

Appel à projets du Collège des Écoles Doctorales
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Septembre 2010

Organisation d'un réseau de recherche doctoral

Thème :

VÉRITÉ ET PREUVE

Organisateurs :

Giulio Guerrieri, Université Paris Diderot-Paris 7

Alberto Naibo, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Mattia Petrolo, Université Paris Diderot-Paris 7

Thomas Seiller, Université de la Méditerranée

Table des matières

1	Présentation du projet	2
2	Projet scientifique	2
2.1	Introduction	2
2.2	Thème de recherche	3
2.3	Durée et organisation du travail	7

1 Présentation du projet

Projet : Création d'un réseau de recherche doctoral en philosophie de la logique et philosophie des mathématiques, organisant la collaboration d'écoles doctorales relevant de différents domaines d'études (notamment philosophie, mathématiques, histoire des sciences), piloté principalement par le site de Paris 1.

Doctorants impliqués dans le projet :

- Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne - ED 280 :
 - M. Meven Cadet
 - M. Alberto Naibo
 - M. Maël Pegny
- Université Paris Diderot-Paris 7 - ED 386 :
 - M. Giulio Guerrieri
 - M. Giorgio Venturi
- Université Paris Diderot-Paris 7 - ED 400 :
 - M. Sylvain Cabanacq
 - M. Davide Crippa
 - M. Mattia Petrolo
- Université de la Méditerranée - ED 184 :
 - M. Jean-Baptiste Midez
 - M. Thomas Seiller
- Université Paris 13 Nord :
 - M. Clément Aubert
 - M. Andrei Dorman

2 Projet scientifique

2.1 Introduction

Le projet de création d'un réseau de recherche entre doctorants centré autour de la philosophie des mathématiques et de la logique, est né d'une

double motivation. Nous souhaitons d’une part développer une vraie collaboration entre doctorants provenant de différents domaines d’études (philosophie, mathématique, informatique théorique, histoire des sciences), convaincus des vertus de cette pluridisciplinarité. D’autre part, nous souhaitons faire converger sur un espace de travail commun certains séminaires ou groupes de travail déjà existant¹ et qui partagent un questionnement sur la notion de sémantique et ses rapports avec les notions de vérité et de preuve en mathématiques.

2.2 Thème de recherche

Le couple *syntaxe/sémantique* est l’un des présupposés fondamentaux de la logique contemporaine et l’investigation de leurs rapports (théorème de complétude et théorème de compacité) un de ses principaux objectifs. Historiquement, le centrage de la logique autour de ce couple, déjà mise en lumière par Cavaillès et Lautman [Cav47, Lau37], devient particulièrement évidente avec la naissance de la logique du premier ordre et le développement des sémantiques modèle-théoriques et ensemblistes à partir des années 1950 [TV56]. D’une manière plus générale, concentrer l’attention sur cette séparation amène à l’identification d’une dichotomie entre *vérité* et *preuve* : la première étant une notion sémantique (un énoncé est vrai dans une théorie T , s’il est valide dans tous les modèles de T), la deuxième étant un concept purement syntaxique (une preuve est vue comme un ‘texte’ construit en suivant des règles de manière purement combinatoire). En outre, en s’appuyant sur une certaine lecture du premier théorème d’incomplétude de Gödel² on arrive à établir, dans le cas des mathématiques, l’irréductibilité de la sémantique à la syntaxe : la vérité dépasserait toujours la prouvabilité (au moins pour toute théorie qui contient l’arithmétique ; [Red04, Smi07]). Cette irréductibilité a été confirmée par la théorie des ensembles moderne [Coh66]. Ce sont les modèles qui décident de la vérité des énoncés, indépendamment de

1. Notamment le groupe de travail hebdomadaire des doctorants de M. Joinet ; le séminaire des doctorants en logique de Paris 7 (<http://www.logique.jussieu.fr/~cubikova/seminaire.html>) ; le groupe de travail ‘Géométrie de l’interaction dans le facteur hyperfini’ de l’IML de Marseille (<http://iml.univ-mrs.fr/~seiller/GdT>), qui deviendra le projet ANR LOGOI dès Novembre 2010, ainsi que le projet ANR LOCI (anciennement PRELUDE).

2. Soit $\mathcal{L}$ un langage et T une théorie de $\mathcal{L}$. Si T est cohérente, récursivement axiomatisable et capable d’exprimer l’arithmétique de Peano (PA), alors il existe un énoncé G de $\mathcal{L}$, qui est *vrai* dans $\mathbb{N}$ (i.e. satisfait dans le modèle standard de T) mais *non prouvable* dans T .

nos capacités démonstratives. Par ailleurs, sur un plan strictement philosophique, la sémantique modèle-théorique s'accorde bien avec une théorie de la signification réaliste : connaître la signification d'un énoncé mathématique revient simplement à connaître ses conditions de vérité, sans nécessairement posséder la capacité d'accéder à la valeur de vérité correspondante. Suivant cette conception, réalisme mathématique et logique classique se justifient réciproquement, et cette justification a lieu principalement sur le plan sémantique.

Cependant, une telle vision, bien que largement répandue, a été mise en question par certains constructivistes comme Dummett, Prawitz et Martin-Löf pour lesquels la primauté, tant en logique qu'en mathématique, ne doit pas être donnée au concept de vérité, mais plutôt aux preuves [Dum98, ML87, Pra98] dans la mesure où l'activité logique et mathématique semble, avant tout, caractérisée par la production d'inférences et de démonstrations : la vérité devrait alors coïncider avec la prouvabilité. Dans l'activité mathématique il n'y a pas d'autres vérités que les théorèmes démontrés. Toutefois cette conception est problématique car elle débouche sur une position *révisionniste* : seules sont réellement douées de signification, la logique et les mathématiques intuitionnistes. Cela implique donc le refus de certain résultats communément employé dans la pratique mathématique, comme le théorème de Bolzano-Weierstrass, l'axiome du choix, le principe de Markov.

On se trouve donc face à un dilemme : soit nous acceptons une notion de vérité dépendant de la satisfaction dans tous les modèles de la théorie et qui transcende nos capacités épistémiques, soit nous considérons une notion épistémiquement contrainte de vérité, mais en renonçant à la puissance de la logique classique.

Mais doit-on nécessairement choisir l'un des deux termes de cette alternative ? L'*unwinding program* de G. Kreisel [Kre58, Fef96] a ouvert une troisième voie qui a inspiré de nombreux travaux techniques produits dans les vingt dernières années, comme par exemple la méthode des candidats de réductibilité [Tai67, Gir71, Dow07], la notion de réalisabilité à la Kripke [Kri01, Kri05, Miq09] et la sémantique des jeux [HO93, HO00, AJM94, Gir01]. Toutes ces approches ont en commun l'idée de construire une sémantique qui ne soit pas statique comme l'est l'approche modèle-théorique, mais qui repose sur une *dynamique*, i.e. sur une notion d'*interaction* entre les objets du modèle [Joi07, Tro08]. Les objets de ces modèles sont des généralisations des preuves, ce qui permet d'une part de construire un modèle dont les objets sont pragmatiquement accessibles tout en conservant toute la

puissance de la sémantique modèle-théorique, sans devoir renoncer *a priori* à la logique classique.

Le but de ce projet est de comprendre les conséquences philosophiques et fondationnelles de ce type de sémantique ‘interactionnelle’. En particulier, nous souhaitons étudier s’il est possible de comprendre le couple syntaxe-sémantique non plus comme une opposition, mais plutôt comme deux manières différentes d’employer les mêmes objets, i.e. les preuves. Un tel regard sur le domaine des mathématiques permettrait aussi de dépasser la dichotomie, parfois artificielle, réalisme/anti-réalisme et adopter une position plus proche de la *pratique* mathématique.

Références

- [AJM94] S. ABRAMSKY, R. JAGADEESAN and P. MALACARIA, *Full abstraction for PCF*, dans M. Hagiya/J. C. Mitchell (dir.), *Theoretical Aspects of Computer Software. International Symposium TACS’94, Sendai, Japan, April 1994*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 789, Berlin : Springer, 1994, pp. 1-15.
- [Cav47] J. CAVAILLÈS, *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : PUF, 1947.
- [Coh66] P. J. COHEN, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, New York : W. A. Benjamin, 1966.
- [Dum78] M. DUMMETT, *The philosophical basis of intuitionistic logic* (1973), dans Id., *Truth and Other Enigmas*, London : Duckworth, 1978.
- [Dum91] M. DUMMETT, *The Logical Basis of Metaphysics*, London : Duckworth, 1991.
- [Dum98] M. DUMMETT, *Truth from the constructive standpoint*, « Theoria », 64 (1998), p. 122-138.
- [Dow07] G. DOWEK, *Truth Values Algebras and Proof Normalization*, dans Th. Altenkirch/C. McBride (dir.), *Types for proofs and programs*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4502, Berlin : Springer, 2007, pp. 110-124.
- [DW03] G. DOWEK/B. WERNER, *Proof Normalisation Modulo*, « The Journal of Symbolic Logic », 68 (2003) 4, pp. 1289-1316.

- [Fef96] S. FEFERMAN, *Kreisel's "unwinding" program*, dans P. Odifreddi (dir.), *Kreiseliana : About and Around Georg Kreisel*, Wellesley, Mass. : A.K. Peters, 1996, pp. 247-273.
- [Gen69] G. GENTZEN, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. E. Szabo (dir.), Amsterdam : North-Holland, 1969.
- [Gir71] J.-Y. GIRARD, *Une extension de l'interprétation de Gödel à l'analyse, et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types*, dans J.E. Fenstad (dir.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, Amsterdam : North-Holland, 1971, pp. 63-92.
- [Gir99] J.-Y. GIRARD, *On the meaning of logical rules I : syntax vs. semantics*, dans U. Berger/H. Schwichtenberg (dir.), *Computational Logic*, Berlin : Springer, 1999, pp. 215-72.
- [Gir01] J.-Y. GIRARD, *Locus Solum*, « Mathematical Structures in Computer Science » 11 (2001) 3, pp. 301-506.
- [HO93] J. M. E. HYLAND/C.-H. L. ONG, *Fair games and full completeness for multiplicative linear logic without the mix-rule*, manuscript 1993 (<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.45.9035>).
- [HO00] J. M. E. HYLAND/C.-H. L. ONG, *On full abstraction for PCF : I, II, and III*, « Information and Computation », 163 (2000) 2, pp.285-408.
- [Joi07] J.-B. JOINET, *Logique et interaction*, Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7, 2007.
- [Kre58] G. KREISEL, *Mathematical significance of consistency proofs*, « The Journal of Symbolic Logic », 23 (1958) 2, pp. 155-182.
- [Kri01] J.-L. KRIVINE, *Type lambda-calculus in classical Zermelo-Fraenkel set theory*, « Archive for Mathematical Logic », 40 (2001) 3, pp. 189-205.
- [Kri05] J.-L. KRIVINE, *Realizability in classical logic*, Cours d'École doctorale à l'université de Marseille Luminy (mai 2004 ; dernière révision juillet 2005), à paraître dans *Panoramas et synthèses*, Société Mathématique de France.
- [Lau37] A. LAUTMAN, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique*, Paris : Hermann, 1937.
- [ML87] P. MARTIN-LÖF, *Truth of a proposition, evidence of a judgment, validity of a proof*, « Synthese », 73 (1987), p. 407-420.

- [Miq09] A. MIQUEL, *De la formalisation des preuves à l'extraction de programmes*, Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot-Paris 7, 2009.
- [Pra98] D. PRAWITZ, *Truth from a constructive perspective*, dans C. Martínez/U. Rivas/L. Villegas-Forero (dir.), *Truth in Perspective*, Aldershot : Ashgate, 1998, pp. 23-35.
- [Pra06] D. PRAWITZ, *Meaning approached via proofs*, « Synthese », 148 (2006), pp. 507-524.
- [Red04] M. REDHEAD, *Mathematics and the Mind*, « British Journal for the Philosophy of Science », 55 (2004), pp. 731-737.
- [Smi07] P. SMITH, *An Introduction to Gödel's Theorems*, Cambridge : Cambridge University Press, 2007.
- [Tai67] W. TAIT, *Intentional interpretations of functionals of finite type I*, « The Journal of Symbolic Logic », 32 (1967), pp. 198-212.
- [TV56] A. TARSKI/R. VAUGHT, *Arithmetical extensions of relational systems*, « Compositio Mathematica », 13 (1956), pp. 81-102.
- [Tro08] S. TRONÇON, *Interaction et signification*, dans J.-B. Joinet (dir.), *Logique, Dynamique, Cognition*, Paris : Publications de la Sorbonne, 2007, pp. 147-171.

2.3 Durée et organisation du travail

La forme que nous souhaiterions donner à ce réseau de recherche consiste principalement en des “ateliers” qui se réuniront avec une fréquence bimestrielle au cours de l'année académique 2010/2011. En fixant la première réunion en début octobre 2010, nous comptons 5 séances au total.

Chaque séance consistera en une journée entière de travail, organisée autour d'exposés et d'une table ronde à en fin de journée. Pour éviter toute passivité de participation à ces groupes de travail, on imposera comme norme de faire parvenir aux membres du projet les textes des exposés au moins 10 jours à l'avance ; de cette manière il sera possible de se préparer de manière adéquate³.

3. Cette méthode, testée au sein du *Séminaire étudiant en philosophie du langage* (SEPL) de l'équipe EXeCO, a donné d'excellents résultats.

La typologie des exposés sera très libre : il pourra s’agir de la présentation des travaux personnels propres à chaque participant ou bien d’analyses de textes ‘classiques’ d’intérêt général pour les membres du groupe.

Afin de “concrétiser” le travail annuel, les rencontres déboucheront d’une part sur un colloque ouvert au public, auquel participeront en sus *trois* invités extérieurs, de l’autre sur la préparation d’un volume contenant les travaux produit pendant l’année de travail (ces actes seront soumis aux *Publications de la Sorbonne*).