

De la logique linéaire à la logique différentielle (sans promotion !)

Giulio Guerrieri

Université Paris 7 / Università Roma Tre

11 mars 2010

Projet VERITÉ & PREUVE

De la logique linéaire à la logique différentielle (sans promotion !)

Giulio Guerrieri

Université Paris 7 / Università Roma Tre

11 mars 2010

Projet VERITÉ & PREUVE

Outline

- 1 Introduction
- 2 La logique linéaire
- 3 Le modèle relationnel de LL
- 4 La logique linéaire différentielle

Outline

- 1 Introduction
- 2 La logique linéaire
- 3 Le modèle relationnel de LL
- 4 La logique linéaire différentielle

Notre background : la correspondance de Curry-Howard

Logique		λ -calcul		Intuition informatique
formule	$\longleftrightarrow$	type	$\longleftrightarrow$	type de donné, spécification
preuve	$\longleftrightarrow$	λ -terme	$\longleftrightarrow$	programme
élimination des coupures	$\longleftrightarrow$	β -réduction	$\longleftrightarrow$	calcul, exécution

Cette correspondance est valable, par exemple, si on prend :

- comme système logique : la déduction naturelle propositionnelle intuitionniste minimale
- comme système de calcul : le λ -calcul simplement typé

Elle peut être étendue à des systèmes logiques et de calcul plus grands (second ordre, calcul des séquents classique, etc.).

Notre background : la correspondance de Curry-Howard

Logique		λ -calcul		Intuition informatique
formule	$\longleftrightarrow$	type	$\longleftrightarrow$	type de donné, spécification
preuve	$\longleftrightarrow$	λ -terme	$\longleftrightarrow$	programme
élimination des coupures	$\longleftrightarrow$	β -réduction	$\longleftrightarrow$	calcul, exécution

Cette correspondance est valable, par exemple, si on prend :

- comme système logique : la déduction naturelle propositionnelle intuitionniste minimale
- comme système de calcul : le λ -calcul simplement typé

Elle peut être étendue à des systèmes logiques et de calcul plus grands (second ordre, calcul des séquents classique, etc.).

Les règles structurelles

- *affaiblissement* (*w*) : on peut affaiblir un énoncé en augmentant le nombre d'hypothèses

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A} w$$

- *contraction* (*c*) : on peut dériver les mêmes conséquences de plusieurs exemples d'une hypothèse comme juste d'une

$$\frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A} c$$

Du point de vue statique (rédaction des preuves), les règles structurelles concernent la gestion du contexte :

- sont utilisées habituellement (implicitement) dans la pratique mathématique : elles permettent de démontrer un théorème en utilisant une hypothèse autant de fois qu'on veut au cours de la démonstration (0 fois, 1 fois, 10 fois, etc.)
- avaient un statut marginal, avant l'avènement de la logique linéaire.

Cependant, du point de vue dynamique (élimination des coupures), les règles structurelles concernent la gestion (*duplication ou effacement*) des ressources
↪ aspect crucial pour toute approche théorique au calcul.

Les règles structurelles

- *affaiblissement* (*w*) : on peut affaiblir un énoncé en augmentant le nombre d'hypothèses

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A} w$$

- *contraction* (*c*) : on peut dériver les mêmes conséquences de plusieurs exemples d'une hypothèse comme juste d'une

$$\frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A} c$$

Du point de vue statique (rédaction des preuves), les règles structurelles concernent la gestion du contexte :

- sont utilisées habituellement (implicitement) dans la pratique mathématique : elles permettent de démontrer un théorème en utilisant une hypothèse autant de fois qu'on veut au cours de la démonstration (0 fois, 1 fois, 10 fois, etc.)
- avaient un statut marginal, avant l'avènement de la logique linéaire.

Cependant, du point de vue dynamique (élimination des coupures), les règles structurelles concernent la gestion (*duplication ou effacement*) des ressources
↪ aspect crucial pour toute approche théorique au calcul.

L'élimination de coupure face aux règles structurelles

- l'affaiblissement (w) fait *effacer* des (morceaux entiers de) preuves

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash \Gamma} w \quad \frac{\vdots}{\vdash \Delta, \neg A} \pi}{\vdash \Gamma, \Delta} cut \quad \longrightarrow_{cut} \quad \frac{\vdots}{\vdash \Gamma} w$$

- la contraction (c) fait *dupliquer* des (morceaux entiers de) preuves

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash \Gamma, A, A} c \quad \frac{\vdots}{\vdash \Delta, \neg A} \pi}{\vdash \Gamma, \Delta} cut \quad \longrightarrow_{cut} \quad \frac{\frac{\vdots}{\vdash \Gamma, A, A} \pi \quad \frac{\vdots}{\vdash \Delta, \neg A} \pi}{\vdash \Gamma, \Delta, A} cut \quad \frac{\vdots}{\vdash \Delta, \neg A} \pi}{\frac{\vdash \Gamma, \Delta, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} c} cut$$

Si la preuve π est coupée avec n règles c consécutives, on aura $n + 1$ copies de π .

Dans la logique classique et intuitionniste, pendant l'élimination des coupures toute preuve peut être utilisée autant de fois qu'on veut (un nombre $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand $\rightsquigarrow$ *infini potentiel*)

Les règles structurelles dans le λ -calcul

Les règles structurelles correspondent, via Curry-Howard, a quoi dans le λ -calcul ?

- l'affaiblissement (*w*) fait *effacer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x x) M \rightarrow_{\beta} \lambda x x$$

- la contraction (*c*) fait *dupliquer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x f(fx)) M \rightarrow_{\beta} \lambda x M(Mx)$$

Dans le λ -calcul, pendant la β -réduction toute λ -terme peut être utilisé autant de fois qu'on veut (un nombre $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand $\rightsquigarrow$ *infini potentiel*)

Les règles structurelles dans le λ -calcul

Les règles structurelles correspondent, via Curry-Howard, à quoi dans le λ -calcul ?

- l'affaiblissement (w) fait *effacer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x x)M \rightarrow_{\beta} \lambda x x$$

$$\frac{\frac{\frac{x : X \vdash x : X}{\vdash \lambda x x : X \rightarrow X} \text{abs}}{f : X \rightarrow X, x : X \vdash x : X} w}{\vdash \lambda f \lambda x x : (X \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow X)} \text{abs} \quad \frac{\vdash M : X \rightarrow X}{\vdash (\lambda f \lambda x x)M : X \rightarrow X} \text{app} \quad \frac{\vdash M : X \rightarrow X}{\vdash M : X \rightarrow X} \pi \longrightarrow_{\text{cut}} \frac{\frac{x : X \vdash x : X}{\vdash \lambda x x : X \rightarrow X} \text{abs}}{\vdash \lambda x x : X \rightarrow X} \text{abs}$$

- la contraction (c) fait *dupliquer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x f(fx))M \rightarrow_{\beta} \lambda x M(Mx)$$

Dans le λ -calcul, pendant la β -réduction toute λ -terme peut être utilisé autant de fois qu'on veut (un nombre $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand $\rightsquigarrow$ *infini potentiel*)

Les règles structurelles dans le λ -calcul

Les règles structurelles correspondent, via Curry-Howard, à quoi dans le λ -calcul ?

- l'affaiblissement (w) fait *effacer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x x) M \rightarrow_{\beta} \lambda x x$$

- la contraction (c) fait *dupliquer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x f(fx)) M \rightarrow_{\beta} \lambda x M(Mx)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{z : X \rightarrow X \vdash z : X \rightarrow X} \text{var} \quad \frac{}{y : X \rightarrow X \vdash y : X \rightarrow X} \text{var} \quad \frac{}{x : X \vdash x : X} \text{var} \\
 \hline
 \frac{}{z : X \rightarrow X \vdash z : X \rightarrow X} \text{var} \quad \frac{}{y : X \rightarrow X, x : X \vdash yx : X} \text{app} \\
 \hline
 \frac{}{z : X \rightarrow X, y : X \rightarrow X, x : X \vdash z(yx) : X} \text{c} \\
 \hline
 \frac{}{f : X \rightarrow X, x : X \vdash f(fx) : X} \text{abs} \\
 \hline
 \frac{}{f : X \rightarrow X \vdash \lambda x f(fx) : X \rightarrow X} \text{abs} \\
 \hline
 \frac{}{\vdash \lambda f \lambda x f(fx) : (X \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow X)} \text{abs} \quad \vdash M : X \rightarrow X \\
 \hline
 \vdash (\lambda f \lambda x f(fx)) M : X \rightarrow X \quad \text{app}
 \end{array}$$

Dans le λ -calcul, pendant la β -réduction toute λ -terme peut être utilisé autant de fois qu'on veut (un nombre $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand $\rightsquigarrow$ *infini potentiel*)

Les règles structurelles dans le λ -calcul

Les règles structurelles correspondent, via Curry-Howard, à quoi dans le λ -calcul ?

- l'affaiblissement (w) fait *effacer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x x)M \rightarrow_{\beta} \lambda x x$$

- la contraction (c) fait *dupliquer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x f(fx))M \rightarrow_{\beta} \lambda x M(Mx)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{cut} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{\vdash M : X \rightarrow X} \quad \frac{\frac{\vdots}{\vdash M : X \rightarrow X} \quad \frac{\vdots}{x : X \vdash x : X} \text{var}}{\vdash M : X \rightarrow X} \quad \frac{\vdots}{x : X \vdash Mx : X} \text{app}}{\vdash M : X \rightarrow X} \text{app} \quad \frac{\vdots}{x : X \vdash M(Mx) : X} \text{abs}}{\vdash \lambda x M(Mx) : X \rightarrow X} \text{abs} \end{array}$$

Dans le λ -calcul, pendant la β -réduction toute λ -terme peut être utilisé autant de fois qu'on veut (un nombre $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand $\rightsquigarrow$ *infini potentiel*)

Les règles structurelles dans le λ -calcul

Les règles structurelles correspondent, via Curry-Howard, a quoi dans le λ -calcul ?

- l'affaiblissement (*w*) fait *effacer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x x) M \rightarrow_{\beta} \lambda x x$$

- la contraction (*c*) fait *dupliquer* des (sous-)termes, par exemple :

$$(\lambda f \lambda x f(fx)) M \rightarrow_{\beta} \lambda x M(Mx)$$

Dans le λ -calcul, pendant la β -réduction toute λ -terme peut être utilisé autant de fois qu'on veut (un nombre $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand $\rightsquigarrow$ *infini potentiel*)

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :

La règle de promotion permet d'encoder la notion de "ressources utilisées une seule fois" (la linéarité) dans la logique classique et intuitionniste. Elle permet aussi d'encoder la notion de "ressources utilisées autant de fois qu'on veut" (la non linéarité) dans la logique linéaire. La règle de promotion est définie dans la logique linéaire (LL) et la logique différentielle (DL).

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :
 - 1 dans la sémantique dénotationnelle de LL : par exemple, dans le *modèle relationnel*
 - 2 est un calcul *syntactique* dans la logique *différentielle* et dans la logique *différentielle* (des raffinements respectivement de LL et de l'intuitionnisme)

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :
 - 1 dans la sémantique dénotationnelle de LL : par exemple, dans le *modèle relationnel*
 - 2 au niveau syntaxique : dans la *logique linéaire différentielle* et dans le *λ -calcul différentiel* (des raffinement respectivement de LL et du λ -calcul)

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :
 - 1 dans la sémantique dénotationnelle de LL : par exemple, dans le *modèle relationnel*
 - 2 au niveau syntaxique : dans la *logique linéaire différentielle* et dans le *λ -calcul différentiel* (des raffinement respectivement de LL et du λ -calcul)

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :
 - 1 dans la sémantique dénotationnelle de LL : par exemple, dans le *modèle relationnel*
 - 2 au niveau syntaxique : dans la *logique linéaire différentielle* et dans le *λ -calcul différentiel* (des raffinement respectivement de LL et du λ -calcul)

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :
 - 1 dans la sémantique dénotationnelle de LL : par exemple, dans le *modèle relationnel*
 - 2 au niveau syntaxique : dans la *logique linéaire différentielle* et dans le *λ -calcul différentiel* (des raffinement respectivement de LL et du λ -calcul)

Outline

- 1 Introduction
- 2 La logique linéaire
- 3 Le modèle relationnel de LL
- 4 La logique linéaire différentielle

La logique linéaire (LL)

LL (Girard,1986) introduit deux nouveaux connecteurs unaires, les *exponentiels* :

$!$ (*bien sur*) $?$ (*pourquoi pas*)

en donnant un statut logique aux opérations de duplication et effacement.

- $?$ et $!$ sont les duaux l'un de l'autre :

$$(?A)^\perp = !A^\perp \quad (!A)^\perp = ?A^\perp$$

- règles d'introduction des exponentiels : *promotion* ($!$) et *déréliction* ($?d$)

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} ! \quad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} ?d$$

- règles structurelles : affaiblissement ($?w$) et contraction ($?c$)

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} ?w \quad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} ?c$$

Attention : Le connecteur $!$ ne peut être introduit que si toutes les formules du contexte sont de la forme $?B$.

La règle de promotion comme règle infinitaire 1/2

Avec LL on a des outils pour mieux maîtriser le phénomène de l'effacement et de la duplication de ressources pendant l'élimination des coupures.

Il n'y a que la règle promotion qui permet de rendre une formule (et la preuve correspondante) effaçable ou duplicable, mais ceci nécessite un contexte adapté.

Uniquement les formules de la forme $?B$ peuvent être affaiblies ou contractées

↪ Uniquement les preuves d'un séquent qui contiennent une formule de la forme $!A$ peuvent être effacées ou dupliquées. Toutes les autres preuves ne peuvent être utilisées qu'une fois pendant l'élimination des coupures.

Dans LL, pendant l'élimination des coupures, uniquement les preuves de $!A$ peut être utilisée autant de fois qu'on veut i.e. un nombre $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand. (la formule $!A$ signifie “ A autant de fois qu'on veut”)

↪ La règle promotion est la (seule) règle infinitaire de la logique, si on analyse la logique (classique ou intuitionniste) à travers LL.

La règle de promotion comme règle infinitaire 2/2

La règle promotion est implicite dans la logique classique est intuitionniste.

LL décompose l'implication intuitionniste $\rightarrow$ en deux opérations logiques distinctes : la *promotion* (!) et l'*implication linéaire* ($\multimap$)

$$A \rightarrow B = !A \multimap B$$

où :

- $!A$ signifie “A autant de fois qu’on veut” (A devient une ressource infinie)
- $\multimap$ est l'implication linéaire qui utilise les arguments (i.e. les hypothèses) exactement une fois : elle est une causalité qui consomme la ressource utilisée (si elle n'est pas infinie)

↪ On peut voir LL comme un raffinement de la logique intuitionniste et classique

Les réseaux de preuve de LL

Le “prix à payer” dans LL pour ce raffinement : les connecteurs classiques $\wedge$ et $\vee$ “se splittent” en deux :



En effet, les règles multiplicatives et additives des connecteurs $\wedge$ et $\vee$ sont inter-dérivables uniquement modulo les règles structurelles (que dans LL ne sont utilisables que dans certains contextes)

Avantage : Dans LL, on peut représenter les preuves comme des *graphes orientés* appelées *réseaux de preuve*, où :

- les arêtes sont étiquetées par les formules de LL
- les noeuds “traduisent” application des règles de dérivation

et on peut définir l’élimination des coupures directement sur les réseaux de preuve.

Comme ça, on se débarrasse d’un certain pédantisme syntaxique du calcul des séquents.

Les réseaux de preuve de LL

Le “prix à payer” dans LL pour ce raffinement : les connecteurs classiques $\wedge$ et $\vee$ “se splittent” en deux :



En effet, les règles multiplicatives et additives des connecteurs $\wedge$ et $\vee$ sont inter-dérivables uniquement modulo les règles structurelles (que dans LL ne sont utilisables que dans certains contextes)

Avantage : Dans LL, on peut représenter les preuves comme des *graphes orientés* appelées *réseaux de preuve*, où :

- les arêtes sont étiquetées par les formules de LL
- les noeuds “traduisent” application des règles de dérivation

et on peut définir l’élimination des coupures directement sur les réseaux de preuve.

Comme ça, on se débarrasse d’un certain pédantisme syntaxique du calcul des séquents.

La promotion dans les réseaux de preuve : les boîtes

Question : Est-ce que les réseaux de preuve sont vraiment des graphes orientés ?

Non, à cause de la règle promotion (qui est une règle dépendant du contexte).

La règle promotion se traduit dans les réseaux de preuve en la *boîte* :

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} ! \quad \longleftrightarrow$$

Dans les réseaux de preuve on ne peut pas se débarrasser complètement de la séquentialisation.

La boîte délimite un morceau de preuve qui peut être effacé ou dupliqué pendant l'élimination des coupures, i.e. marque une ressource qui peut être utilisé autant de fois qu'on veut.

La promotion dans les réseaux de preuve : les boîtes

Question : Est-ce que les réseaux de preuve sont vraiment des graphes orientés ?
Non, à cause de la règle promotion (qui est une règle dépendant du contexte).

La règle promotion se traduit dans les réseaux de preuve en la *boîte* :

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} ! \quad \longleftrightarrow$$

Dans les réseaux de preuve on ne peut pas se débarrasser complètement de la séquentialisation.

La boîte délimite un morceau de preuve qui peut être effacé ou dupliqué pendant l'élimination des coupures, i.e. marque une ressource qui peut être utilisé autant de fois qu'on veut.

Traduction du λ -calcul dans les réseaux de LL

On peut associer à tout λ -terme (pur ou typé) M un réseau de preuve M^* de LL. Pour cette traduction on n'utilise que les connecteurs multiplicatifs et exponentiels de LL (MELL)

La traduction est pénible à écrire, mais l'idée est simple, car **l'application n'est pas linéaire** :

Tout λ -terme qui est argument d'une application doit être “promu” (i.e. emboîté)
 $\rightsquigarrow$ dans la traduction $(MN)^*$ du λ -terme MN , on “compose” les traductions M^* et N^* de sorte que N^* est à l'intérieur d'une boîte.

$\rightsquigarrow$ Comme ça, N devient une ressource utilisable un nombre arbitraire de fois pendant la réduction.

Theorem (Simulation : Danos, 1990)

Soit M un λ -terme. Si $M \rightarrow_{\beta} M'$ alors $M^* \rightarrow_{cut} (M')^*$ se réduit en au moins une étape

Traduction du λ -calcul dans les réseaux de LL

On peut associer à tout λ -terme (pur ou typé) M un réseau de preuve M^* de LL. Pour cette traduction on n'utilise que les connecteurs multiplicatifs et exponentiels de LL (MELL)

La traduction est pénible à écrire, mais l'idée est simple, car **l'application n'est pas linéaire** :

Tout λ -terme qui est argument d'une application doit être “promu” (i.e. emboîté) $\rightsquigarrow$ dans la traduction $(MN)^*$ du λ -terme MN , on “compose” les traductions M^* et N^* de sorte que N^* est à l'intérieur d'une boîte.

$\rightsquigarrow$ Comme ça, N devient une ressource utilisable un nombre arbitraire de fois pendant la réduction.

Theorem (Simulation : Danos, 1990)

Soit M un λ -terme. Si $M \rightarrow_{\beta} M'$ alors $M^* \rightarrow_{cut} (M')^*$ se réduit en au moins une étape

Outline

- 1 Introduction
- 2 La logique linéaire
- 3 Le modèle relationnel de LL
- 4 La logique linéaire différentielle

Question sur l'infini

Jusqu'à ici on a découvert le caractère infinitaire de la règle promotion d'une façon un peu vague. On voudrais caractériser cette infinitude.

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :
 - 1 dans la *sémantique dénotationnelle* de LL : par exemple, dans le *modèle relationnel*
 - 2 au niveau *syntactique* : dans la *logique linéaire différentielle* et dans le *λ -calcul différentiel* (des raffinement respectivement de LL et du λ -calcul)

Question sur l'infini

Jusqu'à ici on a découvert le caractère infinitaire de la règle promotion d'une façon un peu vague. On voudrais caractériser cette infinitude.

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :
 - 1 dans la *sémantique dénotationnelle* de LL : par exemple, dans le *modèle relationnel*
 - 2 au niveau *syntactique* : dans la *logique linéaire différentielle* et dans le *λ -calcul différentiel* (des raffinement respectivement de LL et du λ -calcul)

Question sur l'infini

Jusqu'à ici on a découvert le caractère infinitaire de la règle promotion d'une façon un peu vague. On voudrais caractériser cette infinitude.

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, c'est la règle *promotion* définie dans la logique linéaire (LL), un raffinement de la logique classique et intuitionniste
- 2 Oui :
 - 1 dans la *sémantique dénotationnelle* de LL : par exemple, dans le *modèle relationnel*
 - 2 au niveau *syntactique* : dans la *logique linéaire différentielle* et dans le *λ -calcul différentiel* (des raffinement respectivement de LL et du λ -calcul)

Qu'est-ce que la sémantique ?

- **Qu'est-ce que la syntaxe ?** L'alphabet et les règles de construction des preuves/programmes.
- **Pourquoi la sémantique est-elle nécessaire ?** Prolifération des syntaxes et manque de conventions.
- **Qu'est-ce que la sémantique ?** L'interprétation d'un(e) preuve/programme par un objet mathématique conçu pour étudier certaines propriétés du système/langage.

Sémantique dénotationnelle : donner des interprétation des preuves/programmes qui sont des invariantes du calcul (l'interprétation reste la même pendant les divers stades de l'exécution de la preuve/programme)

$$\pi \rightarrow \pi' \quad \Rightarrow \quad \llbracket \pi \rrbracket = \llbracket \pi' \rrbracket$$

Typiquement, on fixe une catégorie $\mathcal{C}$ opportune et on interprète

- chaque formule/type A par un objet $\llbracket A \rrbracket$ de $\mathcal{C}$
- chaque preuve/programme de $A \vdash B$ par un morphisme de $\llbracket A \rrbracket$ dans $\llbracket B \rrbracket$

Qu'est-ce que la sémantique ?

- **Qu'est-ce que la syntaxe ?** L'alphabet et les règles de construction des preuves/programmes.
- **Pourquoi la sémantique est-elle nécessaire ?** Prolifération des syntaxes et manque de conventions.
- **Qu'est-ce que la sémantique ?** L'interprétation d'un(e) preuve/programme par un objet mathématique conçu pour étudier certaines propriétés du système/langage.

Sémantique dénotationnelle : donner des interprétation des preuves/programmes qui sont des invariantes du calcul (l'interprétation reste la même pendant les divers stades de l'exécution de la preuve/programme)

$$\pi \rightarrow \pi' \quad \Rightarrow \quad \llbracket \pi \rrbracket = \llbracket \pi' \rrbracket$$

Typiquement, on fixe une catégorie $\mathcal{C}$ opportune et on interprète

- chaque formule/type A par un objet $\llbracket A \rrbracket$ de $\mathcal{C}$
- chaque preuve/programme de $A \vdash B$ par un morphisme de $\llbracket A \rrbracket$ dans $\llbracket B \rrbracket$

Le modèle relationnel de (ME)LL 1/2

On associe à toute formule A de MELL un ensemble $|A|$ appelé *trame* de la manière suivante :

- on fixe un ensemble (non vide) $|X| = |X^\perp|$ pour chaque variable propositionnelle X
- on définit :

$$|A \otimes B| = |A| \times |B| \quad |A \wp B| = |A| \times |B|$$

$$|!A| = \mathcal{M}_{fin}(|A|) \quad |?A| = \mathcal{M}_{fin}(|A|)$$

où $\mathcal{M}(E)$ est l'ensemble des multi-ensembles finis d'éléments d' E .

↪ Du coup, pour toute formule A , on a $|A| = |A^\perp|$ (la dualité est dégénérée).

Une *pseudo-expérience* sur un réseau de preuve π est une fonction qui associe à chaque arête de type A à profondeur 0 de π un élément de $|A|$.

Le *résultat* d'une pseudo-expérience est la suite des éléments associés aux conclusion du réseau.

Une *expérience* est une pseudo-expérience telle que :

- les éléments associés aux deux conclusions d'un nœud *ax* sont les mêmes
- les éléments associés aux deux prémisses d'un nœud *cut* sont les mêmes
- l'élément associé à la conclusion d'un nœud $\otimes$ ou $\wp$ est le couple des éléments associés à ses prémisses

Le modèle relationnel de (ME)LL 1/2

On associe à toute formule A de MELL un ensemble $|A|$ appelé *trame* de la manière suivante :

- on fixe un ensemble (non vide) $|X| = |X^\perp|$ pour chaque variable propositionnelle X
- on définit :

$$|A \otimes B| = |A| \times |B| \quad |A \wp B| = |A| \times |B|$$

$$|!A| = \mathcal{M}_{fin}(|A|) \quad |?A| = \mathcal{M}_{fin}(|A|)$$

où $\mathcal{M}(E)$ est l'ensemble des multi-ensembles finis d'éléments d' E .

↪ Du coup, pour toute formule A , on a $|A| = |A^\perp|$ (la dualité est dégénérée).

Une *pseudo-expérience* sur un réseau de preuve π est une fonction qui associe à chaque arête de type A à profondeur 0 de π un élément de $|A|$.

Le *résultat* d'une pseudo-expérience est la suite des éléments associés aux conclusion du réseau.

Une *expérience* est une pseudo-expérience telle que :

- les éléments associés aux deux conclusions d'un nœud *ax* sont les mêmes
- les éléments associés aux deux prémisses d'un nœud *cut* sont les mêmes
- l'élément associé à la conclusion d'un nœud $\otimes$ ou $\wp$ est le couple des éléments associés à ses prémisses

Le modèle relationnel de (ME)LL 2/2

- si l'élément associé à la prémisse d'un nœud $?d$ est x , celui associé à sa conclusion est $[x]$
- l'élément associé à la conclusion d'un nœud $?w$ est $[]$
- l'élément associé à la conclusion d'un nœud $?c$ est la somme (i.e. l'union) des éléments associés à ses prémisses
- si les éléments associés aux conclusions d'une boîte sont m_0 pour la porte principale et $m_1, \dots, m_k$ pour les portes auxiliaires alors il existe $p \geq 0$ expériences du réseau situé à l'intérieur de la boîte de résultats $(x_0^i, n_1^i, \dots, n_k^i)_{1 \leq i \leq p}$ avec $m_0 = [x_0^1, \dots, x_0^p]$ et pour tout $1 \leq j \leq k$, $m_j = n_j^1 \cup \dots \cup n_j^p$

L'*interprétation* $\llbracket \pi \rrbracket$ d'un réseau π est l'ensemble des résultats de toutes les expériences sur π .

Le modèle relationnel est la catégorie **Rel** des ensembles (objets) et des relations (morphismes) où :

- pour toute formule A , $\llbracket A \rrbracket = \mathcal{P}(|A|)$
- pour toute (réseau de) preuve π de $A_1, \dots, A_n$, $\llbracket A \rrbracket$ est une relation sur $A_1, \dots, A_n$

Le modèle relationnel de (ME)LL 2/2

- si l'élément associé à la prémisse d'un nœud $?d$ est x , celui associé à sa conclusion est $[x]$
- l'élément associé à la conclusion d'un nœud $?w$ est $[]$
- l'élément associé à la conclusion d'un nœud $?c$ est la somme (i.e. l'union) des éléments associés à ses prémisses
- si les éléments associés aux conclusions d'une boîte sont m_0 pour la porte principale et $m_1, \dots, m_k$ pour les portes auxiliaires alors il existe $p \geq 0$ expériences du réseau situé à l'intérieur de la boîte de résultats $(x_0^i, n_1^i, \dots, n_k^i)_{1 \leq i \leq p}$ avec $m_0 = [x_0^1, \dots, x_0^p]$ et pour tout $1 \leq j \leq k$, $m_j = n_j^1 \cup \dots \cup n_j^p$

L'*interprétation* $\llbracket \pi \rrbracket$ d'un réseau π est l'ensemble des résultats de toutes les expériences sur π .

Le modèle relationnel est la catégorie **Rel** des ensembles (objets) et des relations (morphismes) où :

- pour toute formule A , $\llbracket A \rrbracket = \mathcal{P}(|A|)$
- pour toute (réseau de) preuve π de $A_1, \dots, A_n$, $\llbracket A \rrbracket$ est une relation sur $A_1, \dots, A_n$

L'infinitude de la promotion dans le modèle relationnel 1/2

Supposons que, pour toute variable propositionnelle X , $|X|$ est un ensemble fini, alors :

Si π est une preuve dont les conclusions ne contiennent pas de sous-formule de la forme $!A$ (i.e. si dans π s'il y a une boîte elle a été coupé dans sa porte principale, en particulier si dans π il n'y a aucune boîte), alors $\llbracket \pi \rrbracket$ est un ensemble fini

Mais, comme si E est un ensemble non vide alors $\mathcal{M}_{fin}(E)$ est infini,

↪ Si π est une preuve dont les conclusions contiennent une sous-formule de la forme $!A$ (i.e. si dans π il y a une boîte qui n'a pas été coupé dans sa porte principale, en particulier si la dernier règle de π est la promotion), alors $\llbracket \pi \rrbracket$ est un ensemble infini

Exemples

Question : Cette infinitude correspond à quoi ?

L'infinitude de la promotion dans le modèle relationnel 1/2

Supposons que, pour toute variable propositionnelle X , $|X|$ est un ensemble fini, alors :

Si π est une preuve dont les conclusions ne contiennent pas de sous-formule de la forme $!A$ (i.e. si dans π s'il y a une boîte elle a été coupé dans sa porte principale, en particulier si dans π il n'y a aucune boîte), alors $\llbracket \pi \rrbracket$ est un ensemble fini

Mais, comme si E est un ensemble non vide alors $\mathcal{M}_{fin}(E)$ est infini,

↪ Si π est une preuve dont les conclusions contiennent une sous-formule de la forme $!A$ (i.e. si dans π il y a une boîte qui n'a pas été coupé dans sa porte principale, en particulier si la dernier règle de π est la promotion), alors $\llbracket \pi \rrbracket$ est un ensemble infini

Exemples

Question : Cette infinitude correspond à quoi ?

L'infinitude de la promotion dans le modèle relationnel 2/2

On montre que à toute expérience de π , on peut associer une expérience de π de même résultat, et réciproquement. Donc :

Theorem (Invariance par réduction)

Soit π un réseau de preuve de LL. Si $\pi \rightarrow_{cut} \pi'$ alors $\llbracket \pi \rrbracket = \llbracket \pi' \rrbracket$

Exemples

Si le réseau π est une boîte coupée dans sa porte principale, le nombre $p \geq 0$ d'expériences a qui il faut prendre pour interpréter π dépend de combien de copies de la boîte on va utiliser pendant l'élimination des coupures, i.e. de combien de fois il va être dupliqué (contraction) ou effacé (affaiblissement)

↪ L'idée intuitive : une expérience sur π est une copie de π

↪ Comme *a priori* on peut utiliser une ressource emboîtée π (i.e. les conclusions de π contiennent une sous-formule de la forme $!A$) qui contient autant de fois qu'on veut, le nombre d'expériences que on doit prendre à l'intérieur de la boîte π est forcément infini.

↪ Dans le modèle relationnel de LL les ressources qui sont disponibles autant de

L'infinitude de la promotion dans le modèle relationnel 2/2

On montre que à toute expérience de π , on peut associer une expérience de π de même résultat, et réciproquement. Donc :

Theorem (Invariance par réduction)

Soit π un réseau de preuve de LL. Si $\pi \rightarrow_{cut} \pi'$ alors $\llbracket \pi \rrbracket = \llbracket \pi' \rrbracket$

Si le réseau π est une boîte coupée dans sa porte principale, le nombre $p \geq 0$ d'expériences a qui il faut prendre pour interpréter π dépend de combien de copies de la boîte on va utiliser pendant l'élimination des coupures, i.e. de combien de fois il va être dupliqué (contraction) ou effacé (affaiblissement)

↪ L'idée intuitive : une expérience sur π est une copie de π

↪ Comme *a priori* on peut utiliser une ressource emboîtée π (i.e. les conclusions de π contiennent une sous-formule de la forme $!A$) qui contient autant de fois qu'on veut, les nombre d'expériences que on doit prendre à l'intérieur de la boîte π est forcément infini.

↪ Dans le modèle relationnel de LL les ressources qui sont disponibles autant de fois qu'on veut sont des objets infinis.

Outline

- 1 Introduction
- 2 La logique linéaire
- 3 Le modèle relationnel de LL
- 4 La logique linéaire différentielle

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, LL montre que la promotion est la seule règle infinitaire de la logique
- 2 Oui :
 - 1 dans la sémantique relationnelle cette infinitude est explicite (actuelle)
 - 2 au niveau *syntactique* : dans la *logique linéaire différentielle* (DiLL) et dans le *λ -calcul différentiel* (Λ_{diff}), des raffinements respectivement de LL et du λ -calcul

DiLL (resp. Λ_{diff}) est un système logique (resp. de calcul) où l'infinité potentielle cachée dans la règle de promotion (infinité qui n'est pas explicite dans la syntaxe de LL) devient une infinité actuelle :

↪ *sommes infinies* de preuves (resp. de termes).

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, LL montre que la promotion est la seule règle infinitaire de la logique
- 2 Oui :
 - 1 dans la sémantique relationnelle cette infinitude est explicite (actuelle)
 - 2 au niveau *syntactique* : dans la *logique linéaire différentielle* (DiLL) et dans le *λ -calcul différentiel* (Λ_{diff}), des raffinements respectivement de LL et du λ -calcul

DiLL (resp. Λ_{diff}) est un système logique (resp. de calcul) où l'infinité potentielle cachée dans la règle de promotion (infinité qui n'est pas explicite dans la syntaxe de LL) devient une infinité actuelle :

$\rightsquigarrow$ *sommes infinies* de preuves (resp. de termes).

Question sur l'infini

- 1 Est-ce qu'il y a une *opération logique* cachée dans la logique classique et intuitionniste qui permet d'utiliser les ressources autant de fois qu'on veut ?
- 2 Est-ce qu'on peut expliciter cette infinité cachée ?

Réponses :

- 1 Oui, LL montre que la promotion est la seule règle infinitaire de la logique
- 2 Oui :
 - 1 dans la sémantique relationnelle cette infinitude est explicite (actuelle)
 - 2 au niveau *syntactique* : dans la *logique linéaire différentielle* (DiLL) et dans le *λ -calcul différentiel* (Λ_{diff}), des raffinements respectivement de LL et du λ -calcul

DiLL (resp. Λ_{diff}) est un système logique (resp. de calcul) où l'infinité potentielle cachée dans la règle de promotion (infinité qui n'est pas explicite dans la syntaxe de LL) devient une infinité actuelle :

↪ *sommes infinies* de preuves (resp. de termes).

La logique linéaire différentielle (DiLL) ^{1/2}

Dans les modèles catégoriques de LL, les règles structurelles de LL correspondent à l'existence de certains morphismes :

Règle structurelle		Morphisme
? <i>d</i> (déréliction)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	<i>der</i> : $!A \multimap A$
? <i>w</i> (affaiblissement)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	<i>weak</i> : $!A \multimap 1$
? <i>c</i> (contraction)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	<i>contr</i> : $!A \multimap !A \otimes !A$

Les *espaces de finitude* (Ehrhard, 2003) forment un modèle de LL où il existent les *morphismes duaux*, qui correspondent à des nouvelles règles logiques, les *règles co-structurelles* :

Règle co-structurelle		Morphisme
! <i>d</i> (co-déréliction)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	<i>co-der</i> : $A \multimap !A$
! <i>w</i> (co-affaiblissement)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	<i>co-weak</i> : $1 \multimap !A$
! <i>c</i> (co-contraction)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	<i>co-contr</i> : $!A \otimes !A \multimap !A$

La logique linéaire différentielle (DiLL) ^{1/2}

Dans les modèles catégoriques de LL, les règles structurelles de LL correspondent à l'existence de certains morphismes :

Règle structurelle		Morphisme
?d (déréliction)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	$der : !A \multimap A$
?w (affaiblissement)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	$weak : !A \multimap 1$
?c (contraction)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	$contr : !A \multimap !A \otimes !A$

Les *espaces de finitude* (Ehrhard, 2003) forment un modèle de LL où il existent les *morphismes duaux*, qui correspondent à des nouvelles règles logiques, les *règles co-structurelles* :

Règle co-structurelle		Morphisme
!d (co-déréliction)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	$co-der : A \multimap !A$
!w (co-affaiblissement)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	$co-weak : 1 \multimap !A$
!c (co-contraction)	$\Leftarrow \rightsquigarrow$	$co-contr : !A \otimes !A \multimap !A$

La logique linéaire différentielle (DiLL) ^{1/2}

Règle structurelle

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} ?d$$
$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} ?w$$
$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} ?c$$

Règle co-structurelle

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A} !d$$
$$\frac{}{!A} !w$$
$$\frac{\vdash \Gamma, !A \quad \vdash \Delta, !A}{\vdash \Gamma, !A} !c$$

On obtient deux nouveaux systèmes logiques :

- **DiLL** = LL + !d + !w + !c
- **DiLL₀** = LL + !d + !w + !c – ! (il n'y a pas de boîtes)

On peut représenter les preuves de DiLL et de DiLL₀ avec les réseaux d'interaction.

On peut définir les étapes de réduction (symétrie !/? sauf la promotion) :

- co-déréliction vs. déréliction :
- co-affaiblissement vs. déréliction
- co-contraction vs déréliction
- ...

On a l'élimination des coupure pour DiLL et pour DiLL₀

La logique linéaire différentielle (DiLL) ^{1/2}

Règle structurelle

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} ?d$$
$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} ?w$$
$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} ?c$$

Règle co-structurelle

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A} !d$$
$$\frac{}{!A} !w$$
$$\frac{\vdash \Gamma, !A \quad \vdash \Delta, !A}{\vdash \Gamma, !A} !c$$

On obtient deux nouveaux systèmes logiques :

- $\text{DiLL} = \text{LL} + !d + !w + !c$
- $\text{DiLL}_0 = \text{LL} + !d + !w + !c - !$ (il n'y a pas de boîtes)

On peut représenter les preuves de DiLL et de DiLL_0 avec les réseaux d'interaction.

On peut définir les étapes de réduction (**symétrie !/? sauf la promotion**) :

- co-déréliction vs. dérélction :
- co-affaiblissement vs. dérélction
- co-contraction vs dérélction
- ...

On a l'élimination des coupure pour DiLL et pour DiLL_0

L'expansion de Taylor

Pourquoi différentiel ?