $(1 - a)b$ est la limite de la suite de terme général $(1 - a) \sum_{i < n} a^i = 1 - a^n$, or $\|a\| < 1$ implique que a^n tend vers 0, donc la limite de $1 - a^n$ est 1 et on a bien $(1 - a)b = 1$. On montre $b(1 - a) = 1$ par le même argument. $\square$

- 18 **Corollaire.** L'ensemble des inversibles d'une algèbre de Banach est un ouvert.

Démonstration. Soit a un inversible d'une algèbre de Banach A . Pour tout x tel que $\|x\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ on a $\| -a^{-1}x \| \leq \|a^{-1}\| \|x\| < 1$ donc par le résultat précédent $1 + a^{-1}x$ est inversible. Posons y son inverse, alors on a d'une part $ya^{-1}(a + x) = y(1 + a^{-1}x) = 1$ et d'autre part $(a + x)ya^{-1} = a(1 + a^{-1}x)ya^{-1} = aa^{-1} = 1$, donc $a + x$ est inversible d'inverse ya^{-1} . Il y a donc une boule ouverte de rayon $\|a^{-1}\|^{-1}$ autour de a qui est constituée d'inversibles. $\square$

La norme permet aussi de définir la notion de différentielle pour une fonction entre espaces de Banach.

- 19 **Définition.** Soient A et B deux espaces de Banach et soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. On appelle différentielle en un point $a \in A$ de f l'application linéaire $df(a) : A \rightarrow B$ (si elle existe) telle qu'on ait

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(a + x) - f(a) - df(a)(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

- 20 L'unicité est facile à vérifier : si u et v satisfont la définition, on a pour tout x où $f(a + x)$ est définie l'inégalité

$$\begin{aligned} \|u(x) - v(x)\| &= \|(f(a + x) - f(a) - u(x)) - (f(a + x) - f(a) - v(x))\| \\ &\leq \|f(a + x) - f(a) - u(x)\| + \|f(a + x) - f(a) - v(x)\| \end{aligned}$$

d'où on déduit que $\|u(x) - v(x)\|/\|x\|$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Pour tout x non nul, on a donc que $\|u(\lambda x) - v(\lambda x)\|/\|\lambda x\|$ tend vers 0 quand λ tend vers 0, or la valeur de cette expression ne dépend pas de λ puisque u et v sont linéaires, donc on a nécessairement $\|u(x) - v(x)\| = 0$ pour tout x , d'où $u = v$.

- 21 Il est clair que si f est différentiable en a , alors elle est continue en a . Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que $f(a+x) - f(a) - df(a)(x)$ doit tendre vers 0 quand x tend vers 0, sans quoi la limite qui définit la différentielle ne pourrait être valide. Comme $df(a)$ est linéaire, elle tend vers 0 en 0, c'est donc aussi le cas de $f(a+x) - f(a)$.

- 22 Cette définition étend la définition de la dérivée pour les fonctions de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, à condition d'identifier les formes linéaires sur $\mathbf{C}$ avec les éléments de $\mathbf{C}$, ce qui est naturel.

- 23 **Proposition.** Soit $f : A \rightarrow B$ une application linéaire continue entre les espaces de Banach A et B , alors f est différentiable en tout point, et pour tout $a \in A$ on a $df(a) = f$.

Démonstration. C'est immédiat, puisque pour tous a et x on a $\|f(a+x) - f(a) - f(x)\| = 0$ par linéarité de f . $\square$

- 24 **Proposition.** Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux fonctions entre espaces de Banach. Soit $a \in A$ tel que f soit différentiable en a et que g soit différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et sa différentielle est $dg(f(a)) \circ df(a)$.

- 25 **Proposition.** La fonction $a \mapsto a^{-1}$ est différentiable en tout point où elle est définie.

Démonstration. Soit f cette fonction. On commence par remarquer que $df(1)(x) = -x$. En effet, pour tout x tel que $\|x\| < 1$ on a

$$f(1+x) - f(1) + x = (1+x)^{-1} - 1 + x = \sum_{n \geq 0} (-x)^n - 1 + x = \sum_{n \geq 2} (-x)^n = x^2 \sum_{n \geq 0} (-x)^n.$$

En passant à la norme, on obtient

$$\frac{\|f(1+x) - f(1) + x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\|^2}{\|x\|} \sum_{n \geq 0} \|x\|^n = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}.$$

Lorsque $\|x\|$ tend vers 0, ce quotient tend vers 0, ce qui permet de conclure que $df(1)(x) = -x$. Soit maintenant a un inversible quelconque, pour tout x de norme inférieure à $\|a^{-1}\|^{-1}$ on a $f(a+x) = (a+x)^{-1} = (a(1+a^{-1}x))^{-1} = (1+a^{-1}x)^{-1}a^{-1}$. En composant la différentielle de f en 1 avec les produits par a^{-1} , qui sont des applications linéaires donc égales à leur différentielle, on obtient $df(a)(x) = -a^{-1}xa^{-1}$. $\square$

4 Spectres

- 26 **Définition.** Soit A une algèbre de Banach unitaire. Notons $\text{Inv}(A)$ l'ensemble des inversibles de A , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs a tels qu'il existe un b (nécessairement unique) pour lequel $ab = ba = 1$. Le spectre d'un élément de a est défini comme suit :

$$\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbf{C} ; a - \lambda \notin \text{Inv}(A)\}$$

- 27 **Proposition.** Si $A = \ell^\infty(S)$ pour un certain ensemble S non vide, alors $\sigma_A(f) = \overline{f(S)}$, l'adhérence de l'image de f .

Démonstration. Soit $\lambda \in \overline{f(S)}$. Soit $g \in A$ quelconque, on va montrer que g ne peut pas être l'inverse de $f - \lambda$. C'est évident si $g = 0$, donc on supposera g non nulle. Par définition de la norme, g est majorée par $\|g\| > 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1/\|g\|$, par définition il existe un $x \in S$ tel que $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$, alors on a $|(f(x) - \lambda)g(x)| < 1$, par conséquent $(f(x) - \lambda)g(x) \neq 1$. Ainsi g n'est pas l'inverse de $f - \lambda$. Par conséquent $f - \lambda$ n'est pas inversible.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \overline{f(S)}$. Comme λ est dans l'intérieur de $\mathbf{C} \setminus \overline{f(S)}$, il existe un ε tel que pour tout $x \in S$ on ait $|f(x) - \lambda| > \varepsilon$. Ceci implique $f(x) - \lambda \neq 0$, on peut donc poser $g(x) = (f(x) - \lambda)^{-1}$, et l'inégalité précédente garantit $g(x) < 1/\varepsilon$, donc g est bornée. La fonction g est donc élément de A et inverse de $f - \lambda$. $\square$

- 28 **Proposition.** Si A est une algèbre de matrices alors $\sigma_A(M)$ est l'ensemble des valeurs propres de M .

Démonstration. Soit λ tel qu'il existe un vecteur colonne $V \neq 0$ tel que $MV = \lambda V$. Alors on a $(M - \lambda)V = 0$ donc $M - \lambda$ n'est pas inversible. Réciproquement, si $M - \lambda$ n'est pas inversible, c'est que son noyau n'est pas réduit à 0, puisqu'on est en dimension finie. Il existe donc un $V \neq 0$ tel que $(M - \lambda)V = 0$, donc $MV = \lambda V$ et λ est valeur propre de M . $\square$

- 29 **Lemme.** Soit M un monoïde et soient a, b deux éléments de M tels que $ab = ba$, alors ab est inversible si et seulement si a et b le sont.

Démonstration. Supposons ab inversible d'inverse c , de sorte que $abc = cab = 1$. Comme $ab = ba$ on a aussi $bac = cba = 1$. On a donc $bca = (bca)(bac) = b(cab)ac = bac = 1$, et a est inversible d'inverse bc . De même on a $acb = (acb)(abc) = a(cba)bc = abc = 1$ donc b est inversible d'inverse ac . Réciproquement, si a et b sont inversibles alors $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. $\square$

- 30 **Théorème.** Soit $P(X) \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes. Soit A une algèbre de Banach unitaire, alors pour tout $a \in A$ tel que $\sigma(a)$ n'est pas vide, on a $\sigma(P(a)) = P(\sigma(a))$.

Démonstration. Si $P(X) = z$ pour une certaine constante $z \in \mathbf{C}$, alors $P(a) = z$ et $\sigma(P(a)) = \{z\}$. Comme $\sigma(a)$ n'est pas vide, on a aussi $P(\sigma(a)) = \{z\}$.

Considérons maintenant que $P(X)$ n'est pas constant. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Le polynôme $P(X) - \lambda$ est scindé dans $\mathbf{C}$, on peut donc l'écrire $P(X) - \lambda = c(X - z_1) \cdots (X - z_n)$ avec $c \neq 0$ et $n \geq 1$. Les solutions de l'équation $P(z) = \lambda$ sont donc exactement les z_i .

L'ensemble des polynômes en a forme une sous-algèbre commutative de A , donc les $a - z_i$ commutent entre eux, et par le lemme précédent on en déduit que $P(a) - \lambda$ est inversible si et seulement si tous les $a - z_i$ le sont.

Supposons que $\lambda \in \sigma(P(a))$, il existe donc un i tel que $a - z_i$ n'est pas inversible, donc $z_i \in \sigma(a)$. Comme $\lambda = P(z_i)$ on a donc $\lambda \in P(\sigma(a))$.

Réciproquement, si $\lambda \in P(\sigma(a))$, alors il existe un $z \in \sigma(a)$ tel que $P(z) = \lambda$, et il existe donc un i tel que $z = z_i$, ce qui implique que $a - z_i$ n'est pas inversible. $P(a) - \lambda$ n'est donc pas inversible, et $\lambda \in \sigma(P(a))$. $\square$

- 31 **Théorème (Gelfand).** Soit A une algèbre de Banach unitaire. Pour tout $a \in A$, $\sigma_A(a) \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un vecteur a dont le spectre dans A est vide, c'est-à-dire que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ le vecteur $a - \lambda$ est inversible. Soit $g : \mathbf{C} \rightarrow A$ la fonction telle que $g(\lambda) = (a - \lambda)^{-1}$.

Pour tout λ on a $a - \lambda = (-\lambda)(1 - a/\lambda)$ donc $g(\lambda) = (-1/\lambda)(1 - (a/\lambda))$. Pour λ tel que $|\lambda| > 2\|a\|$ on a $\|a/\lambda\| < 1/2$, donc on peut développer cet inverse en série entière et écrire

$$\|g(\lambda)\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} (a/\lambda)^n \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n \in \mathbf{N}} \|a/\lambda\|^n \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n \in \mathbf{N}} \|1/2\|^n = \frac{2}{|\lambda|}.$$

Par conséquent, $\|g\|$ tend vers 0 à l'infini, et comme cette fonction est continue, elle est donc bornée.

D'après la proposition 25, g est différentiable en tout point de $\mathbf{C}$. Pour toute forme linéaire bornée τ , la fonction $\tau \circ g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est donc définie et différentiable sur $\mathbf{C}$, c'est donc une fonction entière. D'après la remarque précédente, $\tau \circ g$ est bornée, elle est donc constante en application du théorème de Liouville. D'autre part, comme $\|g\|$ tend vers 0 à l'infini, $\tau \circ g$ tend aussi vers 0, ce qui implique qu'elle est identiquement nulle. Comme cette propriété est indépendante de τ , on en déduit $g = 0$ (d'après le théorème 10), ce qui est contradictoire puisque g est un inverse. $\square$

- 32 **Corollaire (Gelfand-Mazur).** *Si une algèbre de Banach unitaire A est telle que tout élément non nul est inversible, alors A est isomorphe à $\mathbf{C}$.*

Démonstration. Soit $a \in A$ un élément quelconque. Par le théorème de Gelfand, $\sigma_A(a)$ n'est pas vide, il existe donc un $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $a - \lambda$ n'est pas inversible. Par hypothèse, ceci implique $a - \lambda = 0$, donc $a = \lambda$. Ainsi, tout élément de A est multiple de l'unité. $\square$

- 33 **Définition.** Soit A une algèbre de Banach unitaire, et soit $a \in A$. Le rayon spectral de a est $\rho_A(a) = \sup \{|\lambda| ; \lambda \in \sigma_A(a)\}$.

- 34 Il est facile de voir qu'on a toujours $\rho(a) \leq \|a\|$. En effet, pour tout λ tel que $|\lambda| > \|a\|$, on a $\|a/\lambda\| < 1$ donc $1 - a/\lambda$ est inversible, et $\lambda - a = (-\lambda)(1 - a/\lambda)$ l'est aussi. On a en fait une formule explicite pour le rayon spectral.

- 35 **Théorème (Beurling).** *Pour tout élément a d'une algèbre de Banach unitaire, on a*

$$\rho(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Démonstration. Le cas $a = 0$ est évident, on supposera donc $a \neq 0$. Soit λ un élément du spectre de a . On a vu que $|\lambda| \leq \|a\|$, donc pour tout n on a $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$, d'où $|\lambda| \leq \|a^n\|^{1/n}$. On a donc $\rho(a) \leq \inf_{n \in \mathbf{N}} \|a^n\|^{1/n}$.

Considérons maintenant $\Delta := \{\lambda ; |\lambda|\rho(a) < 1\}$. Il s'agit du disque ouvert de rayon $1/\rho(a)$, ou de $\mathbf{C}$ tout entier si $\sigma(a) = \{0\}$. Pour tout $\lambda \in \Delta$ non nul on a $|1/\lambda| > \rho(a)$ donc $a - 1/\lambda$ est inversible, donc $1 - \lambda a$ est aussi inversible. Soit une forme linéaire $\tau \in A^*$, l'application $f(\lambda) := \tau((1 - \lambda a)^{-1})$ est donc définie sur Δ , différentiable en tout point et donc holomorphe et analytique sur Δ . Pour tout λ tel que $|\lambda|\|a\| < 1$, on a la décomposition en série

$$f(\lambda) = \tau((1 - \lambda a)^{-1}) = \tau\left(\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda^n a^n\right) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \tau(a^n) \lambda^n,$$

et comme la décomposition en série entière est unique, on en déduit que cette série a un rayon de convergence de $1/\rho(a)$. À $\lambda \in \Delta$ fixé, la suite des $\tau(a^n)\lambda^n$ est donc bornée, et il en est de même de la suite $a^n\lambda^n$, par le théorème 11. Soit m un majorant non nul de la suite $(\|a^n\lambda^n\|)$, on a donc pour tout $n \geq 1$ l'inégalité $\|a^n\|^{1/n} \leq m^{1/n}/|\lambda|$, or la suite $(m^{1/n})$ tend vers 1, donc $\limsup_{n \in \mathbf{N}} \|a^n\|^{1/n} \leq 1/|\lambda| \leq \rho(a)$. Comme $\rho(a) \leq \inf_{n \in \mathbf{N}} \|a^n\|^{1/n}$, on en déduit que la suite $\|a^n\|^{1/n}$ est convergente de limite $\rho(a)$. $\square$

5 Caractères et représentations

On a vu que les exemples standard d'algèbres de Banach commutatives sont des espaces de fonctions avec les opérations définies point par point. Le théorème de représentation de Gelfand exprime que toute algèbre de Banach commutative unitaire peut être vue de cette manière, en choisissant un bon espace topologique (séparé et localement compact). La clé est de retrouver quels sont les points cet espace, on peut en fait les trouver dans le dual de l'algèbre considérée.

- 36 **Définition.** Soit A une algèbre de Banach. Un caractère sur A est un morphisme d'algèbres de Banach surjectif de A dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire une forme linéaire continue qui commute au produit et qui n'est pas identiquement nulle.

Dans le cas unitaire, le fait de ne pas être identiquement nul signifie que le caractère doit envoyer 1 sur 1. En effet, pour tout morphisme d'algèbres φ on a $\varphi(1) = \varphi(1^2) = \varphi(1)^2$ donc $\varphi(1) \in \{0, 1\}$. Si $\varphi(1) = 0$ on a évidemment pour tout a que $\varphi(a) = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1)\varphi(a) = 0$.

- 37 **Définition.** Soit A une algèbre de Banach. Un idéal (bilatère) de A est un sous-espace vectoriel I de A qui est absorbant pour le produit : pour tous $a \in I$ et $b \in A$ on a $ab \in I$ et $ba \in I$. Il est appelé propre s'il est distinct de A . On note $A/I = \{a + I ; a \in A\}$ l'algèbre quotient, munie de la norme $\|a + I\| := \inf_{x \in I} \|a + x\|$.

- 38 **Proposition.** Si A est une algèbre de Banach et I un idéal de A topologiquement clos, alors A/I est une algèbre de Banach.

Démonstration. On vérifie sans peine que la norme définie comme ci-dessus en est bien une, vérifiant toutes les propriétés voulues par rapport aux opérations d'algèbre. Le fait que $\|a + I\| = 0$ implique $a \in I$ est garanti par le fait que I est fermé, et donc que la borne inférieure dans la définition de la norme est un minimum.

Montrons maintenant que A/I est clos pour cette norme. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans A/I . Quitte à prendre une sous-suite, supposons qu'on ait $\|a_{n+1} - a_n\| < 2^{-n}$. Chaque a_n s'écrit $x_n + I$ pour un certain $x_n \in A$. Il est possible de choisir les x_n pour que la suite (x_n) soit de Cauchy : si x_n est choisi, soit b tel que $a_{n+1} = b + I$, on a $\|a_{n+1} - a_n\| = \min_{y \in I} \|b - x_n + y\|$. Soit y qui minimise $\|b - x_n + y\|$, alors en posant $x_{n+1} = b + y$ on a $\|x_{n+1} - x_n\| = \|a_{n+1} - a_n\| < 2^{-n}$. Soit alors x la limite de la suite (x_n) , soit $a = x + I$ sa classe d'équivalence dans A/I . Pour tout n on a $\|a_n - a\| = \inf_{y \in I} \|x_n - x + y\| \leq \|x_n - x\|$, or $\|x_n - x\|$ tend vers 0, donc (a_n) converge vers a . $\square$

- 39 **Proposition.** Les idéaux fermés d'une algèbre de Banach sont exactement les noyaux de morphismes d'algèbres de Banach.

Démonstration. Il est facile de voir que si φ est un morphisme, alors le sous-espace vectoriel $\ker \varphi$ est un idéal : si $a \in \ker \varphi$ et $b \in A$ on a $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0$ donc $ab \in \ker \varphi$, de même pour ba . Le fait que $\ker \varphi$ soit fermé est conséquence de la continuité de φ .

Réciproquement, soit I un idéal fermé. Alors la surjection canonique $\varphi : A \rightarrow A/I$ est un morphisme d'algèbres de Banach et son noyau est I par définition. $\square$

Pour se convaincre que les caractères correspondent aux points du domaine des fonctions considérées, étudions des exemples simples, à commencer par les suites bornées.

- 40 **Proposition.** Soit S un ensemble quelconque, les caractères sur $\ell^\infty(S)$ sont exactement les $f \mapsto \lim_{\mathcal{U}} f$ pour tous les ultrafiltres $\mathcal{U}$ sur S .

Démonstration. Soit φ un caractère sur $\ell^\infty(S)$. Pour tout ensemble $A \subseteq S$, notons χ_A la fonction caractéristique de A dans S , on a donc $\chi_A \in \ell^\infty(S)$, et comme χ_A est à valeurs dans $\{0, 1\}$ on a

$\chi_A^2 = \chi_A$ donc $\varphi(\chi_A)^2 = \varphi(\chi_A)$, d'où $\varphi(\chi_A) \in \{0, 1\}$. Notons alors $\mathcal{U} := \{A ; \varphi(\chi_A) = 1\}$. Il est facile de voir que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre :

- $\emptyset \notin \mathcal{U}$ puisque $\chi_\emptyset = 0$ et donc $\varphi(\chi_\emptyset) = 0$;
- pour $A, B \in \mathcal{U}$ on a $\varphi(\chi_{A \cap B}) = \varphi(\chi_A \chi_B) = 1$ donc $A \cap B \in \mathcal{U}$;
- pour A et B complémentaires dans S , $\varphi(\chi_A) + \varphi(\chi_B) = \varphi(\chi_A + \chi_B) = \varphi(\chi_{A \cup B}) = \varphi(1) = 1$ donc $\chi_A = 1$ ou $\chi_B = 1$ mais pas les deux;
- si $A \subseteq \mathcal{U}$ et $A \subseteq B$ alors $\varphi(\chi_B) = \varphi(\chi_A + \chi_{B \setminus A}) = \varphi(\chi_A) + \varphi(\chi_B) \varphi(\chi_{S \setminus A}) = 1$.

Toute fonction $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ bornée peut être approchée uniformément par des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques, donc la valeur de φ sur les fonctions caractéristiques détermine φ entièrement, ce qui établit la bijection entre les caractères et les ultrafiltres.

Montrons enfin qu'on a $\varphi = \lim_{\mathcal{U}}$. Soit f une fonction bornée sur S et soit $z = \lim_{\mathcal{U}} f$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par continuité de φ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout g de norme au plus η on ait $|\varphi(g)| < \varepsilon$. Posons $A := \{x ; |f(x) - z| < \eta\}$. Par définition de la limite selon $\mathcal{U}$, on a $A \in \mathcal{U}$, donc $\varphi(\chi_A) = 1$, et par conséquent $\varphi(f) = \varphi(\chi_A f)$. De plus, par construction, on a $\|\chi_A f - z \chi_A\| \leq \eta$, donc $|\varphi(f) - z| = |\varphi(\chi_A f - z \chi_A)| < \varepsilon$. On a donc $\varphi(f) = z$. $\square$

En conséquence, si S est fini, les caractères sur $S^{\mathbf{C}}$ sont exactement les fonctions d'évaluation. Pour passer au cas général d'une fonction sur une espace séparé localement compact, il faut étudier plus en détail les idéaux dans les algèbres de fonctions.

- 41 **Proposition.** *Soit A une algèbre de Banach. L'application $\varphi \mapsto \ker \varphi$ est une bijection entre les caractères de A et ses idéaux propres maximaux.*

Démonstration. Si φ est un caractère, l'idéal $\ker \varphi$ est propre puisque $\varphi \neq 0$, et clairement maximal puisque c'est un hyperplan de A . La correspondance $\varphi \mapsto \ker \varphi$ est tout aussi clairement une injection.

Maintenant, considérons un idéal propre maximal I , et soit $\varphi : A \rightarrow A/I$ la surjection canonique, de sorte que $I = \ker \varphi$. Par la proposition 38, A/I est une algèbre de Banach, de plus φ est continue, c'est donc un morphisme d'algèbres de Banach, non trivial puisque A/I n'est pas trivial. Soit a un élément non nul de A/I . Soit J l'idéal de A/I engendré par a , c'est-à-dire $J = a \cdot (A/I)$, alors $J \neq 0$. Soit $J' = \varphi^{-1}(J)$, alors J' est un idéal de A , dont I est un sous-ensemble strict. Comme I est maximal, on a nécessairement $J' = A$, donc $J = A/I$ puisque φ est surjective. En conséquence, on a $1 \in J$, et donc a est inversible. Par le théorème 32 (de Gelfand-Mazur), A/I est donc isomorphe à $\mathbf{C}$. Ainsi, à isomorphisme près, φ est un caractère. $\square$

- 42 **Lemme.** *Soit X un espace métrique compact, soit Ω un ensemble de fermés de X stable par intersection dénombrable. Alors $\bigcap_{F \in \Omega} F$ est élément de Ω .*

Démonstration. Soit $K := \bigcap_{F \in \Omega} F$. Pour tout entier n , posons $F_n := \{x ; d(x, K) \geq 2^{-n}\}$. Chaque F_n est fermé donc compact, de plus on a $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n = X \setminus K$. Pour tout $x \in F_n$, il existe $A_x \in \Omega$ tel que $x \notin A_x$, puisque x n'est pas dans K , de plus on a $K \subseteq A_x$. Chaque $X \setminus A_x$ est un ouvert disjoint de K qui contient x , donc $\bigcup_{x \in F_n} (X \setminus A_x)$ est un ouvert qui contient F_n et est disjoint de K . On peut en extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire une famille $\{x_1, \dots, x_k\}$ telle que $F_n \subseteq \bigcup_{i=1}^k X \setminus A_i \subseteq X \setminus K$. Posons $G_n := \bigcap_{i=1}^k A_i$, alors $G_n \in \Omega$ et $K \subseteq G_n \subseteq X \setminus F_n$. Comme $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} X \setminus F_n = K$, on en déduit $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} G_n = K$, d'où $K \in \Omega$. $\square$

- 43 **Proposition.** *Soit X un espace métrique compact. Pour toute partie I de $C(X)$, posons $D_I := \{t ; \forall f \in I, f(t) = 0\}$. Alors $I \mapsto D_I$ est une bijection décroissante entre les idéaux fermés de $C([0, 1])$ et les parties fermées de $[0, 1]$.*

Démonstration. Il est facile de voir que D_I est nécessairement fermé : c'est l'intersection des $f^{-1}(\{0\})$ pour $f \in I$, donc une intersection de fermés.

Montrons pour commencer que si I est un idéal fermé, alors il existe f dans I qui s'annule exactement sur D_I . Soit $\Omega := \{f^{-1}(\{0\}) ; f \in I\}$. Alors Ω est un ensemble de fermés de $[0, 1]$ dont l'intersection est D_I . L'ensemble Ω est clos par intersections dénombrables. En effet, considérons une famille $(f_n) \in I$. Pour chaque n , la fonction $g_n := f_n \bar{f}_n / \|f_n\|^2$ est dans I (on prend $g_n = 0$ si $f_n = 0$), elle s'annule là où f_n s'annule, elle est à valeurs réelles positives et $\|g_n\| \leq 1$. Posons $f := \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n / 2^n$, alors cette fonction est bien définie, elle est élément de I puisque I est clos, et elle s'annule là où toutes les f_n s'annulent. Par le lemme précédent, on en déduit $D_I \in \Omega$ donc il existe dans I une fonction qui s'annule exactement sur D_I .

Montrons maintenant que pour tout $f \in I$, toute fonction g s'annulant là où f s'annule est aussi dans I . Pour ce faire, soit $\varepsilon > 0$. On va construire une approximation de g à ε près dans I . Quitte à considérer ff , on peut supposer que f est à valeurs réelles positives. Posons $\eta := \inf_{|g(t)| \geq \varepsilon/2} f(t)$, la plus petite valeur prise par f là où g dépasse ε en norme. Comme f et g sont continues, l'ensemble dont η est la borne inférieure est un fermé, donc on a $\eta = f(t)$ pour un certain t tel que $|g(t)| \geq \varepsilon$. Comme $g(t) \neq 0$, par hypothèse on a $f(t) \neq 0$ donc $\eta > 0$. Posons $f_\eta(t) = \max(f(t), \eta)$, alors f_η ne s'annule pas, elle est donc inversible, de plus on a par construction $\|f - f_\eta\| \leq \eta$ donc $\|(f - f_\eta)/f_\eta\| \leq 1$. Considérons alors la fonction $g_\varepsilon := gf/f_\eta$. Pour tout t tel que $|g(t)| \geq \varepsilon$ on a par définition $f(t) \geq \eta$ donc $f_\eta(t) = f(t) \neq 0$ et $g_\varepsilon(t) = g(t)$. Pour tout t tel que $|g(t)| < \varepsilon$, on a $|g(t) - g_\varepsilon(t)| = |g(t)(f(t) - f_\eta(t))/f_\eta(t)| < \varepsilon$. Ainsi on a $\|g - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. De plus, g_ε est multiple de f et $f \in I$ donc $g_\varepsilon \in I$. Comme g peut être approchée par des éléments de I , on en déduit $g \in I$ puisque I est supposé fermé.

Ainsi, toute fonction s'annulant sur D_I est élément de I . Réciproquement, par définition tout élément de I s'annule sur D_I , donc I est exactement l'ensemble des fonctions s'annulant sur D_I . Ceci établit l'injectivité de la correspondance $I \mapsto D_I$. Pour la surjectivité, il suffit, étant donné un fermé $F \subseteq X$, de remarquer que la fonction $f : t \mapsto \min(d(t, F), 1)$ est continue et bornée et qu'elle s'annule exactement sur F , donc l'idéal $I := f \cdot C(X)$ vérifie bien $D_I = F$. $\square$

- 44 **Corollaire.** Soit X un espace métrique compact. La fonction Φ qui à chaque $x \in X$ associe le caractère $\varphi_x : f \mapsto f(x)$ sur $C(X)$ est une bijection.

Démonstration. Il est clair que Φ est injective : si $x \neq y$, il suffit de considérer une fonction $f \in C(X)$ telle que $f(x) \neq f(y)$ pour déduire $\varphi_x \neq \varphi_y$, et une telle fonction existe toujours si X est métrique.

Maintenant, considérons un caractère φ . Son noyau $\ker \varphi$ est un idéal maximal non trivial. Par le résultat précédent l'ensemble $D_\varphi := \{x ; \forall f \in \ker \varphi, f(x) = 0\}$ est un fermé minimal non vide, c'est-à-dire un singleton $\{x\}$. Pour toute fonction $f \in C(X)$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, on a alors $\varphi(f - \lambda) = 0$ si et seulement si $f(x) - \lambda = 0$, or $\varphi(f - \lambda) = \varphi(f) - \lambda$ puisque $\varphi(1) = 1$, par conséquent on a $\varphi(f) = f(x)$, et $\varphi = \varphi_x$. $\square$

Ce résultat peut en fait s'étendre au cas où X est un espace séparé localement compact. La construction d'approximations fonctionne toujours, et pour les cas où on utilise la distance pour construire des approximations de fonctions caractéristiques, on utilisera à la place le lemme d'Urysohn, qui permet de faire exactement la même chose dans n'importe quel espace normal (c'est-à-dire dans lequel pour tous fermés disjoints F et G il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F \subseteq U$ et $G \subseteq V$).

- 45 **Définition.** Soit A une algèbre de Banach unitaire. Le *spectre* de A est l'ensemble $\Omega(A)$ des caractères sur A muni de la topologie faible. Pour chaque $a \in A$, on appelle *transformée de Gelfand* de a la fonction $\hat{a} : \Omega(A) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$.

46 **Proposition.** Soit A une algèbre de Banach unitaire. Pour tout $a \in A$ on a

$$\sigma(a) = \{\varphi(a) ; \varphi \in \Omega(A)\} = \hat{a}(\Omega(A)).$$

Démonstration. Soient $a \in A$ et $\varphi \in \Omega(A)$. On a évidemment $\varphi(a - \varphi(a)) = 0$, donc $a - \varphi(a)$ ne peut pas être inversible (si a est un inversible alors $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(1) = 1$), donc $\varphi(a) \in \sigma(a)$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \sigma(a)$. Comme $a - \lambda$ n'est pas inversible, l'idéal $(a - \lambda)A$ ne contient pas 1, il n'est donc pas trivial. On peut alors trouver un idéal maximal I qui le contient (à coup de lemme de Zorn), et en posant $I = \ker \varphi$ on déduit un caractère φ qui vérifie $\varphi(a - \lambda) = 0$ d'où $\varphi(a) = \lambda$. $\square$

47 **Théorème.** Si A est une algèbre de Banach commutative unitaire, alors $\Omega(A)$ est compact et la fonction $a \mapsto \hat{a}$ est un morphisme d'algèbres de Banach qui fait décroître la norme. De plus, on a $\rho(a) = \|\hat{a}\|$ pour tout a .

Ce théorème de représentation ne dit pas que A est isomorphe à $C(\Omega(A), \mathbb{C})$. C'est faux en général parce que la représentation n'est pas injective, à cause des nilpotents. en effet, soit a est un élément nilpotent de A , soit n tel que $a^n = 0$. Pour tout caractère φ on a $\varphi(a)^n = \varphi(a^n) = \varphi(0) = 0$ donc $\varphi(a) = 0$, par conséquent $\hat{a} = 0$. En fait, la proposition 46 montre que si $\sigma(a) = \{0\}$ alors $\hat{a} = 0$.

definition

Références

- [1] Gerard J. Murphy. *C*-algebras and operator theory*. Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [2] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1970.
- [3] Walter Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 2nd edition edition, 1991.

6 Un peu d'analyse complexe

Tout se passe dans des espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$, et ce n'est pas pour rien : les propriétés des complexes sont nécessaires pour obtenir les résultats centraux de la théorie.

48 **Définition.** Une fonction $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est dite holomorphe sur un ouvert U si elle est dérivable en tout point de U . Si $U = \mathbf{C}$, alors f est dite entière.

49 **Définition.** Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continûment dérivable, on définit l'intégrale curviligne de f selon γ par

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

50 On constate facilement que cette intégrale est invariante par reparamétrage de la courbe au moyen d'une fonction dérivable $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$, du moment qu'on ne change pas de sens, c'est-à-dire $\varphi(a') = a$ et $\varphi(b') = b$. Si on change le sens du parcours, la valeur de l'intégrale est opposée.

Si f est la dérivée d'une certaine fonction F , la fonction qui est intégrée est la dérivée de $F \circ \gamma$, et l'intégrale vaut donc $\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$. En particulier, si γ est un lacet, l'intégrale est nulle. Le théorème dit de l'intégrale de Cauchy généralise ce résultat à toutes les fonctions holomorphes.

51 La définition de l'intégrale curviligne s'étend naturellement au cas de chemins continus qui ne sont que dérivables par morceaux. Pour deux chemins $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ et $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbf{C}$ tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, on note γ_1, γ_2 la concaténation des deux chemins, et on définit l'intégrale selon γ_1, γ_2 comme la somme des intégrales selon γ_1 et γ_2 . Comme le reparamétrage est gratuit, on étend la concaténation de chemins au cas où les intervalles sont quelconques, tant que les chemins se connectent correctement. Remarquons qu'on a toujours $\int_{[a,b]} f = - \int_{[b,a]} f$.

Un cas particulier important est celui des chemins rectilignes. Étant donnés deux points a et b , on notera $[a, b]$ le chemin rectiligne de a à b , c'est-à-dire par exemple la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbf{C}$ telle que $[a, b](t) = (1-t)a + tb$. Une concaténation de n tels chemins sera notée $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$, l'intégrale de f sur cette ligne brisée est la somme des intégrales sur les $[a_i, a_{i+1}]$.

52 **Lemme.** Soit U un ouvert convexe de $\mathbf{C}$, soit f une fonction holomorphe sur U . Soit γ un lacet triangulaire à valeurs dans U , on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Démonstration. L'idée est de se ramener par dichotomie (ou plutôt quadrichotomie) à des triangles de plus en plus petits jusqu'à se retrouver dans un voisinage d'un point autour duquel f sera presque affine, puisque différentiable.

On construit une suite de triangles (a_n, b_n, c_n) pour s'intéresser à l'intégrale de f sur les lacets $\gamma_n := [a_n, b_n, c_n, a_n]$. Pour chaque n , on notera J_n cette intégrale. On notera aussi L_n le périmètre du triangle, soit $L_n = |a_n - b_n| + |b_n - c_n| + |c_n - a_n|$. On commence posant pour (a_0, b_0, c_0) les sommets du triangle parcouru par γ . Pour n donné, on divise le triangle (a_n, b_n, c_n) en quatre triangles en posant a', b', c' les milieux des côtés $[a_n, b_n]$, $[b_n, c_n]$ et $[c_n, a_n]$ respectivement (voir figure 1). D'après la remarque 51, on peut décomposer J_n en

$$J_n = \int_{\gamma_n} f = \int_{[b', a_n, c', b']} f + \int_{[c', b_n, a', c']} f + \int_{[a', c_n, b', a']} f + \int_{[a', b', c', a']} f$$

En passant au module, on en déduit une majoration de $|J_n|$ par la somme des intégrales sur les quatre sous-triangles. Posons pour $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ les sommets du sous-triangle pour lequel

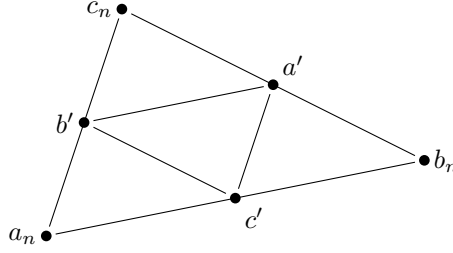


FIGURE 1 – Découpage du triangle.

le module de l'intégrale est le plus grand, on a alors $J_n \leq 4J_{n+1}$. D'autre part, on a clairement $L_{n+1} = L_n/2$.

On a ainsi construit une suite de triangles décroissante pour l'inclusion et dont de périmètres tendent vers 0. Les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) sont donc convergentes vers une limite commune z_0 , qui est dans le triangle (fermé) initial et donc dans l'ouvert U . Par hypothèse, f est différentiable en z_0 donc

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Soit un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Il existe un η tel que pour tout $z \in U$ tel que $|z - z_0| < \eta$ on ait

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon|z - z_0| \quad \text{où} \quad g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$

Soit n tel que le triangle de rang n soit contenu dans le disque ouvert de centre z_0 et de rayon η . La fonction g est affine, donc dérivée d'une fonction polynomiale, par la remarque 50 on a donc $\int_{\gamma_n} g(z) dz = 0$, d'où

$$|J_n| = \left| \int_{\gamma_n} (f(z) - g(z)) dz \right| \leq \int_{\gamma_n} \varepsilon|z - z_0| dz \leq \int_{\gamma_n} \varepsilon L_n dz = \varepsilon L_n^2.$$

La dernière inégalité est justifiée par le fait qu'on a évidemment tel que $|z - z_0| \leq L_n$ puisque z_0 est dans le triangle de rang n dont le périmètre est L_n . L'égalité est justifiée par le fait que γ_n est de longueur L_n par définition. Par construction on a $L_n = 2^{-n} L_0$ donc

$$|J_0| \leq 4^n |J_n| \leq 4^n \varepsilon L_n^2 = 4^n \varepsilon 4^{-n} L_0 = \varepsilon L_0.$$

Comme cette inégalité est valable pour tout ε , on en déduit $\int_{\gamma} f(z) dz = J_0 = 0$. □

- 53 **Théorème.** Soit U un ouvert convexe de $\mathbf{C}$, soit f une fonction continue sur U et holomorphe sur U . Pour tout lacet γ à valeurs dans U , on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Démonstration. On va en fait exhiber une primitive de f , ce qui permettra de conclure par la remarque 50. Pour cela, choisissons un point arbitraire $a \in U$ et posons

$$F(z) := \int_{[a, z]} f(\xi) d\xi$$

pour tout $z \in U$. Cette fonction est bien définie puisque, U étant convexe, le chemin $[a, z]$ est à valeurs dans U . Par le lemme 52, pour tout point $z_0 \in U$ on a

$$0 = \int_{[a, z, z_0, a]} f(\xi) d\xi = F(z) + \int_{[z, z_0]} f(\xi) d\xi - F(z_0).$$

On en déduit

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z, z_0]} (f(\xi) - f(z_0)) d\xi.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en z_0 , il existe un η tel que $|\xi - z_0| < \eta$ entraîne $|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$. Le module du membre droit de l'égalité précédente peut donc être majoré par ε si $|z - z_0| < \eta$. Ceci implique que sa limite quand z tend vers z_0 est 0, autrement dit on obtient $F'(z_0) = f(z_0)$. Ce raisonnement s'applique pour tout $z_0 \in U$ donc on a bien $F' = f$ sur U , ce qui permet de conclure. $\square$

Et on pourrait continuer jusqu'à prouver que toute fonction holomorphe est développable en série entière. On pourrait ensuite montrer le théorème de Liouville, selon lequel une fonction entière bornée est nécessairement constante. On en déduirait que tout polynôme complexe non constant s'annule.