

Topologie Non Commutative I

En suivant *Elements of Non Commutative Geometry* [GBV00]

Thomas Seiller

seiller@iml.univ-mrs.fr

Institut de mathématiques de Luminy, 163 Avenue de Luminy
Case 907, 13288 Marseille Cedex 09, France

19 janvier 2011

Table des matières

1 Algèbres de Banach, Algèbres stellaires	1
1.1 Algèbres de Banach	1
1.2 Algèbres stellaires	2
2 Le théorème de Gelfand	6
2.1 Algèbres de Banach	6
2.2 Algèbres stellaires	8
3 Une équivalence de catégorie	10
3.1 Calcul fonctionnel	10
3.2 Catégories	11

1 Algèbres de Banach, Algèbres stellaires

Algèbres de Banach

- §1.1 **Definition** (Algèbre de Banach). Une algèbre de Banach A est une algèbre associative sur le corps des complexes $\mathbf{C}$ qui est un espace normé complet et qui satisfait $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ pour tous $a, b \in A$ (cette condition garantit la continuité du produit).
- §1.2 *Remarque.* Si une algèbre de Banach A contient une unité 1, on peut supposer que $\|1\| = 1$. En effet, si ce n'est pas le cas, la norme opérateur des fonctions $b \mapsto ab$ définit une norme équivalente pour laquelle l'unité à norme 1.

§1.3 **Proposition** (Adjonction d'unité - Algèbres de Banach). *Etant donné une algèbre de Banach non-unitale A , on peut lui adjoindre une unité en définissant l'algèbre $A^+ = A \times \mathbf{C}$ avec la multiplication $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$. L'algèbre A^+ est alors une algèbre de Banach lorsqu'elle est munie de la norme*

$$\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$$

Démonstration. La fonction $(a, \lambda) \mapsto \|a\| + |\lambda|$ définit bien une norme. De plus, si (a_n, λ_n) est une suite de Cauchy, alors a_n et λ_n sont toutes deux de Cauchy. On déduit alors de la complétude de A et de $\mathbf{C}$ que A^+ est complète pour cette norme, donc A^+ est une algèbre de Banach. $\square$

§1.4 **Proposition.** *L'ensemble des inversibles $A^\times$ d'une algèbre de Banach unitale A est ouvert.*

Démonstration. On considère la série

$$c_b = \sum_{k=0}^{\infty} b^k$$

Cette série converge pour $\|b\| < 1$, et dans ce cas, $c_b(1 - b) = (1 - b)c_b = 1$. Soit alors $x \in A^\times$, et $y \in A$ tel que $\|x - y\| < 1/\|x^{-1}\|$. On a alors $\|1 - x^{-1}y\| < 1$, et y est alors inversible. $\square$

§1.5 **Corollaire.** *Un idéal propre d'une algèbre de Banach unitale ne peut être dense.*

Démonstration. Si un idéal est dense, il contient un inversible, et ne peut donc être propre. $\square$

Algèbres stellaires

§1.6 Le but de cette section est d'introduire les notions d'algèbres stellaires nécessaires pour la suite, et ne constitue donc pas un cours sur les algèbres stellaires. Une bonne référence pour en savoir plus sur les algèbres stellaires est le livre de G. Murphy, *C*-algebras and operator theory* [Mur90]. On suppose de plus connus les résultats déjà exposés lors des précédentes séances, en particulier ceux sur les algèbres de Banach [Bef10].

§1.7 **Définition** (Algèbre de Banach involutive). Une algèbre de Banach involutive est une algèbre de Banach munie d'une *involution* $(\cdot)^* : A \rightarrow A$ vérifiant, pour $a, b \in A, \lambda \in \mathbf{C}$:

$$a^{**} = a, \quad (a + b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*, \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^* \quad \|a^*\| = \|a\|$$

§1.8 **Definition** (Algèbre stellaire). Une *algèbre stellaire* (ou C^* -algèbre) est une algèbre de Banach involutive satisfaisant pour tout $a \in A$ l'égalité

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

§1.9 Si l'algèbre A de départ est une algèbre stellaire, on aimerait que l'algèbre unitarisée A^+ soit également une algèbre stellaire. Si l'involution définie sur A^+ est celle à laquelle on pense $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$, la norme que l'on vient de définir ne fait pas de A^+ une algèbre stellaire. On peut cependant montrer qu'il existe une norme qui fait de A^+ une algèbre stellaire.

§1.10 **Lemme.** *Si un espace vectoriel normé X possède un sous-espace complet Y de codimension finie, alors X est complet.*

Démonstration. La preuve se fait par induction et on montre le résultat uniquement pour Y de codimension 1. Supposons Y de codimension 1, et fixons $u \in X - Y$. Soit $(x_n + \lambda_n u)$ une suite de Cauchy. Si $\lambda_n \rightarrow \infty$, le fait que $(x_n + \lambda_n u)$ soit bornée montre que $\lambda_n^{-1}(x_n + \lambda_n u) \rightarrow 0$, i.e. $-\lambda_n^{-1}x_n \rightarrow u$. Comme Y est complet, et donc clos, on obtient que $u \in Y$, une contradiction. On peut donc supposer que $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbf{C}$. Alors (x_n) doit être de Cauchy, et converge vers $x \in Y$. Donc $x_n \rightarrow x + \lambda u$ et X est complet. $\square$

§1.11 **Proposition** (Adjonction d'unité - Algèbres stellaires). *Soit A une algèbre stellaire non unitale. La fonction $\|(a, \lambda)\|_* = \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\}$ définit une norme sur $A^+ = A \times \mathbf{C}$ et A^+ est complète pour cette norme. De plus, si A est une algèbre stellaire, alors A^+ munie de la norme $\|\cdot\|_*$ et de l'involution $(a, \lambda) \mapsto (a^*, \bar{\lambda})$ est une algèbre stellaire.*

Démonstration. On montre tout d'abord que l'on a bien défini une norme :

1. On a la sous-additivité :

$$\begin{aligned} \|(a, \lambda) + (b, \mu)\|_* &= \|(a + b, \lambda + \mu)\|_* \\ &= \sup\{\|(a + b)c + (\lambda + \mu)c\| : \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|ac + \lambda c\| : \|c\| \leq 1\} + \sup\{\|bc + \mu c\| : \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \|(a, \lambda)\|_* + \|(b, \mu)\|_* \end{aligned}$$

2. On a l'homogénéité :

$$\begin{aligned} \|\mu(a, \lambda)\|_* &= \|(\mu a, \mu \lambda)\|_* \\ &= \sup\{\|\mu ab + \mu \lambda b\| : \|b\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\mu(ab + \lambda b)\| : \|b\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\mu| \|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\} \\ &= |\mu| \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\} \\ &= |\mu| \|(a, \lambda)\|_* \end{aligned}$$

3. On a la séparation :

$$\begin{aligned}\|(a, \lambda)\|_* = 0 &\Leftrightarrow \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \|b\| \leq 1, \|ab + \lambda b\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall b, ab + \lambda b = 0\end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 0$,

$$\|(a, \lambda)\|_* = 0 \Leftrightarrow \forall b, -(a/\lambda)b = b$$

donc $-a/\lambda$ est une unité gauche de A , d'où $(-a/\lambda)^*$ est une unité droite de A , et alors $-a/\lambda = (-a/\lambda)(-a/\lambda)^* = (-a/\lambda)^*$ montre que $-a/\lambda$ est une unité de A , ce qui contredit les hypothèses. Donc $\lambda = 0$. On a alors $ab = 0$ pour tout $b \in A$, i.e. $a = 0$.

4. On a la sous-multiplicativité :

$$\begin{aligned}\|(a, \lambda)(b, \mu)\|_* &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\|_* \\ &= \sup\{\|abc + \lambda bc + \mu ac + \lambda\mu c\| : \|c\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|a(bc + \mu c) + \lambda(bc + \mu c)\| : \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|ad + \lambda d\| : \|d\| \leq \|bc + \mu c\|, \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|ad + \lambda d\| \|bc + \mu c\| : \|d\| \leq 1, \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|ad + \lambda d\| : \|d\| \leq 1\} \sup\{\|bc + \mu c\| : \|c\| \leq 1\} \\ &\leq \|(a, \lambda)\|_* \|(b, \mu)\|_*\end{aligned}$$

Remarquons que restreinte à A , la norme $\|\cdot\|_*$ est égale à la norme de A . En effet, la norme de $(a, 0)$ est égale à $\sup\{\|ab\| : \|b\| \leq 1\}$, donc $\|(a, 0)\| \leq \|a\|$ par la sous-multiplicativité de la norme. De plus, la propriété des algèbres stellaires nous donne $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a\|_* \|a^*\| = \|a\|_* \|a\|$ (on a $\|a^*a\| \leq \sup\{\|a^*ab\| : \|b\| \leq 1\} \leq \|a^*\| \|(a, 0)\|_*$, la première inégalité étant donnée par le fait que $b = a^*a/\|a^*a\|$ est de norme 1 et vérifie $\|a^*a\| = \|(a^*a)\|^2 \|a^*a\|^{-1} = \|(a^*a)^*(a^*a)\| \|a^*a\|^{-1} = \|(a^*a)(a^*a)\| \|a^*a\|^{-1} = \|a^*ab\|$).

Comme A est complète et de codimension 1 dans A^+ , on en déduit que A^+ est complète.

De plus, A^+ est une algèbre stellaire :

$$\begin{aligned}\|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\|_* &= \sup\{\|a^*ab + \bar{\lambda}ab + \lambda a^*b + \bar{\lambda}\lambda b\| : \|b\| \leq 1\} \\ &\geq \sup\{\|b^*a^*ab + \bar{\lambda}b^*ab + \lambda b^*a^*b + \bar{\lambda}\lambda b^*b\| : \|b\| \leq 1\} \\ &\geq \sup\{\|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\| : \|b\| \leq 1\} \\ &\geq \sup\{\|ab + \lambda b\|^2 : \|b\| \leq 1\} \\ &\geq \|(a, \lambda)\|_*^2\end{aligned}$$

L'inégalité opposée étant une simple conséquence de la sous-multiplicativité. $\square$

§1.12 **Définition** (Double centralisateur). Un double centralisateur sur une algèbre stellaire A est une paire (L, R) d'applications linéaires bornées sur A telles que pour tous $a, b \in A$,

$$L(ab) = L(a)b \quad R(ab) = aR(b) \quad R(a)b = aL(b)$$

§1.13 *Exemple.* Si $c \in A$, on définit (L_c, R_c) par $L_c(a) = ca$ et $R_c(a) = ac$. Alors (L_c, R_c) est un double centralisateur sur A . On vérifie que pour tout $c \in A$, $\|L_c\| = \|c\| = \|R_c\|$: la sous-multiplicativité montre l'inégalité $\|L_c\| \leq \|c\|$ et par la propriété des algèbres stellaires, $\|L_c(c^*)\| = \|c^*c\| = \|c\|^2 = \|c\|\|c^*\|$ montre que cette borne est atteinte (pour $c^*/\|c^*\|$).

§1.14 **Lemme.** Si (L, R) est un double centralisateur sur une algèbre stellaire A , alors $\|L\| = \|R\|$.

Démonstration. Comme $aL(b) = R(a)b$ pour tous a, b , on a $\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leq \|R\|\|a\|\|b\|$. Comme $\|L(b)\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|aL(b)\|$, on obtient que $\|L(b)\| \leq \|R\|\|b\|$ et donc $\|L\| \leq \|R\|$.

On montre de manière similaire l'inégalité $\|L\| \geq \|R\|$. $\square$

§1.15 **Définition** (Multiplier Algebra). Soit A une algèbre stellaire. Soit $M(A)$ l'ensemble des double centralisateurs de A . C'est un sous-espace vectoriel clos de $\mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A)$. On muni $M(A)$ de la norme $\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|$, et on définit le produit

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1L_2, R_1R_2)$$

et la conjugaison par :

$$(L, R)^* = (R^{(*)}, L^{(*)}), \quad L^{(*)}(a) = (L(a^*))^*, \quad R^{(*)}(a) = (R(a^*))^*$$

§1.16 **Proposition.** Si A est une algèbre stellaire, alors $M(A)$ est une algèbre stellaire unitale.

Démonstration. On montre uniquement l'égalité des algèbres stellaires. Soit $T = (L, R)$ un double centralisateur. Si $a \in A$, $\|a\| \leq 1$,

$$\|L(a)\|^2 = \|(L(a))^*L(a)\| = \|L^{(*)}(a^*)L(a)\| = \|a^*R^{(*)}L(a)\| \leq \|R^*L\|$$

Finalement, comme $\|R^*L\| = \|T^*T\|$

$$\|T\|^2 = \sup_{\|a\| \leq 1} \|L(a)\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2$$

Donc $\|T^*T\| = \|T\|^2$. $\square$

§1.17 La fonction

$$A \rightarrow \mathcal{M}(A), \quad a \mapsto (L_a, R_a)$$

est un $*$ -homomorphisme unital, l'on identifie donc A avec une sous-algèbre de $\mathcal{M}(A)$. Remarquons que $\mathcal{M}(A)$ est unitale, puisque $(\text{Id}_A, \text{Id}_A)$ est une unité, et l'on a que $A = \mathcal{M}(A)$ si et seulement si A est unitale.

§1.18 **Proposition.** *Si A est une algèbre stellaire et $a \in A$ est hermitien, alors $r(a) = \|a\|$.*

Démonstration. On utilise le fait que $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ pour tout élément d'une algèbre de Banach¹. Or, $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$, et donc $\|a^{2n}\| = \|a\|^{2n}$. D'où $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2n}\|^{\frac{1}{2n}} = \|a\|$. $\square$

§1.19 **Corollaire.** *Il existe au plus une norme faisant d'une algèbre de Banach une algèbre stellaire.*

Démonstration. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes faisant de A une algèbre stellaire. On utilise le fait que pour tout $a \in A$, l'opérateur a^*a est hermitien :

$$\forall a \in A, \quad \|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = r(a^*a) = \|a^*a\|_2 = \|a\|_2^2$$

§1.20 **Corollaire.** *Un $*$ -homomorphisme ϕ d'une algèbre de Banach involutive A dans une algèbre stellaire B fait décroître la norme.*

Démonstration. Quitte à prendre les unitarisations des algèbres, on peut les considérer unitales. Pour $a \in A$, on a $\text{Spec}(\phi(a)) \subset \text{Spec}(a)$, d'où :

$$\|\phi a\|^2 = \|(\phi a)^* \phi a\| = \|\phi(a^*a)\| = r(\phi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a\|^2$$

D'où $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$. $\square$

§1.21 **Corollaire.** *Un $*$ -isomorphisme entre algèbres stellaires est isométrique.*

2 Le théorème de Gelfand

Algèbres de Banach

§2.1 **Définition.** Un espace de Hausdorff compact X définit naturellement une algèbre de Banach commutative unitale $\mathcal{C}(X)$: l'ensemble des fonctions continues $X \rightarrow \mathbf{C}$ avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

§2.2 **Définition.** Un espace topologique X est dit *localement compact* si pour chaque point x il existe un compact $K_x \subset X$ contenant un voisinage de x .

1. La preuve a été faite dans une séance précédente [Bef10].

§2.3 **Définition** (Compactification d’Alexandroff). Si X est un espace de Hausdorff localement compact, mais non compact, on définit la *compactification à un point* de X comme l’espace $X \cup \{\infty\}$ dont la topologie est définie comme l’union des ouverts de X et des unions $G \cup \{\infty\}$ où G est le complémentaire d’un compact.

§2.4 **Théorème** (c.f. [Mun00], p.183). *Un espace de Hausdorff X est localement compact si et seulement si $\tilde{X}$ est compact.*

§2.5 **Définition.** Un espace de Hausdorff localement compact (mais non compact) X définit une algèbre de Banach commutative $\mathcal{C}_0(X)$: l’ensemble des fonctions continues $X \rightarrow \mathbf{C}$ qui s’annulent à l’infini (i.e. l’ensemble des fonctions continues $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ telles que pour tout $\epsilon > 0$, l’ensemble $\{x \mid |f(x)| \leq \epsilon\}$ soit compact) avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

C’est une algèbre de Banach non unitale.

§2.6 **Proposition.** *Soit X un espace de Hausdorff localement compact mais non compact, et Y sa compactification à un point. On a $\mathcal{C}_0(X)^+ \cong \mathcal{C}(Y)$.*

Démonstration. Il faut montrer que les fonctions continues qui s’annulent à l’infini peuvent être identifiées avec les fonctions continues f de la compactification à un point de X dans $\mathbf{C}$ avec $f(\infty) = 0$. L’extension d’une fonction f de $\mathcal{C}_0(X)$ par $f(\infty) = 0$ définit bien une fonction de $\mathcal{C}(X)$. Inversement, une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ telle que $f(\infty) = 0$ vérifie que $\{x \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$ est le complémentaire de $f^{-1}(]-\epsilon, \epsilon[)$ qui est un ouvert ne contenant pas ∞ , et est donc compact.

On définit ensuite, en notant $\tilde{f}$ l’extension de f à Y par $\tilde{f}(\infty) = 0$, $(f, \lambda) \in \mathcal{C}_0(X)^+ \mapsto \tilde{f}(x) + \lambda \in \mathcal{C}(Y)$. On vérifie que c’est un $*$ -isomorphisme. $\square$

Le théorème de Gelfand définit, pour toute algèbre de Banach commutative A , un morphisme de A dans une algèbre de fonctions sur un espace localement compact.

§2.7 **Définition** (Caractère). Un caractère d’une algèbre de Banach A est un morphisme d’algèbre non nul $A \rightarrow \mathbf{C}$. L’ensemble des caractères (éventuellement vide) est noté $M(A)$ et est appelé le *spectre* de A .

§2.8 *Remarque.* Si A n’est pas unitale, un caractère μ de A s’étend en un caractère μ^+ de A^+ en posant $\mu((0, 1)) = 1$, et la fonction nulle s’étend en le caractère $(a, \lambda) \mapsto \lambda$. On identifie donc $M(A) \cup \{0\}$ avec $M(A^+)$.

§2.9 **Proposition.** *Le spectre d’une algèbre de Banach A est inclus dans la sphère unité du dual A^* de A .*

Démonstration. On remarque tout d'abord que si μ est un caractère de A , alors $\mu(a) \in \text{Spec}(a)$ pour tout $a \in A$. En effet, si $a - \mu(a)$ était inversible dans A , $\mu(a - \mu(a)) = 0$ serait inversible dans $\mathbf{C}$. On a donc $|\mu(a)| \leq \|a\|$, donc μ est borné (donc continu) et $\|\mu\| \leq 1$. De plus, on a $\mu(1) = 1$, donc $\|\mu\| = 1$. $\square$

§2.10 **Definition.** Si A est une algèbre de Banach, on munit $M(A)$ de la topologie induite par la topologie faible* sur A^* . On rappelle que la topologie faible* est celle de la convergence point par point sur les éléments de A .

§2.11 **Lemme.** *Le spectre $M(A)$ d'une algèbre de Banach commutative, muni de la topologie de Gelfand, est un espace localement compact.*

Démonstration. Le théorème de Banach-Alaoglu affirme que la boule unité de A^* est faible* compacte. On montre donc simplement que $M(A) \cup \{0\}$ est clos pour la topologie faible*, et on en déduit qu'il est compact. On fixe pour cela $a, b \in A$, et on remarque que la fonction $\mu \mapsto \mu(a)\mu(b) - \mu(ab)$ est faible* continue (les fonctions $\mu \mapsto \mu(a)$ sont faible* continues car les μ sont continus : $\mu(a_\lambda)$ converge vers $\mu(a)$ pour tout net $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$). Cette fonction étant nulle sur $M(A) \cup \{0\}$, elle est nulle sur sa clôture faible*. Dans ce cas, enlever $\{0\}$ donne un espace localement compact (au pire) ou compact (si $\{0\}$ est isolé).

Si A est unital, alors le point $\{0\}$ est isolé, car la fonction $\mu \mapsto \mu(1)$, qui est continue pour la topologie faible*, le sépare de $M(A)$. $\square$

§2.12 **Definition.** Soit A une algèbre de Banach commutative. La transformée de Gelfand de $a \in A$ est la fonction $\hat{a} : M(A) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $\hat{a}(\mu) = \mu(a)$, c-à-d. $\hat{a}$ est l'évaluation au point a .

La transformation de Gelfand est la fonction $\mathcal{G} : A \rightarrow \mathcal{C}_0(M(A))$ définie par $\mathcal{G}(a) = \hat{a}$.

§2.13 **Théorème (Gelfand).** *Soit A une algèbre de Banach commutative telle que $M(A)$ soit non vide. La transformation de Gelfand $\mathcal{G} : A \rightarrow \mathcal{C}_0(M(A))$ est un morphisme faisant décroître la norme.*

Algèbres stellaires

§2.14 L'algèbre de Banach $\mathcal{C}(X)$ définie (pour X Hausdorff compact) dans la section précédente est en réalité une algèbre stellaire. En effet, en définissant $f^*(x) = \overline{f(x)}$, on vérifie que la propriété des algèbres stellaires est bien satisfaite :

$$\|f\|^2 = \sup_{x \in X} \{|f(x)|^2\} = \sup_{x \in X} \{\overline{f(x)}f(x)\} = \sup_{x \in X} \{f^*f(x)\} = \|f^*f\|$$

De même, l'algèbre de Banach non unital $\mathcal{C}_0(Y)$ pour Y Hausdorff localement compact est une algèbre stellaire non unital lorsque munie de cette même involution.

§2.15 **Lemme.** Soit a un hermitien (on a $a = a^*$) dans une algèbre stellaire A . Alors $\mu(a) \in \mathbf{R}$ pour tout $\mu \in M(A)$.

Démonstration. On considère la série $u = \exp ia = \sum_{k=0}^{\infty} (ia)^k/k!$ qui est convergente dans A (ou dans A^+ si A est non unitale) avec $\|u\| \leq \exp \|a\|$. Alors $u^* = \exp -ia$ et alors $uu^* = 1 = u^*u$, i.e. u est un unitaire. On a donc, par la condition des algèbres stellaires, que $\|u^{-1}\|^2 = \|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$. Comme $\|\mu\| \leq 1$, on obtient $|\mu(u)| \leq 1$ et $|\mu(u)|^{-1} = |\mu(u^{-1})| \leq 1$, donc $|\mu(u)| = 1$. Comme par ailleurs on a $\mu(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(ia)^k/k! = \exp i\mu(a)$ on obtient que $\mu(a) \in \mathbf{R}$. $\square$

§2.16 *Remarque.* Soit A une algèbre stellaire. Si $a \in A$ n'est pas hermitien, on peut écrire $a = a_1 + ia_2$, avec $a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*)$ et $a_2 = \frac{1}{2}(a - a^*)$ deux hermitiens. On obtient alors, pour tout $\mu \in M(A)$,

$$\mu(a^*) = \mu(a_1 - ia_2) = \mu(a_1) - i\mu(a_2) = \overline{\mu(a)}$$

Cela nous donne que $\hat{a}^*(\mu) = \overline{\hat{a}(\mu)}$, c'est-à-dire $\hat{a}^* = (\hat{a})^*$.

§2.17 **Lemme.** Soit A une algèbre stellaire commutative, soit $a \in A$ et λ un élément du spectre de a . Si A est unitale, ou bien si A est non-unitale et $\lambda \neq 0$, il existe un caractère μ tel que $\mu(a) = \lambda$.

Démonstration. Le noyau d'un caractère μ d'une algèbre stellaire unitale commutative est un idéal maximal propre. Si J est un idéal contenant strictement $\ker \mu$, et si $a \in J/\ker \mu$, alors $\mu(a)$ a un inverse, et il existe $b \in A$ tel que $\mu(b)\mu(a) = 1$. Comme ba et $ba - 1_A$ sont dans J , $1_A \in J$.

Réciproquement, si J est un idéal maximal, alors il est clos. En effet, sa clôture est aussi un idéal et, comme nous l'avons déjà remarqué (paragraphe §1.5) un idéal propre dans une algèbre de Banach unitale ne peut être dense. Comme A/J est une algèbre de Banach unitale commutative sans idéaux propres, c'est le corps des complexes (on remarque que, pour tout $y \in A/J$ non nul, $y(A/J)$ est un idéal et qu'il contient nécessairement 1 donc tout élément est inversible, puis on utilise le théorème de Gelfand-Mazur). Il y a donc un unique caractère μ , l'application quotient, tel que $\mu^{-1}(0) = I$.

On obtient alors le résultat pour une algèbre unitale, puisque l'idéal non trivial $A(a - \lambda.1)$ est contenu dans un idéal maximal (une conséquence du lemme de Zorn). Pour le cas non unital, on fait le même raisonnement sur A^+ . $\square$

§2.18 **Théorème** (Stone-Weierstrass). Si X est un espace localement compact, et B est une sous-algèbre close de $\mathcal{C}(X)$ telle que :

1. B sépare les points : pour tous $p \neq q$ dans X , il existe $y \in B$ tel que $y(p) \neq y(q)$;
2. il n'existe pas de point de X où B s'annule ;

3. B est close par conjugaison complexe.

Alors B est égale à $\mathcal{C}(X)$.

§2.19 **Théorème** (Gelfand-Naimark). Si A est une algèbre stellaire commutative, la transformée de Gelfand est un $*$ -isomorphisme isométrique de A sur $\mathcal{C}_0(M(A))$.

Démonstration. On a déjà remarqué que la transformée de Gelfand était un $*$ -morphisme puisque $\widehat{a^*} = (\hat{a})^*$. Elle est isométrique car :

$$\|\hat{a}\|^2 = \|\hat{a^*} \hat{a}\| = \|\widehat{a^* a}\| = r(a^* a) = \|a^* a\| = \|a\|^2$$

où l'égalité $\|\widehat{a^* a}\| = r(a^* a)$ est justifiée par le lemme précédent. En particulier, $\mathcal{G}$ est injective. Comme $\mathcal{G}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0(M(A))$ qui est complète puisque A est complète et $\mathcal{G}$ est isométrique, et par conséquent close. Comme $\mathcal{G}(A)$ vérifie les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass (les deux premières sont immédiates et la troisième est une conséquence du lemme paragraph §2.15, on en déduit que $\mathcal{G}$ est surjective. $\square$

§2.20 **Théorème.** Soit u un unitaire dans une algèbre stellaire A . Si $\text{Spec}(u) \neq \mathbf{T}$ ($\mathbf{T}$ est le cercle unité), alors il existe $a \in A$ hermitien tel que $u = \exp ia$.

Démonstration. Quitte à remplacer u par λu avec $\lambda \in \mathbf{T}$, on peut supposer que $1 \notin \text{Spec}(u)$. Comme u est normal, on peut également supposer que A est commutative, quitte à remplacer A par l'algèbre stellaire engendrée par 1 et u . Soit $\ln : \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{C}$ la branche principale du logarithme. Alors $g = \ln \circ \mathcal{G}(u)$ est un élément de $\mathcal{C}_0(M(A))$ et $\exp g = \mathcal{G}(u)$. Comme $|\mathcal{G}(u)(\omega)| = 1$ pour tout $\omega \in M(A)$, la partie réelle de g est nulle, donc $g = ih$ pour $h = h^*$ dans $\mathcal{C}_0(M(A))$. Soit $a = \mathcal{G}^{-1}(h)$, alors $a = a^*$ et $u = \exp ia$ car $\mathcal{G}(u) = \exp ih = \exp i\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(\exp ia)$. $\square$

§2.21 *Remarque.* Si $\|1 - u\| < 2$, alors $\text{Spec}(u) \neq \mathbf{T}$. En effet, $\|1 - u\| = r(1 - u) = \sup\{1 - \lambda \mid \lambda \in \text{Spec}(u)\}$, d'où $-1 \notin \text{Spec}(u)$.

3 Une équivalence de catégorie

Calcul fonctionnel

§3.1 *Remarque.* Si X et Y sont deux espace de Hausdorff compacts, et $f : X \rightarrow Y$ est continue, la *transposée* :

$$\mathcal{C}f : \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X), \quad g \mapsto g \circ f$$

est un $*$ -homomorphisme unital. Si f est un homeomorphisme, alors $\mathcal{C}f$ est un $*$ -isomorphisme unital.

§3.2 **Théorème.** Soit a un élément normal dans une algèbre stellaire unitale A , et $\iota : \text{Spec}(a) \rightarrow \mathbf{C}$ l'injection canonique du spectre dans $\mathbf{C}$. Il existe un unique $*$ -homomorphisme unital $\phi : \mathcal{C}(\text{Spec}(a)) \rightarrow A$ tel que $\phi(\iota) = a$. De plus, ϕ est isométrique et $\text{Im}(\phi)$ est la sous-algèbre stellaire de A engendrée par 1 et a .

Démonstration. Soit B l'algèbre stellaire commutative engendrée par 1 et a . La transformée de Gelfand $\mathcal{G} : B \rightarrow \mathcal{C}(M(B))$ est un $*$ -isomorphisme, tout comme $\mathcal{C}\hat{a} : \mathcal{C}(\text{Spec}(a)) \rightarrow \mathcal{C}(M(B))$ car $\hat{a} : M(B) \rightarrow \text{Spec}(a)$ est un homeomorphisme. Soit ϕ la composée $\mathcal{G}^{-1} \circ \mathcal{C}\hat{a}$, qui est un $*$ -isomorphisme, et donc isométrique. On a $\phi(\iota) = a$ car $\phi(\iota) = \mathcal{G}^{-1}(\mathcal{C}\hat{a}(\iota)) = \mathcal{G}^{-1}(\hat{a}) = a$, et ϕ est unital. Par le théorème de Stone-Weierstrass, on sait que $\mathcal{C}(\text{Spec}(a))$ est engendrée par 1 et ι , donc ϕ est l'unique $*$ -homomorphisme de $\mathcal{C}(\text{Spec}(a))$ dans A tel que $\phi(\iota) = a$. $\square$

§3.3 L'unique $*$ -homomorphisme unital tel que $\phi(\iota) = a$ que l'on vient de définir est appelé le *calcul fonctionnel* en a . Si p est un polynôme, alors $\phi(p) = p(a)$, donc pour $f \in \mathcal{C}(\text{Spec}(a))$ on écrira $f(a)$ pour $\phi(f)$.

Si B est l'image de ϕ , alors B est l'algèbre engendrée par 1 et a . Si $\tau \in M(B)$, alors $f(\tau(a)) = \tau(f(a))$ car les fonctions $f \mapsto f(\tau(a))$ et $f \mapsto \tau(f(a))$ sont des $*$ -homomorphismes prenant les mêmes valeurs sur les éléments générateurs de B .

§3.4 **Théorème.** Soit a un élément normal d'une algèbre stellaire unitale A , et soit $f \in \mathcal{C}(\text{Spec}(a))$. Alors $\text{Spec}(f(a)) = f(\text{Spec}(a))$. De plus, si $g \in \mathcal{C}(\text{Spec}(f(a)))$, alors $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Démonstration. Soit B l'algèbre stellaire engendrée par 1 et a . Alors

$$\text{Spec}(f(a)) = \{\tau(f(a)) \mid \tau \in M(B)\} = \{f(\tau(a)) \mid \tau \in M(B)\} = f(\text{Spec}(a))$$

Si C est la $*$ -sous-algèbre engendrée par 1 et $f(a)$, alors $C \subset B$ et pour tout $\tau \in M(B)$, la restriction τ_C est un caractère sur C . On a alors $\tau((g \circ f)(a)) = g(f(\tau(a))) = g(\tau_C(f(a))) = \tau_C(g(f(a))) = \tau(g(f(a)))$. Donc $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. $\square$

Catégories

§3.5 **Définition.** On notera $\mathfrak{CompH}$ la catégorie dont les objets sont les espaces de Hausdorff compacts et les morphismes sont les fonctions continues.

On notera $\mathfrak{Stell}_{\text{com}}^1$ la catégorie dont les objets sont les algèbres stellaires uniales commutatives et les morphismes sont les $*$ -homomorphismes.

§3.6 On a vu que si $f : X \rightarrow Y$ est une fonction continue entre espaces de Hausdorff compacts, alors $\mathcal{C}f$ est un $*$ -homomorphisme unital. On vérifie de plus que si $g : Y \rightarrow Z$ est une autre fonction continue entre espaces de Hausdorff compacts, alors $\mathcal{C}(g \circ f) = \mathcal{C}f \circ \mathcal{C}g$. Comme de plus $\mathcal{C}\text{Id}_X = \text{Id}_X$, on

a définit un foncteur contravariant $C : f \mapsto Cf$ de la catégorie $\mathfrak{CompH}$ dans la catégorie $\mathfrak{Stell}_{\text{com}}^1$.

§3.7 Il existe un autre foncteur contravariant, qui va de $\mathfrak{Stell}_{\text{com}}^1$ dans $\mathfrak{CompH}$. La topologie de Gelfand est en effet définie comme la plus faible topologie pour laquelle les fonctions $\hat{a} : M(A) \rightarrow \mathbf{C}$ pour $a \in A$ sont continues. Elle possède donc une propriété universelle : une fonction $f : X \rightarrow M(A)$ est continue si et seulement si chaque $\hat{a} \circ f : X \rightarrow \mathbf{C}$ est continue.

§3.8 **Définition.** Si $\phi : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme unital entre algèbres stellaires unitales commutatives, on note $M\phi$ la fonction $\mu \mapsto \mu \circ \phi$ de $M(B)$ sur $M(A)$. Alors $M\phi$ est une fonction continue puisque $\hat{a} \circ M(\phi) = \widehat{\phi(a)}$ est continue pour tout $a \in A$. Si $\psi : B \rightarrow C$ est un autre $*$ -homomorphisme unital, alors $M(\psi \circ \phi) = M\psi \circ M\phi$. C'est donc un foncteur contravariant de $\mathfrak{Stell}_{\text{com}}^1$ dans $\mathfrak{CompH}$.

§3.9 **Théorème.** Soit X un espace de Hausdorff compact. Pour tout $x \in X$, on note ϵ_x le caractère sur $\mathcal{C}(X)$ définie par l'évaluation en x , i.e. $\epsilon_x(f) = f(x)$. Alors la fonction

$$X \rightarrow M(\mathcal{C}(X)), \quad x \mapsto \epsilon_x$$

est un homeomorphisme.

Démonstration. Cette fonction est continue, car si $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un net dans X convergeant vers un point x , alors $\lim_{\lambda \in \Lambda} f(x_\lambda) = f(x)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, donc le net $(\epsilon_{x_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ est faible* convergeant vers ϵ_x .

Cette fonction est injective, car si x, x' sont deux points distincts de X , par le lemme d'Uryshon, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ telle que $f(x) = 0$ et $f(x') = 1$, et donc $\epsilon_x(f) \neq \epsilon_{x'}(f)$.

On montre maintenant la surjectivité. Soit $\tau \in M(\mathcal{C}(X))$. Alors $N = \ker(\tau)$ est une sous-algèbre stellaire propre de $\mathcal{C}(X)$. De plus, N sépare les points de X car si x, x' sont des points distincts de X , il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ telle que $f(x) \neq f(x')$ comme on vient de la voir, et alors $g = f - \tau(f)$ est une fonction dans N telle que $g(x) \neq g(x')$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, on déduit qu'il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $f \in N$. Donc $(f - \tau(f))(x) = 0$, donc $f(x) = \tau(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$. Par conséquent, $\tau = \epsilon_x$ et la fonction est une bijection continue entre espaces de Hausdorff compacts, donc c'est un homeomorphisme. $\square$

§3.10 On a $(\epsilon_Y \circ f) : x \mapsto \epsilon_{f(x)}$, donc $(\epsilon_Y \circ f)(x)(g) = g(f(x))$. D'autre part, $(MCf \circ \epsilon_X)(x) : MCf(\epsilon_x)$ et donc $(MCf \circ \epsilon_X)(x)(g) = (\epsilon_x \circ Cf)(g) = \epsilon_x(g \circ f) = g \circ f(x)$.

Au final, on a $\epsilon_Y \circ f = MCf \circ \epsilon_X$ pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$ continue, et on a défini une transformation naturelle bijective entre le foncteur MC et le foncteur identité sur $\mathfrak{CompH}$.

§3.11 Le théorème de Gelfand-Naimark définit une autre transformation naturelle $\mathcal{G}$ entre le foncteur identité sur $\mathfrak{Stell}_{\text{com}}^1$ et le foncteur CM . En effet, le

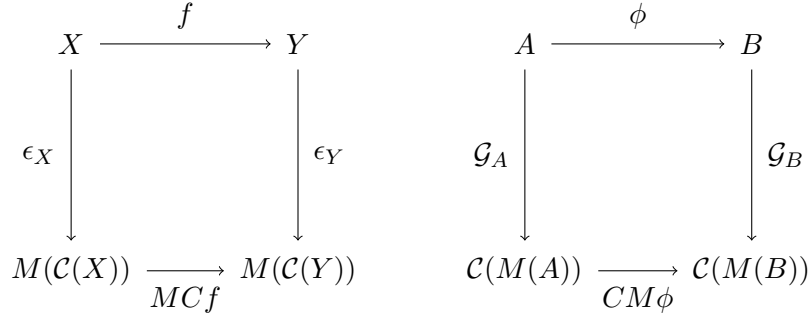


FIGURE 1 – Diagrammes de Naturalité

théorème nous dit que $a \mapsto \hat{a}$ est un isomorphisme de A sur $\mathcal{C}(M(A))$. De plus, si $\phi : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme unital, alors pour $\hat{a} \in \mathcal{C}(M(A))$ et $\nu \in M(B)$, on a

$$((CM\phi)\hat{a})\nu = \hat{a}((M\phi)\nu) = \hat{a}(\nu \circ \phi) = \nu(\phi(a)) = \widehat{\phi(a)}(\nu)$$

donc $(CM\phi)(\hat{a}) = \mathcal{G}_B(\phi(a))$ ou de manière équivalente $\mathcal{G}_B \circ \phi = CM\phi \circ \mathcal{G}_A$.

§3.12 **Proposition.** *Les catégories $\mathfrak{CompH}$ et $\mathfrak{Stell}_{com}^1$ sont équivalentes.*

Démonstration. Nous venons de montrer (voir figure 1) que ϵ (resp. $\mathcal{G}$) sont des transformations naturelles entre $M \circ \mathcal{C}$ et le foncteur identité sur $\mathfrak{CompH}$ (resp. entre $\mathcal{C} \circ M$ et le foncteur identité sur $\mathfrak{Stell}_{com}^1$). Ces transformations naturelles étant bijectives, les deux catégories sont bien équivalentes. $\square$

Références

- [Bef10] Emmanuel Beffara. Le théorème de représentation de gelfand. <http://iml.univ-mrs.fr/~seiller/Seances.html>, 2010. 2, 6
- [GBV00] José M. Gracia-Bondía and Joseph C. Várilly. *Elements of Non-commutative Geometry*. Birkhäuser Advanced Texts. Birkhäuser, Boston, 2000. 1
- [Mun00] James Munkres. *Topology*. Prentice Hall, second edition edition, 2000. 7
- [Mur90] Gerard J. Murphy. *C*-algebras and operator theory*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1990. 2