

Réalisabilité classique

Une introduction

Aloïs Brunel

Vérité et Preuves - 11 Mars 2011

Sommaire

1 Introduction

2 La réalisabilité classique

3 Modèles et vérité subjective



La **correction vis-à-vis du typage** assure certaines propriétés :

- La terminaison des programmes
- Des bornes sur la complexité des programmes (logiques allégées)
- ...



La **correction vis-à-vis du typage** assure certaines propriétés :

- La terminaison des programmes
- Des bornes sur la complexité des programmes (logiques allégées)
- ...

Certains programmes sans être typables sont **corrects vis-à-vis de l'exécution** :

```
let fonction = fun n =>  
  if n+1=0 then 16  
    else true
```

Le terme `fonction` a moralement le type $Nat \Rightarrow Bool$



La correspondance preuves-programmes

Logique implicative minimale	$\leftrightarrow$	λ -calcul simplement typé
Arithmétique d'ordre supérieur	$\leftrightarrow$	système F^ω
		...



La correspondance preuves-programmes

Logique implicative minimale	$\leftrightarrow$	λ -calcul simplement typé
Arithmétique d'ordre supérieur	$\leftrightarrow$	système F^ω
...		

Griffin, 90 : pour l'étendre à la logique classique (tiers exclu ou formule de Peirce), on a besoin d'une nouvelle instruction : call-cc.



La correspondance preuves-programmes

Logique implicative minimale	$\leftrightarrow$	λ -calcul simplement typé
Arithmétique d'ordre supérieur	$\leftrightarrow$	système F^ω
...		

Griffin, 90 : pour l'étendre à la logique classique (tiers exclu ou formule de Peirce), on a besoin d'une nouvelle instruction : call-cc.

De manière générale, pour habiter de nouveaux axiomes il faut de **nouveaux programmes**.



Krivine introduit **la réalisabilité classique** (2000-2010), une méthode **sémantique** qui permet :

- de prouver des propriétés calculatoires des programmes typés
- d'étudier les extensions de la correspondance preuve/programme
- de fournir des **nouveaux modèles** de ZF+Axiomes variés



Les 4 sous-sols fondationnels de Girard

- 1 **Aléthique** Notion de vérité (vrai/faux), cohérence, ...
Algèbres de Boole, Espaces de phase



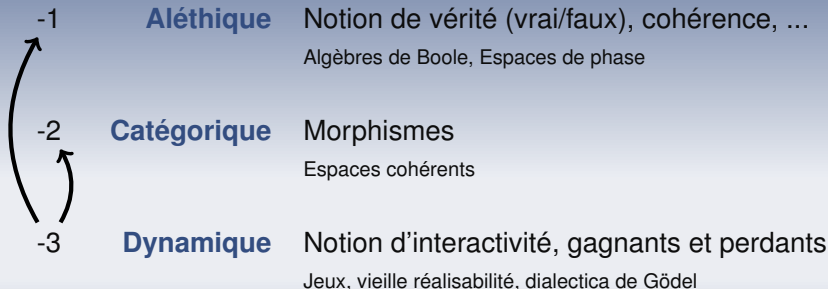
Les 4 sous-sols fondationnels de Girard

- 1 **Aléthique** Notion de vérité (vrai/faux), cohérence, ...
Algèbres de Boole, Espaces de phase

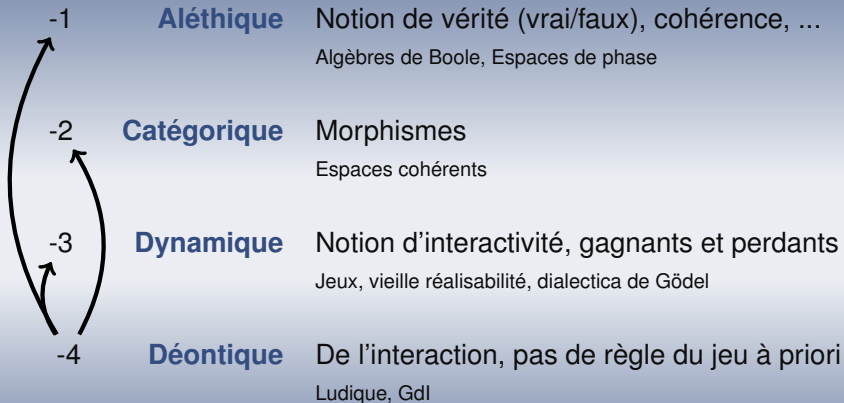
- 2 **Catégorique** Morphismes
Espaces cohérents



Les 4 sous-sols fondationnels de Girard



Les 4 sous-sols fondationnels de Girard



Les 4 sous-sols fondationnels de Girard



Sommaire

1 Introduction

2 La réalisabilité classique

3 Modèles et vérité subjective



le λ_c -calcul (1/2)

Syntaxe

Termes	t, u	$::=$	x $\lambda x.t$ $(t)u$...
Piles	π	$::=$	$\diamond$ $u.\pi$ (avec u clos)
Processus	p	$::=$	$t \star \pi$ (avec t clos)

On peut (et on va) ajouter d'autres instructions.



le λ_c -calcul (1/2)

Syntaxe

Termes	t, u	$::=$	x $\lambda x.t$ $(t)u$...
Piles	π	$::=$	$\diamond$ $u.\pi$ (avec u clos)
Processus	p	$::=$	$t \star \pi$ (avec t clos)

On peut (et on va) ajouter d'autres instructions.

Evaluation

(Push)	$(t)u \star \pi$	$>$	$t \star u.\pi$
(Grab)	$\lambda x.t \star u.\pi$	$>$	$t\{u/x\} \star \pi$
	...		



le λ_c -calcul (2/2) - Extensions

On peut rajouter les **continuations**.

Termes $t, u ::= \dots \mid cc \mid k_\pi$

Les règles de réductions correspondantes :

(Save) $cc \star t.\pi > t \star k_\pi.\pi$

(Resume) $k_\pi \star t.\pi' > t \star \pi$



le λ_c -calcul (2/2) - Extensions

Ou bien le **non-déterminisme**

Termes $t, u ::= \dots \mid cc \mid k_\pi \mid \Psi$

Les règles de réductions correspondantes :

$$(\Psi_0) \quad \Psi \star t.u.\pi \quad > \quad t \star \pi$$

$$(\Psi_1) \quad \Psi \star t.u.\pi \quad > \quad u \star \pi$$



le λ_c -calcul (2/2) - Extensions

Ou encore l'instruction **quote**

Termes $t, u ::= \dots \mid cc \mid k_\pi \mid \Psi \mid \chi$

La règle de réduction (ici $t \mapsto n_t$ est une injection quelconque) :

(Quote) $\chi \star t.\pi > t \star \overline{n_t}.\pi$



Point de vue, orthogonalité

On choisit $\perp \subset \Lambda \star \Pi$, appelé **point de vue** (ou pôle, ou observable), tel que :

$$t \star \pi \in \perp \wedge (t' \star \pi' > t \star \pi) \Rightarrow (t' \star \pi' \in \perp)$$



Point de vue, orthogonalité

On choisit $\perp \subset \Lambda \star \Pi$, appelé **point de vue** (ou pôle, ou observable), tel que :

$$t \star \pi \in \perp \wedge (t' \star \pi' > t \star \pi) \Rightarrow (t' \star \pi' \in \perp)$$

Le point de vue définit la *correction calculatoire*, par exemple :

- $\perp = \{ p \mid p \text{ termine} \}$ (candidats de réductibilité)
- $\perp = \{ p \mid p \text{ ne termine pas} \}$



Point de vue, orthogonalité

On choisit $\perp \subset \Lambda \star \Pi$, appelé **point de vue** (ou pôle, ou observable), tel que :

$$t \star \pi \in \perp \wedge (t' \star \pi' > t \star \pi) \Rightarrow (t' \star \pi' \in \perp)$$

Le point de vue définit la *correction calculatoire*, par exemple :

- $\perp = \{ p \mid p \text{ termine} \}$ (candidats de réductibilité)
- $\perp = \{ p \mid p \text{ ne termine pas} \}$

Un point de vue induit une notion d'**orthogonalité** :

$$t \perp \pi \text{ ssi } t \star \pi \in \perp \quad X^\perp = \{ \pi \in \Pi \mid \forall t \in X, t \perp \pi \}$$



On a les propriétés suivantes :

- $X \subseteq X^{\perp\perp}$
- $X \subseteq Y$ implique $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$
- $X^{\perp} = X^{\perp\perp\perp}$



On a les propriétés suivantes :

- $X \subseteq X^{\perp\perp}$
- $X \subseteq Y$ implique $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$
- $X^{\perp} = X^{\perp\perp\perp}$

Comportement

On dit qu'un ensemble X de termes ou de piles est un **comportement** si $X = X^{\perp\perp}$.

Si X est un comportement alors

$$t \in X \iff \forall \pi \in X^{\perp}, t \star \pi \in \perp$$

Les comportements sont clos par $\cap$ mais pas par $\cup$.



Interprétation

Une formule est un **type interactif**, c.a.d un comportement. On associe donc à A un comportement $|A|$.



Interprétation

Une formule est un **type interactif**, c.a.d un comportement. On associe donc à A un comportement $|A|$.

On dira que t **réalise** A et on note $t \Vdash A$ ssi $t \in |A|$, i.e :

$$\forall \pi, \pi \in |A|^\perp \Rightarrow t \perp \pi$$



Interprétation

Une formule est un **type interactif**, c.a.d un comportement. On associe donc à A un comportement $|A|$.

On dira que t **réalise** A et on note $t \Vdash A$ ssi $t \in |A|$, i.e :

$$\forall \pi, \pi \in |A|^\perp \Rightarrow t \perp \pi$$

Un type A vient avec les arguments $|A|$ et les tests $|A|^\perp$: les deux ensembles sont inséparables.



Arithmétique du second ordre

Langage

$$\begin{aligned}
 e &::= x \mid f(e_1, \dots, e_n) \quad (f \text{ primitive récursive}) \\
 A, B &::= X(e_1, \dots, e_k) \mid A \Rightarrow B \mid \forall x. A \mid \forall X. A
 \end{aligned}$$

On peut coder les autres formules à partir de ce langage :

$$\begin{aligned}
 \perp &\equiv \forall X. X \\
 A \wedge B &\equiv \forall X. (A \Rightarrow B \Rightarrow X) \Rightarrow X \\
 \neg A &\equiv A \Rightarrow \perp \\
 \exists X. A(X) &\equiv \forall Z (\forall X (A(X) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z)
 \end{aligned}$$



On se donne :

- un point de vue $\perp\!\!\!\perp$
- un modèle $\mathcal{N}$ de départ (par exemple $\mathbb{N}$)
- une valuation ϕ (transforme un ensemble $\mathcal{N} \rightarrow \{0, 1\}$ en une fonction $\mathcal{N} \rightarrow \{ X \mid X^{\perp\!\!\!\perp} = X \}$).



On se donne :

- un point de vue $\perp\!\!\!\perp$
- un modèle $\mathcal{N}$ de départ (par exemple $\mathbb{N}$)
- une valuation ϕ (transforme un ensemble $\mathcal{N} \rightarrow \{0, 1\}$ en une fonction $\mathcal{N} \rightarrow \{ X \mid X^{\perp\!\!\!\perp} = X \}$).

$$|X(e_1, \dots, e_n)|_\phi = \Phi(X)(\mathbf{Val}(e_1)_\phi, \dots, \mathbf{Val}(e_n)_\phi)$$

$$|A \Rightarrow B|_\phi = (|A| \cdot |B|^\perp)^\perp$$

$$|\forall x. A|_\phi = \bigcap_{n \in \mathcal{N}} |A|_{\phi[x \leftarrow n]}$$

$$|\forall X. A|_\phi = \bigcap_{F: \mathcal{N}^k \rightarrow \mathcal{D}} |A|_{\phi[X \leftarrow F]}$$



Remarques

- Si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$, alors $(t)u \Vdash B$ en effet si $\pi \in |B|^\perp$:

$$(t)u \star \pi > t \star u.\pi \text{ or } u.\pi \in (|A|.|B|^\perp)$$



Remarques

- Si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$, alors $(t)u \Vdash B$ en effet si $\pi \in |B|^\perp$:

$$(t)u \star \pi > t \star u.\pi \text{ or } u.\pi \in (|A|.|B|^\perp)$$

- $|\perp| = \bigcap_F F = \emptyset = \Pi^\perp$



Remarques

- Si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$, alors $(t)u \Vdash B$ en effet si $\pi \in |B|^\perp$:

$$(t)u \star \pi > t \star u.\pi \text{ or } u.\pi \in (|A|.|B|^\perp)$$

- $|\perp| = \bigcap_F F = \emptyset = \Pi^\perp$
- $t \Vdash \neg A$ ssi pour tout π et $u \Vdash A$, $t \star u.\pi \in \perp$.



Remarques

- Si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$, alors $(t)u \Vdash B$ en effet si $\pi \in |B|^\perp$:

$$(t)u \star \pi > t \star u.\pi \text{ or } u.\pi \in (|A|.|B|^\perp)$$

- $|\perp| = \bigcap_F F = \emptyset = \Pi^\perp$
- $t \Vdash \neg A$ ssi pour tout π et $u \Vdash A$, $t \star u.\pi \in \perp$.
- Il y a des **tricheurs** :

si $t \star \pi \in \perp$ alors $(k_\pi)t \star \pi' >^* t \star \pi$ et donc $(k_\pi)t \Vdash \perp$

On dira que t est une quasi-preuve (QP) si t ne contient aucun k_π .



Adéquation

Si $\vdash t : A$ alors pour tout point de vue $\perp\!\!\!\perp$ on a $t \Vdash A$.

Lien typage $\implies$ calcul

Remarque 1 (importante) : ce théorème reste vrai même si on ajoute de nouvelles instructions au langage.

Remarque 2 (très importante) : si pour tout $\perp\!\!\!\perp$, $t \Vdash A$, alors du point de vue calculatoire $\vdash t : A$ est un axiome valable !



Adéquation : applications

Spécification 1

Si $\vdash t : \forall X.(X \Rightarrow X)$ alors $t \approx \lambda x.x$.



Adéquation : applications

Spécification 1

Si $t \vdash \forall X.(X \Rightarrow X)$ alors $t \approx \lambda x.x$.

$$Bool(x) \equiv \forall P.(P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(x))$$

Spécification 2

Supposons que $b \vdash Bool(x)$ alors :

- Si $x = 0$, pour tous t, u et π on a $b \star t.u.\pi >^* t \star \pi$.
- Si $x = 1$, pour tous t, u et π on a $b \star t.u.\pi >^* u \star \pi$.

On n'a pas $b \Vdash Bool(0)$ **et** $b \Vdash Bool(1)$ sans le non-déterminisme (Ψ)



Adéquation : applications

Normalisation

Les termes typables terminent.

$$\Downarrow = \{ t \star \pi \mid t \star \pi \text{ termine} \}$$

X est un **candidat de réductibilité** ssi

- $X \subseteq \{\diamond\}^\perp$
- $X^\perp \subseteq \{\boxtimes\}^\perp$

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des candidats de réductibilité.

On peut montrer que $|A| \in \mathcal{D}$ pour toute formule A



Etendre Curry-Howard (1)

call-cc est la seule possibilité d'obtenir la logique classique.

On dit que

- $K \approx k_\pi$ ssi $K \star t.\pi' \succ^* t \star \pi$
- $C \approx cc$ ssi $C \star u.\pi \succ^* u \star K.\pi$ avec $K \approx k_\pi$



Etendre Curry-Howard (1)

call-cc est la seule possibilité d'obtenir la logique classique.

On dit que

- $K \approx k_\pi$ ssi $K \star t.\pi' \succ^* t \star \pi$
- $C \approx cc$ ssi $C \star u.\pi \succ^* u \star K.\pi$ avec $K \approx k_\pi$

$$t \Vdash ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A) \Rightarrow A \text{ ssi } t \approx cc.$$



Etendre Curry-Howard (1)

call-cc est la seule possibilité d'obtenir la logique classique.

On dit que

- $K \approx k_\pi$ ssi $K \star t.\pi' \succ^* t \star \pi$
- $C \approx cc$ ssi $C \star u.\pi \succ^* u \star K.\pi$ avec $K \approx k_\pi$

$$t \Vdash ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A) \Rightarrow A \text{ ssi } t \approx cc.$$

On peut rajouter à la logique la règle

$$\frac{}{\vdash cc : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} (cc)$$



Etendre Curry-Howard (2)

Et l'arithmétique ?

- $\forall y (y + 0 = y)$
- $\forall y \neg (s(y) = 0)$
- $\forall y \forall x (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
- ...



Etendre Curry-Howard (2)

Et l'arithmétique ?

- $\forall y (y + 0 = y)$
- $\forall y \neg (s(y) = 0)$
- $\forall y \forall x (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
- ...

Tout ça c'est trivial (réalisateurs : $\lambda x.x$ ou bien $\lambda z.(z)u$).



Etendre Curry-Howard (2)

Et l'arithmétique ?

- $\forall y (y + 0 = y)$
- $\forall y \neg (s(y) = 0)$
- $\forall y \forall x (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
- ...

Tout ça c'est trivial (réalisateurs : $\lambda x.x$ ou bien $\lambda z.(z)u$).

Le dernier principe : la récurrence, s'exprime

$$\forall x \underbrace{(\forall P (P0 \Rightarrow (\forall n (Pn \Rightarrow P(n+1)))) \Rightarrow Px)}_{\text{nat}(x)}$$

n'est pas toujours vrai.



Etendre Curry-Howard (3)

Axiome du choix dénombrable

Soit $G \neq \emptyset$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous ensembles de G alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y \in G \text{ t.q. } y \in A_n \quad \Rightarrow \quad \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} u_n \in A_n$$

- Toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Un ensemble est infini ssi il est en bijection avec une partie propre.
- Si x est adhérent à U alors il existe une suite de u_n de limite x .



L'axiome du choix dénombrable est impliqué par le principe de **sélection dénombrable** :

Pour toute suite $A_n \subseteq G$, il existe $u_{n,m}$ t.q :

$$\forall m \in \mathbb{N} (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n,m} \in A_m) \quad \Rightarrow \quad \forall y \in G, y \in A_m$$



L'axiome du choix dénombrable est impliqué par le principe de **sélection dénombrable** :

Pour toute suite $A_n \subseteq G$, il existe $u_{n,m}$ t.q :

$$\forall m \in \mathbb{N} (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n,m} \in A_m) \quad \Rightarrow \quad \forall y \in G, y \in A_m$$

$$\chi \star t.\pi > t \star n_\pi.\pi$$

On a $\chi \Vdash SD$ et donc un réalisateur pour l'axiome du choix dénombrable.



Sommaire

1 Introduction

2 La réalisabilité classique

3 Modèles et vérité subjective



Vérité subjective

À chaque point de vue correspond une notion de vérité différente :
c'est la **subjectivité** :

A est vraie par rapport à $\perp$ ssi $\exists t \in QP, t \Vdash_{\perp} A$



Vérité subjective

À chaque point de vue correspond une notion de vérité différente :
c'est la **subjectivité** :

A est vraie par rapport à $\perp$ ssi $\exists t \in QP, t \Vdash_{\perp} A$

Un point de vue est **cohérent** si

$$\forall t \in QP, \exists \pi \in \Pi \text{ t.q. } t \star \pi \notin \perp$$

Cohérence subjective

Si $\perp$ est cohérent alors aucune formule A n'est à la fois vraie et fausse par rapport à $\perp$.



- Exemple incohérent : $\perp = \{ p \mid p \text{ ne termine pas} \}$
 - $\Omega \Vdash \perp$
 - $\mathbf{Y} \Vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$



- Exemple incohérent : $\perp = \{ p \mid p \text{ ne termine pas } \}$
 - $\Omega \Vdash \perp$
 - $\mathbf{Y} \Vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
- Exemple cohérent : $\perp = \emptyset$
 - Pour tout A , on a soit $|A| = \emptyset$ soit $|A|^\perp = \emptyset$.
 - A est vraie ssi A est vraie dans le modèle standard.



- Exemple incohérent : $\perp = \{ p \mid p \text{ ne termine pas } \}$
 - $\Omega \Vdash \perp$
 - $\mathbf{Y} \Vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
- Exemple cohérent : $\perp = \emptyset$
 - Pour tout A , on a soit $|A| = \emptyset$ soit $|A|^\perp = \emptyset$.
 - A est vraie ssi A est vraie dans le modèle standard.

Le paradoxe subjectif

Il existe deux points de vue consistants $\perp_1$ et $\perp_2$ et une formule A telle que A est vraie par rapport à $\perp_1$ et $\neg A$ est vraie par rapport à $\perp_2$.



Structure des modèles

La formule $\forall x \text{ nat}(x)$ est fausse en général si on $\succ$ est déterministe (réduction à $\text{Bool}(x)$) .

En fait il existe :



Structure des modèles

La formule $\forall x \text{ nat}(x)$ est fausse en général si on $\succ$ est déterministe (réduction à $\text{Bool}(x)$) .

En fait il existe :

- Les entiers "standard"



Structure des modèles

La formule $\forall x \text{ nat}(x)$ est fausse en général si on $\succ$ est déterministe (réduction à $\text{Bool}(x)$) .

En fait il existe :

- Les entiers "standard"
- Des non-entiers



Structure des modèles

La formule $\forall x \text{ nat}(x)$ est fausse en général si on $\succ$ est déterministe (réduction à $\text{Bool}(x)$) .

En fait il existe :

- Les entiers "standard"
- Des non-entiers
- Des entiers "non standard"



On définit $\approx$:

$$x \approx 0 \equiv \forall y (x \neq s(y))$$

Pseudo-zéros

Dans le modèle, le seul pseudo-zéro x vérifiant $\text{nat}(x)$ est le "vrai" $0 \in \mathbb{N}$.



On définit $\approx$:

$$x \approx 0 \equiv \forall y (x \neq s(y))$$

Pseudo-zéros

Dans le modèle, le seul pseudo-zéro x vérifiant $nat(x)$ est le "vrai" $0 \in \mathbb{N}$.

Cela permet de décomposer tous les individus :

Décomposition

$$\models \forall x \exists ! n \exists ! z (z \approx 0 \wedge nat(n) \wedge x = y + z)$$



Sous certaines bonnes conditions le prédicat unaire G défini par $G(n) = \{\pi_n\}$ (l'inverse de la bijection introduite pour χ) est tel que :



Sous certaines bonnes conditions le prédicat unaire G défini par $G(n) = \{\pi_n\}$ (l'inverse de la bijection introduite pour χ) est tel que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t \Vdash G(n)$



Sous certaines bonnes conditions le prédicat unaire G défini par $G(n) = \{\pi_n\}$ (l'inverse de la bijection introduite pour χ) est tel que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t \Vdash G(n)$
- $\lambda z.z \Vdash \neg(\forall x G(x))$



Sous certaines bonnes conditions le prédicat unaire G défini par $G(n) = \{\pi_n\}$ (l'inverse de la bijection introduite pour χ) est tel que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t \Vdash G(n)$
- $\lambda z.z \Vdash \neg(\forall x G(x))$
- $\chi \Vdash \neg(\forall^{\mathbb{N}} x G(x))$



Point de vue maximal

On peut construire le "plus incohérent" des points de vue cohérents.

$t \mapsto \pi_t$ est une bijection entre les quasi-preuves et les piles. On pose

$$\perp_g = C\left(\bigcup_t \text{fil}(t \star \pi_t)\right)$$



On pose l'ensemble $B(x) \equiv x^2 = x$.

Dans le modèle maximal, B est une algèbre de Boole.



On pose l'ensemble $B(x) \equiv x^2 = x$.

Dans le modèle maximal, B est une algèbre de Boole.

Dans le modèle maximal, la formule suivante est vraie :

$$\exists x B(x) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 1)$$



On pose l'ensemble $B(x) \equiv x^2 = x$.

Dans le modèle maximal, B est une algèbre de Boole.

Dans le modèle maximal, la formule suivante est vraie :

$$\exists x B(x) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 1)$$

Ok on a compris : le modèle est assez étrange. Mais il y a pire.



En fait Krivine (2010) a montré qu'on peut obtenir un modèle de ZF+DC tel que :

- L'axiome du choix est faux !



En fait Krivine (2010) a montré qu'on peut obtenir un modèle de ZF+DC tel que :

- L'axiome du choix est faux !
- L'hypothèse du continu est fausse !



En fait Krivine (2010) a montré qu'on peut obtenir un modèle de ZF+DC tel que :

- L'axiome du choix est faux !
- L'hypothèse du continu est fausse !
- En fait, $\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné !



En fait Krivine (2010) a montré qu'on peut obtenir un modèle de ZF+DC tel que :

- L'axiome du choix est faux !
- L'hypothèse du continu est fausse !
- En fait, $\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné !
- On a carrément une séquence X_n de sous ensembles non dénombrables de $\mathbb{R}$ dont les cardinaux sont strictement croissants.



Conclusion

On a vu aujourd'hui :

- Les bases permettant l'extension de Curry-Howard
- ZF+DC
- Construction de modèles bizarres



Conclusion

On a vu aujourd'hui :

- Les bases permettant l'extension de Curry-Howard
- ZF+DC
- Construction de modèles bizarres

On verra la prochaine fois : **la réalisabilité et le forcing !**

- Forcing de Cohen : un programme pour l'hypothèse du continu
- Forcing pour les logiques linéaires
- Effets de bord et forcing

