

La ludique

Mémoire de Master1

Parcours de Logique du Master "Logique, Philosophie, Histoire et Sociologie des
Sciences" (LoPHiSS)

Directeur de mémoire : Jean-Baptiste Joinet

SEILLER Thomas

UNIVERSITE PARIS 1 - PANTHEON-SORBONNE

Juin 2007

Mémoire soutenu le 18 Juin 2007 devant un jury composé de :

Jean-Baptiste Joinet (UFR 10, Paris 1)

Claudia Faggian (Equipe PPS, UMR 7126 CNRS - Paris 7)

Table des matières

1	Quelques résultats préliminaires	6
1.0.1	Complétude de LK	6
1.1	Syntaxe de LL	6
1.1.1	Pour comprendre la logique linéaire	6
1.1.2	Le calcul des séquents monolatéral de MALL	7
1.1.3	Elimination des coupures	8
1.2	Réversibilité	9
1.2.1	Connecteurs réversibles	9
1.2.2	Polarité	10
1.3	Focalisation	11
1.3.1	Définition de la focalisation	11
1.3.2	Résultats utiles	12
1.4	Un calcul des séquents focalisé	14
1.5	La silhouette des preuves	15
1.5.1	Isomorphismes et distributivité	15
1.5.2	Connecteurs synthétiques	16
1.5.3	Un nouveau calcul des séquents	17
2	Les bases de la ludique	18
2.1	Dessins (designs-dessins)	18
2.1.1	Adresses	18
2.1.2	Vocabulaire	19
2.1.3	Trois règles	19
2.2	Designs-desseins	21
2.2.1	Un problème de contextes dans les dessins	21
2.2.2	Desseins	23
2.3	Les designs importants	24
2.4	Normalisation	26
2.4.1	Normalisation des dessins	26
2.4.2	Normalisation des desseins	29
2.4.3	Disputes	30

2.4.4	Démonstrations des propositions 4 et 5	31
3	Les théorèmes importants	33
3.1	Orthogonalité	33
3.2	Associativité	34
3.3	Séparation	34
3.4	Le principe de clôture	36
3.5	Croissance	36
3.6	Stabilité	36
4	Les connecteurs	38
4.1	Comportements	38
4.1.1	Définition	38
4.1.2	Les comportements principaux	38
4.1.3	Incarnation	39
4.1.4	Comportements et jeux	40
4.2	Locatif/Spirituel	40
4.2.1	Un petit mot	40
4.2.2	Délocalisations	40
4.2.3	Axiome Identité	41
4.2.4	Shifts	42
4.3	Connecteurs additifs	42
4.3.1	Additifs localisés	42
4.4	Connecteurs multiplicatifs	43
4.4.1	Multiplicatifs localisés	43
4.4.2	Séquents de comportements	48
4.5	Les quantificateurs	48
4.5.1	Définitions	48
4.5.2	Résultats de commutations	49
4.5.3	Sur l'existentiel	49
5	Résultats de complétude	50
5.1	Ethiques complètes pour les connecteurs.	50
5.1.1	$\oplus$ et $\&$	50
5.1.2	Les tenseurs	52
5.2	Bi-comportement	53
5.2.1	Designs partiels	53
5.2.2	Bi-comportements	53
5.3	Connecteurs	55
5.3.1	Additifs	55
5.3.2	Multiplicatifs	55

5.4	Vérité et complétude	56
5.4.1	Définition de la vérité	56
5.4.2	Calcul des séquents de $MALL_2$	57
5.4.3	Complétude	58

Introduction

La logique, dans les dernières années, a vu apparaître les sémantiques de jeu (*Game semantics*, voir [Abr00] et [Hon00]) qui interprètent l'exécution d'un programme comme un dialogue entre le programme et l'environnement. L'une des forces de ces modèles est qu'ils représentent les aspects dynamiques de cette exécution. La logique ludique, introduite par J.-Y. Girard, peut être considérée comme faisant partie des sémantiques de jeu, et est fondée sur l'interaction.

La ludique provient d'une envie de surpasser la distinction entre la syntaxe et la sémantique, d'avoir un unique univers, où les propriétés sont à la fois énoncées et testées. Les objets — les *designs* — se testent entre eux.

L'interaction est à la base de l'ensemble du programme, construit sur une procédure de normalisation, qui correspond à une procédure d'élimination des coupures. Les designs sont à la fois des abstractions des preuves formelles, et un concentré de leur interprétation sémantique.

La première tâche est de concrétiser la sémantique. Pour cela, on élargit l'espace des preuves afin d'obtenir à la fois des (para-)preuves de A et de $\neg A$ pouvant interagir entre elles. Le principe est à peu près le même que lors de la démonstration de la complétude¹ de LK.

La seconde tâche est d'abstraire la syntaxe, tout en gardant la structure et la dynamique de la preuve. Pour cela, on supprimera tout ce que l'on peut considérer comme des "commentaires", par exemple les noms des formules. Les deux notions indispensables pour obtenir ce résultat sont la focalisation, et la localisation. La focalisation est un outil pour la recherche de preuves, tandis que la localisation est une nouveauté, basée sur l'idée qu'une preuve (ou un programme) ne manipule pas l'idée d'une formule, mais l'adresse où celle-ci est conservée.

La notion de design est très importante, représentant les preuves comme des stratégies, mais des stratégies de recherche de preuves.

La notion de *type* (ou formule) est également importante, et est appelée un *comportement*. Un comportement $\mathbf{G}$ est l'ensemble des designs qui réagissent de manière similaire à un ensemble de tests donnés, qui contient simplement d'autres designs de type $\mathbf{G}^\perp$ ($\mathbf{G}$ orthogonal).

¹Voir section 1.0.1 p.6.

On aura deux complétudes distinctes en ludique, la complétude interne, et la *full completeness* :

Si $\mathfrak{D}$ est un design **correct**² dans le comportement **A** associé à une formule A close et Π_1 , alors il existe une preuve de A dans MALL_2 qui est interprétée par $\mathfrak{D}$.

Cependant, afin d’obtenir ce résultat, il est nécessaire d’enrichir la notion de comportement avec une relation d’équivalence partielle permettant de faire la différence entre les designs partiels et les designs totaux. Ces objets seront nommés les *bi-comportements*.

Organisation du mémoire

Nous souhaitons, dans ce mémoire, présenter la ludique. Pour cela, nous définirons dans un premier temps les objets et notions de base, pour ensuite présenter différents connecteurs définissables en ludique. Nous terminerons par une présentation des résultats de complétude pour les connecteurs spirituels, qui correspondent aux connecteurs habituels.

Nous commencerons donc, dans le chapitre 1, après une brève présentation du principe de la preuve de complétude de LK, par présenter quelques résultats de logique linéaire propositionnelle permettant de mieux comprendre la définition des designs. Après un rappel de la syntaxe de MALL, et de l’élimination des coupures, nous présenterons la focalisation, la notion de polarité — associée à celle de réversibilité — et enfin celle de connecteur synthétique. Nous terminerons par la présentation d’un calcul des séquents focalisé synthétique de MALL dont les règles sont presque identiques aux règles de formation des designs-dessins.

Le chapitre 2 présentera les notions de base de la ludique, à savoir les designs-dessins, les designs-desseins, ainsi que les procédures de normalisation associées aux réseaux de coupures de ces deux présentations des designs.

Le chapitre 3 présente plusieurs résultats importants relatifs à des propriétés de la normalisation. Ces résultats sont des formulations de propriétés syntaxiques et sémantiques (sémantiques dénotationnelles).

Dans le chapitre 4 nous présenterons les définitions des différents connecteurs de la ludique et des résultats de complétude interne. Nous parlerons également de la délocalisation, qui permet de retrouver les connecteurs habituels de la logique linéaire, ce seront les *connecteurs spirituels* de la ludique.

Le dernier chapitre présente les bi-comportements, les définitions importantes pour obtenir la *full completeness* ainsi que les résultats de complétude. Les démonstrations de complétude étant assez longues et complexes, nous nous contenterons de présenter les résultats et de les commenter.

²Un design correct sera appelé un design *gagnant*, définition 63 p.57.

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

1.0.1 Complétude de LK

Nous avons un résultat de complétude pour LK, le calcul des séquents classique. Pour être plus précis la démonstration nous donne la complétude de LK- $\{Cut\}$. Nous nous contenterons d'expliquer le principe de la preuve, qui est important afin de comprendre le Daemon ($\boxtimes$, voir la définition 9 p.21.).

Ce théorème se démontre en considérant des arbres de preuves sans coupures, utilisant des règles correctes. Plus précisément, nous considérons l'ensemble de règles de $LK - \{Cut, Ax\} \cup \{0\}$ où 0 est la règle unaire :

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \Delta^\perp} 0$$

où Γ est un ensemble quelconque d'atomes, et $\Delta^\perp$ est un ensemble quelconque d'orthogonaux d'atomes.

Considérons l'ensemble des arbres de preuves de base $\vdash A$ utilisant ces règles. Dans cet ensemble, nous considérons un arbre (unique) vérifiant certaines conditions, et nous regardons alors les règles 0 . Nous avons deux possibilités :

- a. Si toutes les règles 0 sont des applications correctes de la règle "Ax" atomique, alors nous obtenons une preuve de A .
- b. Sinon, il existe au moins une règle 0 qui n'est pas une application correcte d'une règle "Ax" atomique. dans ce cas, le séquent introduit par cette règle nous permet de construire un contre-modèle de A .

1.1 Syntaxe de LL

1.1.1 Pour comprendre la logique linéaire

La logique linéaire provient d'une réflexion sur les sémantiques du lambda-calcul, en particulier l'étude des espaces cohérents, sémantique du lambda-calcul

typé du second ordre, le système F. En effet, dans les espaces cohérents, l'implication classique $A \rightarrow B$ se décompose naturellement en $(!A) \multimap B$ — une implication *linéaire* et un opérateur de répétition. La logique linéaire est en fait la logique classique à laquelle l'on a ôté les règles structurelles de contraction et d'affaiblissement, pour les réintroduire de manière plus maîtrisée à l'aide d'un opérateur modal ! (et son dual ?). Les formules dont le connecteur principal n'est pas l'un de ces opérateurs modaux ne peuvent être contractées ou affaiblies. L'implication linéaire $A \multimap B$ est différente de l'implication classique puisqu'elle représente en quelque sorte une transformation, un changement d'état, un passage de l'état A à l'état B . L'absence des règles structurelles rend également impossible l'interdérivabilité des règles d'introduction multiplicatives et additives, et nous devons donc distinguer deux conjonctions — le $\otimes$ et le $\&$, et deux disjonctions — le $\oplus$ et le $\wp$.

MALL

Nous travaillerons par la suite dans un sous-système de LL nommé MALL¹. Le calcul des séquents de MALL est le calcul des séquents de LL auquel on a ôté les règles exponentielles, et les règles d'introduction des constantes. Les formules de MALL sont donc toutes les formules de LL ne contenant ni exponentielles ni constantes.

1.1.2 Le calcul des séquents monolatéral de MALL

Groupe Identité :

$$\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Ax} \quad \frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash A^\perp, \Gamma}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{CUT}$$

Groupe Structurel :

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \sigma(\Gamma)} \Sigma \quad \text{où } \sigma \text{ est une permutation des éléments de } \Gamma \text{ considéré comme un multi-ensemble}$$

Groupe Logique :

$$\frac{\vdash A, \Gamma}{\vdash A \oplus B, \Gamma} \oplus_g \quad \frac{\vdash B, \Gamma}{\vdash A \oplus B, \Gamma} \oplus_d \quad \frac{\vdash A, \Delta_1 \quad \vdash B, \Delta_2}{\vdash A \otimes B, \Delta_1, \Delta_2} \otimes$$

¹Ce sont les initiales de Multiplicative Additive Linear Logic.

$$\frac{\vdash A, B, \Delta}{\vdash A \wp B, \Delta} \wp \quad \frac{\vdash A, \Delta \quad \vdash B, \Delta}{\vdash A \& B, \Delta} \&$$

1.1.3 Elimination des coupures

Nous avons dans MALL, tel que nous l'avons défini, un théorème d'élimination des coupures, dont la démonstration est classique, à savoir la définition d'étapes de réductions élémentaires, et une preuve de la terminaison de l'algorithme. Nous donnons ici les trois étapes de réduction les plus importantes :

Axiome

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdash A, \Delta \end{array} \quad \frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Ax}}{\vdash A, \Delta} \text{CUT} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdash A, \Delta \\ \vdots \pi_2 \end{array}$$

Multiplicatif

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdash A, B, \Delta \end{array} \wp \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_2 \\ \vdash A^\perp, \Gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_3 \\ \vdash B^\perp, \Xi \end{array}}{\vdash A^\perp \otimes B^\perp, \Gamma, \Xi} \otimes}{\vdash \Delta, \Gamma, \Xi} \text{CUT} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdash A, B, \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_2 \\ \vdash A^\perp, \Gamma \end{array}}{\vdash B, \Delta, \Gamma} \text{CUT} \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_3 \\ \vdash B^\perp, \Xi \end{array} \text{CUT} \quad \vdash \Delta, \Gamma, \Xi$$

Additif

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdash A, \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_2 \\ \vdash B, \Delta \end{array}}{\vdash A \& B, \Delta} \& \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_3 \\ \vdash A^\perp, \Gamma \end{array}}{\vdash A^\perp \oplus B^\perp, \Gamma} \oplus_g}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{CUT} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdash A, \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_3 \\ \vdash A^\perp, \Gamma \end{array}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{CUT}$$

Nous n'indiquons pas le cas de la règle $\oplus_d$ qui est évidente à la vue de la réduction dans le cas de $\oplus_g$. De même, nous ne donnons en exemple qu'un seul cas de commutation de règles, le seul cas non-linéaire².

²Il ne s'agit pas réellement du seul cas non-linéaire, mais c'est le seul cas non-linéaire augmentant la complexité de l'algorithme.

Commutation &/CUT

$$\begin{array}{c}
 \vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2 \quad \vdots \pi_3 \\
 \frac{\frac{\frac{\vdots \pi_1}{\vdash A, \Gamma, B} \quad \frac{\vdots \pi_2}{\vdash A, \Gamma, C}}{\vdash A, B \& C, \Gamma} \& \quad \frac{\vdots \pi_3}{\vdash A^\perp, \Delta}}{\vdash B \& C, \Gamma, \Delta} \text{CUT}
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{c}
 \vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_3 \quad \vdots \pi_2 \quad \vdots \pi_3 \\
 \frac{\frac{\frac{\vdots \pi_1}{\vdash A, \Gamma, B} \quad \frac{\vdots \pi_3}{\vdash A^\perp, \Delta}}{\vdash \Gamma, B, \Delta} \text{CUT} \quad \frac{\frac{\vdots \pi_2}{\vdash A, \Gamma, C} \quad \frac{\vdots \pi_3}{\vdash A^\perp, \Delta}}{\vdash \Gamma, C, \Delta} \text{CUT}}{\vdash B \& C, \Gamma, \Delta} \&
 \end{array}$$

Propriété de la sous-formule

L'existence d'une procédure d'élimination des coupures nous donne la propriété la plus importante pour la recherche des preuves : la propriété de la sous-formule. Ainsi, les séquents apparaissant dans une preuve sans coupures ne contiennent que des sous-formules de la base³ de la preuve.

1.2 Réversibilité

1.2.1 Connecteurs réversibles

En général, il faut parler de *règles* réversibles. Cependant, comme le calcul des séquents monolatéral de MALL ne comporte qu'une règle d'introduction par connecteur, nous nous permettrons un abus de langage et nous parlerons de *connecteurs* réversibles. En voici la définition :

Définition 1. *Un connecteur $\star$ est dit réversible si pour tout séquent de la forme $\vdash A \star B, \Delta$ prouvable, il existe une preuve sans coupures de ce séquent se terminant par une règle d'introduction de $\star$.*

Proposition 1. *Dans MALL, les connecteurs $\wp$ et $\&$ sont réversibles, tandis que les connecteurs $\otimes$ et $\oplus$ ne sont pas réversibles.*

En effet, les deux dérivations suivantes nous donnent des preuves qui se normalisent en des preuves sans coupures du séquent $\vdash A \star B, \Delta$ se terminant par une règle d'introduction de $\star$ ⁴ :

Réversibilité de $\wp$

³Nous appelons *base* d'une preuve son séquent conclusion.

⁴En effet, la procédure de normalisation ne modifie pas la dernière règle utilisée.

$$\frac{\frac{\vdots \pi}{\vdash A \wp B, \Delta} \quad \frac{\frac{\overline{\vdash A, A^\perp}^{Ax} \quad \overline{\vdash B, B^\perp}^{Ax}}{\vdash A^\perp \otimes B^\perp, A, B}^{\otimes}}{\vdash A, B, \Delta}^{CUT} \quad \frac{\vdash A, B, \Delta}{\vdash A \wp B, \Delta}^{\wp}$$

Réversibilité de &

$$\frac{\frac{\vdots \pi}{\vdash \Delta, A \& B} \quad \frac{\overline{\vdash A, A^\perp}^{Ax}}{\vdash A^\perp \oplus B^\perp, A}^{\oplus_g} \quad \frac{\vdots \pi}{\vdash \Delta, A \& B} \quad \frac{\overline{\vdash B, B^\perp}^{Ax}}{\vdash A^\perp \& B^\perp, B}^{\oplus_d}}{\vdash \Delta, A}^{CUT} \quad \frac{\vdash \Delta, B}{\vdash \Delta, B}^{\&}}{\vdash A \& B, \Delta}^{CUT}$$

Les connecteurs $\oplus$ et $\otimes$ ne sont pas réversibles :

- $\otimes$ Les séquents $\vdash A, A^\perp, B^\perp$ et $\vdash B, B^\perp, A^\perp$ n'étant pas prouvables, une preuve de $\vdash A \otimes B, A^\perp \wp B^\perp$ ne peut se terminer par une règle $\otimes$.
- $\oplus$ Les séquents $\vdash A, A^\perp, B^\perp$ et $\vdash B, A^\perp, B^\perp$ ne sont pas prouvables. Une preuve de $\vdash A \oplus B, A^\perp \& B^\perp$ ne peut donc se terminer par une règle $\oplus$.

1.2.2 Polarité

Certaines règles étant réversibles et d'autres ne l'étant pas, on introduit une notion de polarité, qui est un simple typage des formules de MALL. Le typage qui nous vient tout de suite à l'esprit est le suivant :

$$\begin{aligned} P &= X \mid P \oplus P \mid P \otimes P \mid N^\perp \\ N &= X^\perp \mid N \wp N \mid N \& N \mid P^\perp \end{aligned}$$

Nous pouvons cependant remarquer que ce typage est partiel. Par exemple, la formule $A^\perp \oplus B^\perp$, où A et B sont des atomes, n'est pas typable d'après la définition ci-dessus. En effet, $A^\perp$ et $B^\perp$ sont des formules négatives, et une formule de connecteur principal $\oplus$ n'est typable que lorsque celui-ci s'applique à des formules positives. Il est alors nécessaire d'introduire les opérateurs de *shift* qui ont pour unique fonction de modifier la polarité d'une formule. Le typage résultant de cette introduction des opérateurs de *shift* est le suivant :

Définition 2.

$$\begin{aligned} P &= X \mid P \oplus P \mid P \otimes P \mid N^\perp \mid \downarrow N \\ N &= X^\perp \mid N \wp N \mid N \& N \mid P^\perp \mid \uparrow P \end{aligned}$$

Ainsi nous ne pouvons toujours pas typer la formule $A^\perp \oplus B^\perp$, mais $(\downarrow A^\perp) \oplus (\downarrow B^\perp)$ est une formule équivalente et typable.

Remarque 1. Dans la suite, nous n'écrirons pas toujours le shift qui alourdit les notations.

1.3 Focalisation

1.3.1 Définition de la focalisation

Un résultat très important en logique linéaire est la *focalisation*. Introduite par J.-M. Andréoli⁵, elle permet de limiter la recherche de preuves à des preuves d'une certaine forme, les preuves *focalisées*.

Définition 3. Une preuve focalisée est une preuve telle que (de bas en haut) :

- Lorsqu'une formule A commence à être décomposée, la preuve continue à décomposer les sous-formules tant que celles-ci sont de la même polarité que A .
- Lorsque le séquent contient une formule négative, la preuve commence par décomposer celle-ci.

Exemple 1.

$$\frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Ax}}{\vdash A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \otimes \quad \frac{\frac{}{\vdash B, B^\perp} \text{Ax}}{\vdash C, C^\perp} \text{Ax}}{\frac{\frac{\frac{}{\vdash A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \text{Ax}}{\vdash A \otimes B, A^\perp \wp B^\perp} \wp \quad \frac{}{\vdash C, C^\perp} \text{Ax}}{\vdash (A \otimes B) \otimes C, A^\perp \wp B^\perp, C^\perp} \otimes} \wp \quad \frac{}{\vdash (A \otimes B) \otimes C, (A^\perp \wp B^\perp) \wp C^\perp} \wp$$

Exemple 2.

$$\frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Ax}}{\vdash A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \otimes \quad \frac{\frac{}{\vdash B, B^\perp} \text{Ax}}{\vdash C, C^\perp} \text{Ax}}{\frac{\frac{\frac{}{\vdash A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \text{Ax}}{\vdash (A \otimes B) \otimes C, A^\perp, B^\perp, C^\perp} \otimes \quad \frac{}{\vdash C, C^\perp} \text{Ax}}{\vdash (A \otimes B) \otimes C, (A^\perp \wp B^\perp), C^\perp} \wp} \wp \quad \frac{}{\vdash (A \otimes B) \otimes C, (A^\perp \wp B^\perp) \wp C^\perp} \wp$$

⁵[And92]

La preuve de l'exemple 1 n'est pas focalisée. En effet, si elle commence par décomposer la formule négative $(A^\perp \wp B^\perp) \wp C^\perp$, elle ne continue pas la décomposition de ses sous-formules mais commence la décomposition de la formule positive $(A \otimes B) \otimes C$. Au contraire, la preuve de l'exemple 2, qui termine la décomposition de la formule négative avant de décomposer la formule positive, est focalisée.

1.3.2 Résultats utiles

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Proposition 2. *Lorsqu'un séquent Σ prouvable ne contient que des formules positives, l'une de ces formules au moins peut être (entièrement) décomposée afin de trouver une preuve focalisée sans coupures de Σ .*

On montre le résultat par induction sur la hauteur de la preuve (sans coupures). Soit le séquent prouvable $\vdash \Gamma$, et une preuve sans coupures de ce séquent. Soit A la formule principale dans la dernière règle utilisée. Cette dernière règle est soit une règle $\oplus$ soit une règle $\otimes$.

Commençons par le connecteur $\oplus$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que la preuve utilise la règle $\oplus_g$ et commence donc ainsi (de bas en haut) :

$$\frac{\vdash \Gamma, P_1}{\vdash \Gamma, P_1 \oplus P_2} \oplus_g$$

Dans ce cas, en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous pouvons affirmer qu'il existe une formule B de $\Delta = \Gamma \cup \{P_1\}$ nous permettant de trouver une preuve focalisée et sans coupures de $\vdash \Gamma, P_1$ commençant (de bas en haut) par la décomposition de B . Si cette formule est P_1 , alors la formule $P_1 \oplus P_2$ nous permet de conclure. Sinon, en appelant P la formule décomposable, on effectue les opérations suivantes :

- On regarde dans quel séquent⁶ la formule P_1 apparaît après la décomposition de P .
- On introduit la règle $\oplus_g$ à cet endroit afin d'obtenir une preuve sans coupures d'un segment Σ .
- Par hypothèse de récurrence, il existe une preuve sans coupures focalisée du séquent obtenu. On remplace donc la preuve de Σ par une preuve focalisée et sans coupures de Σ .

⁶Ce séquent est unique puisque la décomposition de la formule A est une application successive de règles positives. On peut aussi voir 1.5.2 pour se convaincre.

- On modifie la décomposition de P en remplaçant la formule P_1 par $P_1 \oplus P_2$, ce qui ne pose pas de problèmes, la formule P_1 n'étant ni principale ni secondaire dans les règles utilisées.

Comme nous n'avons pas introduit de coupures, on a une preuve de $\vdash \Gamma, P_1 \oplus P_2$ satisfaisant la proposition.

Pour le cas du connecteur $\otimes$, le raisonnement est similaire. En effet, si l'on a une preuve :

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash \Gamma_1, P_1} \quad \frac{\vdots}{\vdash \Gamma_2, P_2}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, P_1 \otimes P_2} \otimes$$

Par induction, soit les deux formules P_1 et P_2 nous permettent de trouver une preuve focalisée et sans coupures de $\vdash \Gamma_1, P_1$ et de $\vdash \Gamma_2, P_2$, soit l'une au moins de ces formules ne convient pas.

Dans le premier cas, nous n'avons rien à faire.

Sinon, supposons que pour trouver une preuve focalisée de $\vdash \Gamma_1, P_1$ il faut décomposer une formule $P \in \Gamma_1$. On note π_P l'arbre de décomposition de la formule P . Nous effectuons alors la transformation suivante qui ressemble beaucoup au cas $\oplus$:

$$\begin{array}{ccc} \dots & \frac{\vdots \pi}{\vdash P_1, \Delta} & \dots \\ & \vdots \pi_P & \vdots \pi_2 \\ & \vdash \Gamma_1, P_1 & \vdash \Gamma_2, P_2 \\ & \vdash \Gamma_1, \Gamma_2, P_1 \otimes P_2 & \otimes \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} & \vdots \pi' & \vdots \pi'_2 \\ & \vdash P_1, \Delta & \vdash \Gamma_2, P_2 \\ & \vdash \Gamma_2, P_1 \otimes P_2, \Delta & \otimes \\ & \vdots \pi_P^* & \\ & \vdash \Gamma_1, \Gamma_2, P_1 \otimes P_2 & \end{array} \dots$$

où π_P^* est la preuve π_P où tous les séquents de la forme $\vdash P_1, \Psi$ ont été remplacés par $\vdash P_1 \otimes P_2, \Psi, \Gamma_2$, et π' et π'_2 sont des preuves focalisées sans coupures de $\vdash P_1, \Delta$ et $\vdash P_2, \Gamma_2$ dont l'existence est assurée par l'hypothèse de récurrence.

Cette transformation nous donne alors une preuve nous permettant de conclure.

Cette proposition nous donne immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *Pour tout séquent Σ prouvable, il existe une preuve focalisée sans coupures de Σ .*

1.4 Un calcul des séquents focalisé

Voici un calcul des séquents focalisé pour MALL. Nous le présentons succinctement car il est presque similaire au calcul des séquents de MALL₂⁷, le calcul des séquents de la logique propositionnelle du second ordre de la ludique, pour les connecteurs spirituels.

Ce calcul des séquents utilise le *bénitier*⁸ introduit par J.-Y. Girard dans [Gir91], qui est un ensemble contenant au plus une formule — nécessairement positive, dans la partie droite du séquent, séparés par un point-virgule.

Groupe Identité :

$$\frac{}{\vdash X^\perp; X} \text{Ax}$$

Focalisation :

$$\frac{\vdash \Gamma; P}{\vdash \Gamma, P;} \text{foc} \quad \text{Où les seules formules négatives dans } \Gamma \text{ sont des atomes}$$

Shift :

$$\frac{\vdash \Gamma, P;}{\vdash \Gamma, \uparrow P;} \uparrow \quad \frac{\vdash \Gamma, N;}{\vdash \Gamma; \downarrow N} \downarrow$$

Groupe Logique Positif :

$$\frac{\vdash \Gamma; P_1}{\vdash \Gamma; P_1 \oplus P_2} \oplus_g \quad \frac{\vdash \Gamma; P_2}{\vdash \Gamma; P_1 \oplus P_2} \oplus_d \quad \frac{\vdash \Gamma_1; P_1 \quad \vdash \Gamma_2; P_2}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2; P_1 \otimes P_2} \otimes$$

Groupe Logique Négatif :

$$\frac{\vdash \Gamma, N_1, N_2;}{\vdash \Gamma, N_1 \wp N_2;} \wp \quad \frac{\vdash \Gamma, N_1; \quad \vdash \Gamma, N_2;}{\vdash \Gamma, N_1 \& N_2;} \&$$

⁷Voir 5.4.2, p.57.

⁸*stoup* en anglais.

1.5 La silhouette des preuves

1.5.1 Isomorphismes et distributivité

Définition 4. Soient A et B deux formules. La paire (π_A, π_B) est un isomorphisme syntaxique entre A et B si :

- π_A est une preuve de $\vdash A, B^\perp$.
- π_B est une preuve de $\vdash A^\perp, B$.
- La preuve obtenue en coupant les conclusions A et $A^\perp$ de π_A et π_B se normalise en une η -expansion⁹ de l'axiome $\vdash B^\perp, B$.
- La preuve obtenue en coupant les conclusions B et $B^\perp$ de π_A et π_B se normalise en une η -expansion de l'axiome $\vdash A^\perp, A$.

Les deux isomorphismes suivants nous permettent de montrer la distributivité de $\wp$ sur $\&$ et celle de $\otimes$ sur $\oplus$. En effet, nous avons les isomorphismes syntaxiques suivants :

Proposition 3.

$$A \wp (B \& C) \multimap (A \wp B) \& (A \wp C) \quad (1.1)$$

$$A \otimes (B \oplus C) \multimap (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \quad (1.2)$$

Les équations 1.1 et 1.2 étant les mêmes par dualité, nous n'avons donc que deux implications à démontrer :

$$A \& (B \wp C) \multimap (A \& B) \wp (A \& C)$$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\vdash A, A^\perp} \text{ Ax}}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A, B} \otimes \quad \frac{\frac{\overline{\vdash B, B^\perp} \text{ Ax}}{\vdash B^\perp \oplus C^\perp, B} \oplus_g}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A, B} \wp}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), (A \wp B) \& (A \wp C)} \& \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\vdash A, A^\perp} \text{ Ax}}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A, C} \otimes \quad \frac{\frac{\overline{\vdash C, C^\perp} \text{ Ax}}{\vdash B^\perp \oplus C^\perp, C} \oplus_d}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), A, C} \wp}{\vdash A^\perp \otimes (B^\perp \oplus C^\perp), (A \wp B) \& (A \wp C)} \wp \&$$

$$(A \& B) \wp (A \& C) \multimap A \& (B \wp C)$$

⁹L' η -expansion des axiomes est une preuve de $\vdash A, A^\perp$ à partir d'axiomes sur les sous-formules de A . Le nom provient de la correspondance avec l' η -expansion du lambda-calcul à travers la correspondance preuve-programme.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Ax}}{\vdash A, B, A^\perp \otimes B^\perp} \otimes \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash B, B^\perp} \text{Ax}}{\vdash A, C, A^\perp \otimes C^\perp} \otimes}{\vdash A, B, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)} \oplus_g \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Ax}}{\vdash A, C, A^\perp \otimes C^\perp} \otimes \quad \frac{\frac{}{\vdash C, C^\perp} \text{Ax}}{\vdash A, C, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)} \oplus_d}{\vdash A, B \& C, (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp)} \& \\
\vdash A \wp (B \& C), (A^\perp \otimes B^\perp) \oplus (A^\perp \otimes C^\perp) \wp
\end{array}$$

Nous ne décrivons pas les procédures de normalisation nécessaires à la vérification des deux conditions supplémentaires, mais ces conditions sont bien satisfaites.

Ainsi, dans la suite, nous considérerons qu'une formule de connecteur principal positif sera de la forme $\bigoplus_{i \in I} \bigotimes_{j \in J_i} N_{i,j}$ où les $N_{i,j}$ sont des formules négatives¹⁰.

De même, toute formule négative sera de la forme $\wp_{i \in I} \wp_{j \in J_i} P_{i,j}$ où les $P_{i,j}$ seront des formules positives¹¹.

1.5.2 Connecteurs synthétiques

La focalisation et les isomorphismes nous permettent de caractériser un type très précis de preuves, où une formule négative est immédiatement décomposée en sous-formules positives, et où lorsqu'une formule positive est décomposée, elle est décomposée jusqu'à n'obtenir que des sous-formules négatives. Ainsi, il est possible de considérer une série de plusieurs règles négatives (respectivement positives) successives comme l'application d'une seule règle d'un connecteur "généralisé", ou *connecteur synthétique*.

De plus, les connecteurs synthétiques ont une forme bien particulière. En effet, une formule positive, de la forme $\bigoplus_{i \in I} \bigotimes_{j \in J_i} N_{i,j}$ se décompose par une utilisation de plusieurs règles $\oplus$ puis de plusieurs règles $\otimes$. Un connecteur synthétique positif possède donc une preuve de la forme :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdash N_{p,1}, \Delta_1 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdash N_{p,n_p}, \Delta_{n_p} \end{array}}{\vdash \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \bigotimes_{1 \leq j \leq n_i} N_{i,j}, \Delta} \{p\}$$

où $\Delta = \cup_{i=1}^{n_p} \Delta_i$, c'est-à-dire que les Δ_i forment une partition de Δ .

De même, dans le cas d'une formule négative, nous aurons une preuve de la forme suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdash P_{1,1}, \dots, P_{1,n_1}, \Delta \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdash P_{k,1}, \dots, P_{k,n_k}, \Delta \end{array}}{\vdash \wp_{1 \leq i \leq k} \wp_{1 \leq j \leq n_i} P_{i,j}, \Delta} \{((1, \dots, n_i) | 1 \leq i \leq k)\}$$

¹⁰Si nous voulions être précis, il faudrait écrire $\bigoplus_{i \in I} \bigotimes_{j \in J_i} \downarrow N_{i,j}$.

¹¹De même, on devrait écrire $\wp_{i \in I} \wp_{j \in J_i} \uparrow P_{i,j}$.

On peut noter qu'une telle preuve est donc une alternance de règles positives et négatives¹². Nous pouvons donc comprendre l'intuition selon laquelle les preuves seraient une stratégie de discussion. Les règles négatives représentant des questions, les règles positives étant des réponses. Les coupures, qui sont des liens entre une question posée par $\mathfrak{D}$ et une réponse donnée par $\mathfrak{E}$ représentent alors un dialogue, ou un jeu.

1.5.3 Un nouveau calcul des séquents

Si nous considérons des preuves focalisées sans coupures de MALL, en ne considérant que des connecteurs synthétiques, nous travaillerons avec des séquents ayant au plus une formule négative¹³, les atomes négatifs mis à part.

Nous obtenons alors un calcul des séquents ne comprenant que trois règles :

Axiome

$$\frac{}{\vdash X, X^\perp} \text{Ax} \quad X \text{ est un atome}$$

Règle Positive : Les seules formules négatives dans Δ sont des atomes, et les $N_{i,j}$ représentent soit des formules négatives, soit des atomes.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdash N_{p,1}, \Delta_1 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdash N_{p,n_p}, \Delta_{n_p} \end{array}}{\vdash \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \bigotimes_{1 \leq j \leq n_i} N_{i,j}, \Delta} \{1, \dots, n_p\}$$

Règle Négative : De même que pour la règle positive, les $P_{i,j}$ représentent soit des formules positives, soit des négations d'atomes.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdash P_{1,1}, \dots, P_{1,n_1}, \Delta \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdash P_{k,1}, \dots, P_{k,n_k}, \Delta \end{array}}{\vdash \&_{1 \leq i \leq k} \wp_{1 \leq j \leq n_i} P_{i,j}, \Delta} \{((1, \dots, n_i) | 1 \leq i \leq k)\}$$

¹²Sauf dans le cas d'une application d'un connecteur positif portant uniquement sur des atomes et négations d'atomes, mais ce cas ne se présentera pas en ludique.

¹³Remarquons qu'un séquent prouvable $\vdash \Delta, N_1, \dots, N_k$ où Δ contient uniquement des formules positives et des atomes et négations d'atomes est équivalent au séquent $\vdash \Delta, \wp_{1 \leq i \leq k} N_i$ qui ne contient qu'une formule négative.

Chapitre 2

Les bases de la ludique

2.1 Dessins (designs-dessins)

2.1.1 Adresses

Les objets principaux de la ludique sont les designs, que nous présenterons dans un premier temps sous leur forme de *dessins*, qui est plus intuitive puisque ressemblant aux preuves focalisées sans coupures de MALL que nous avons décrites dans le premier chapitre. Les designs-dessins nous poseront quelques problèmes, et nous introduirons alors les designs sous leur forme de *desseins* (cf. 2.2).

Les dessins sont en fait des objets très proches de preuves en calcul des séquents. La première différence, et sans doute la plus importante, est l'oubli des formules. En effet, la ludique ne s'occupera que des adresses de ces formules, les *loci*, leur lieux. Ainsi, si θ est un *locus*, les *sub-loci* de θ , les adresses de ses sous-formules, seront de la forme $\theta \star i$ où $i \in \mathbb{N}$. Nous noterons par la suite $\theta \star \{i_1, \dots, i_n\}$ à la place de $\theta \star i_1, \dots, \theta \star i_n$, et nous oublierons parfois le signe $\star$ afin d'améliorer la lisibilité des formules.

L'une des conséquences de l'existence de ces adresses, que nous verrons plus en détail par la suite, est la distinction entre deux formules similaires. En effet, on a l'habitude de parler des *occurences* d'une formule, considérant que deux occurrences de A représentent la même formule. Ceci n'est plus vrai en ludique, car deux formules ne partageant pas la même adresse ne peuvent être *égales*. Ainsi, l'égalité que nous considérons habituellement, qui est une égalité à isomorphisme près, est remplacée par une réelle égalité, et deux "occurences" d'une formule ne seront pas égales, seulement "isomorphes" (voir 4.2.2). Ceci aura pour conséquence l'apparition de deux types de connecteurs, les connecteurs *spirituels*, qui sont des connecteurs proches de ceux dont nous avons l'habitude, que l'on appliquera à isomorphisme (délocalisation) près, et les connecteurs *locatifs* (voir 4.3

p.42 et 4.4 p.43).

2.1.2 Vocabulaire

Définition 5. *Loci et biais*

Un biais, que l'on notera par des lettres latines minuscules, est un nombre naturel. Une ramification, notée par des lettres latines majuscules, est un ensemble fini de biais.

Un répertoire est un ensemble de ramifications.

Un locus, noté par des lettres grecques minuscules, est une suite finie de biais.

La parité d'un locus est la parité de sa longueur.

Définition 6. *Fourchette*

Dans la suite, nous considérerons des séquents $\Lambda \vdash \Xi$ tel que :

1. Λ et Ξ sont des ensembles finis de loci deux à deux disjoints.
2. Λ contient au plus un locus, son manche. Les loci de Ξ sont appelés ses dents.

Un tel séquent sera appelé une fourchette, positive si $\Lambda = \emptyset$, négative sinon.

2.1.3 Trois règles

Les trois règles de la ludique ressemblent beaucoup aux trois règles de MALL du calcul des séquents focalisé présenté en 1.5.3. Un *dessin* est un arbre formé à partir de ces règles.

Règle positive

La règle positive est une généralisation des règles positives des connecteurs synthétiques que nous avons vu dans la partie 1.5.2, p.16 :

Définition 7.

$$\frac{\dots \quad \xi \star i \vdash \Lambda_i \quad \dots}{\vdash \xi, \Lambda} (\xi, I)$$

où I est une partie finie de $\mathbb{N}$, et les Λ_i sont des sous-ensembles de Λ deux à deux disjoints, et où l'on a une prémisses pour chaque $i \in I$.

Remarquons que tout connecteur synthétique de MALL possède une règle de cette forme, mais que la réciproque n'est pas vraie. En effet, on ne demande pas à avoir une partition de l'ensemble Λ , mais seulement une partition d'un sous-ensemble de Λ . Il est donc tout à fait possible d'appliquer cette règle positive dans le cas suivant, qui n'a pas d'équivalente dans MALL du fait d'un affaiblissement :

$$\frac{\xi \star 1 \vdash \alpha \quad \xi \star 2 \vdash \beta}{\vdash \xi, \alpha, \beta, \gamma} \quad (\xi, \{1, 2\})$$

Règle négative

La règle négative, de même, est une généralisation des connecteurs synthétiques négatifs de la partie 1.5.2 :

Définition 8.

$$\frac{\dots \quad \vdash \xi \star I, \Lambda_I \quad \dots}{\xi \vdash \Lambda} \quad (\xi, \mathcal{N})$$

où les Λ_I sont des sous-ensembles de Λ et $\mathcal{N}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})^{(1)}$, et où l'on a une prémisse pour chaque $I \in \mathcal{N}$.

On peut faire la même remarque que pour la règle positive. En effet, toute règle d'un connecteur synthétique de MALL est de cette forme, mais la réciproque n'est pas vraie. Il n'est pas nécessaire d'utiliser un contre-exemple ici, mais de simplement faire remarquer que l'ensemble $\mathcal{N}$ est potentiellement infini. Or, les connecteurs synthétiques de MALL ne possèdent pas une infinité de prémisses. Remarquons de plus que la condition $\Lambda_I \subset \Lambda$ permet des affaiblissements — contrairement à la règle négative présentée plus haut qui demandait $\Lambda_I = \Lambda$, ce qui nous donne un autre contre-exemple à la réciproque :

$$\frac{\vdash \xi \star \{1, 2\}, \alpha, \beta \quad \vdash \xi \star \{1, 3\}, \alpha}{\xi \vdash \alpha, \beta, \gamma} \quad (\xi, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\})$$

Daemon

Le Daemon est l'objet le plus inhabituel introduit par la ludique. Comme nous l'avons vu plus haut, les règles négatives et positives ne sont que des généralisations des connecteurs synthétiques de la logique linéaire additive et multiplicative. Le Daemon, lui, est une généralisation de l'axiome. C'est l'outil qui nous permettra d'obtenir des preuves de $\neg A$ et des preuves de A . En effet, les règles positives et négatives ne nous permettent que deux choses que nous ne pouvions faire dans MALL : des affaiblissements, et des règles négatives pouvant avoir une infinité de prémisses. Cependant, cela ne nous suffit pas pour obtenir à la fois des preuves de A et des preuves de $\neg A$. Pour cela, il nous faut des preuves fausses, et afin d'obtenir des preuves fausses, nous utiliserons le Daemon. La règle du Daemon est la suivante :

¹ $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Définition 9.

$$\frac{}{\vdash \Lambda} \star$$

sans aucunes conditions sur Λ .

C'est donc, comme nous l'avons dit plus haut, un axiome généralisé nous permettant d'introduire n'importe quelle fourchette positive Λ . Pour bien le comprendre, on peut penser à la règle **0** introduite dans la section 1.0.1 p.6 pour la démonstration de complétude de LK.

Remarque 2. On appellera le focus d'une règle l'adresse sur laquelle elle agit.

Des objets potentiellement infinis

Comme nous l'avons vu lors de la présentation de la règle négative, les dessins sont potentiellement infinis en largeur, puisque cette règle nous permet d'avoir une infinité de prémisses.

Les dessins ne seront cependant pas infinis uniquement en largeur, mais également en hauteur. Par exemple, un dessin ne faisant pas usage du Daemon sera un arbre infini. Voici un exemple de dessin infini à la fois en hauteur et en largeur, le $\mathfrak{F}\alpha\alpha$, qui est un dessin extrêmement important, puisqu'il permettra de mettre en relation deux "occurences" de la même formule :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \mathfrak{F}\alpha\alpha_{\xi' \star i, \xi \star i} \\ \dots \quad \xi' \star i \vdash \xi \star i \quad \dots \end{array}}{\vdash \xi', \xi \star I} \quad (\xi', I) \quad \dots \quad (\xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

où $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ représente l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Le $\mathfrak{F}\alpha\alpha$ sous forme de dessin peut être vu comme une η -expansion généralisée (puisque nous n'avons pas d'atomes).

2.2 Designs-desseins

2.2.1 Un problème de contextes dans les dessins

On a ôté les formules pour les remplacer par leurs adresses, mais comme nous allons le voir, les objets que nous avons obtenus contiennent encore trop d'informations. En effet, les trois dessins ci-dessous sont différents bien qu'équivalents. Le problème provient des contextes qui n'apparaissent pas comme *focus* d'une

règle. Dans les trois exemples ci-dessous, le contexte τ apparaît dans l'application de la règle de Daemon sur le séquent $\vdash \xi 23, \tau$ dans l'exemple 3, dans l'application de la règle de Daemon sur le séquent $\vdash \xi 37, \tau$ dans l'exemple 4 et apparaît à l'occasion d'un affaiblissement dans la règle négative $(-, \xi 2, \{\{1, 2\}, \{3\}\})$ dans l'exemple 5 :

Exemple 3.

$$\frac{\frac{\vdash \xi 2\{1, 2\}}{(\vdash, \xi 2\{1, 2\}, \emptyset)} \quad \frac{\vdash \xi 23, \tau}{(-, \xi 2, \{\{1, 2\}, \{3\}\})} \quad \frac{\vdash \xi 37}{(-, \xi 3, \{\{7\}\})}}{\frac{\xi 2 \vdash \tau}{\vdash \xi, \tau}} \quad \frac{\xi 3 \vdash \tau}{(+, \xi, \{2, 3\})}$$

Exemple 4.

$$\frac{\frac{\vdash \xi 2\{1, 2\}}{(\vdash, \xi 2\{1, 2\}, \emptyset)} \quad \frac{\vdash \xi 23}{(-, \xi 2, \{\{1, 2\}, \{3\}\})} \quad \frac{\vdash \xi 37, \tau}{(-, \xi 3, \{\{7\}\})}}{\frac{\xi 2 \vdash \tau}{\vdash \xi, \tau}} \quad \frac{\xi 3 \vdash \tau}{(+, \xi, \{2, 3\})}$$

Exemple 5.

$$\frac{\frac{\vdash \xi 2\{1, 2\}}{(\vdash, \xi 2\{1, 2\}, \emptyset)} \quad \frac{\vdash \xi 23}{(-, \xi 2, \{\{1, 2\}, \{3\}\})} \quad \frac{\vdash \xi 37}{(-, \xi 3, \{\{7\}\})}}{\frac{\xi 2 \vdash \tau}{\vdash \xi, \tau}} \quad \frac{\xi 3 \vdash \tau}{(+, \xi, \{2, 3\})}$$

Les règles utilisées étant les mêmes, on aimerait que ces trois objets soient identifiés, mais notre représentation des dessins ne nous le permet pas. Nous allons donc introduire les *dessins*, qui sont des dessins dans lesquels nous n'avons gardé que les règles. Tout comme nous avons ôté les formules, nous nous débarrassons maintenant des séquents. Les séquents peuvent être déduit dynamiquement des règles utilisées, les seuls contextes intéressant étant ceux apparaissant comme le *focus* d'une règle. Cependant, nous construisons un dessin "minimal" ou principal, puisque de nombreux dessins correspondent à un même dessin.

Des dessins aux desseins

Les trois dessins ci-dessus seront donc représentés par un même dessin, qui est — dans ce cas — un arbre représentant les règles utilisées. La seule chose qui les différencie dans la forme aux dessins qu'ils représentent est due au remplacement des règles négatives par des règles négatives unaires. Ainsi, la règle $(-, \xi 2, \{\{1, 2\}, \{3\}\})$ est remplacée par deux règles négatives unaires $(-, \xi 2, \{1, 2\})$ et $(-, \xi 2, \{3\})$:

$$\frac{\frac{(\vdash, \xi 2\{1, 2\}, \emptyset)}{(-, \xi 2, \{1, 2\})} \quad \frac{\text{✕}}{(-, \xi 2, \{3\})} \quad \frac{\text{✕}}{(-, \xi 3, \{7\})}}{(+, \xi, \{2, 3\})}$$

2.2.2 Desseins

Remarque 3. On appellera action une règle positive, une règle négative unaire ou un Daemon.

Les desseins sont la formalisation "correcte" des objets de la ludique. Nous commençons par présenter la définition d'une chronique, qui est une branche dans la forêt associée au dessin.

Définition 10. Une chronique de base $\Gamma \vdash \Xi$ est une suite d'actions $\langle \kappa_0, \dots, \kappa_n \rangle$ vérifiant :

1. La polarité de κ_0 est égale à la polarité de la base, et la polarité de κ_i est l'opposée de la polarité de κ_{i+1} ².
2. Pour $i < n$, κ_i n'est pas un Daemon. On dit aussi que κ_i est une action propre.
3. Soit ξ_p le focus de l'action négative κ_p . Alors ξ_p est choisi soit dans $\Gamma^{(3)}$ soit dans $\xi_{p-1} \star I_{p-1}$.
4. Soit ξ_p le focus d'une action positive κ_p . Alors ξ_p est choisi soit dans Ξ , soit dans $\xi_m \star I_m$ où ξ_m est l'une des actions négatives précédentes, c'est-à-dire si $p - q$ est impair et supérieur à 0.
5. Les foci sont deux à deux distincts.

Définition 11. Deux chroniques c et c' sont dites cohérentes lorsque :

1. L'une des deux est une sous-chronique de l'autre, ou bien elles diffèrent pour la première fois sur des actions négatives, i.e.. $c = c_0 \star \kappa \star c_1$ et $c' = c_0 \star \kappa' \star c_2$ avec $\kappa \neq \kappa'$ négatives.
2. Si κ et κ' ont des foci distincts alors les foci des actions de c_1 et c_2 sont distincts.

Définition 12. Un dessin $\mathcal{D}$ de base $\Gamma \vdash \Xi$ est un ensemble de chroniques de base $\Gamma \vdash \Xi$ telles que :

1. $\mathcal{D}$ est une forêt⁴.
2. Les chroniques de $\mathcal{D}$ sont deux à deux cohérentes.
3. Si $c \in \mathcal{D}$ n'a pas d'extension stricte dans $\mathcal{D}$, sa dernière action est positive.
4. Si la base de $\mathcal{D}$ est positive, alors $\mathcal{D}$ est non vide.

²C'est-à-dire que les polarités des actions sont alternées, et la polarité de la première action est la même que la polarité de la base.

³Remarquons que si ξ_p est choisi dans Γ , alors on a nécessairement $p = 0$ et la base de la chronique est négative.

⁴Une forêt est un graphe ne contenant aucun cycle.

Le $\mathfrak{F}\alpha\mathfrak{x}$ sous forme de dessein

Voici le $\mathfrak{F}\alpha\mathfrak{x}$ sous forme de dessein :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \dots \quad (\xi i j, K) \quad \dots \quad j \in J, K \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \\
 \hline
 (\xi i, J) \\
 \hline
 \dots \quad (\xi' i, J) \quad \dots \quad i \in I, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \\
 \hline
 (\xi', I) \\
 \hline
 \dots \quad (\xi, I) \quad \dots \quad I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})
 \end{array}$$

On peut remarquer qu'il ne s'agit pas d'un arbre, mais d'une forêt. En termes de stratégies, le $\mathfrak{F}\alpha\mathfrak{x}$ sous forme de dessein peut être vu comme la stratégie *copycat*, qui consiste à jouer le même coup que l'opposant.

Remarque 4. Nous utiliserons dans la suite le terme de *design* pour les objets de la ludique. Les designs seront donc des desseins, mais nous utiliserons souvent leur forme de dessins qui est beaucoup plus intuitive. Les dessins nous permettent donc de comprendre comment se passent les choses, et certains résultats peuvent être prouvés pour les dessins. Les desseins, plus difficiles à appréhender, sont les vrais objets de la ludique, et certains résultats importants nécessitent de travailler sur cet objet mieux formalisé (par exemple le théorème de Séparation, 3.3, p.34).

2.3 Les designs importants

Voici une liste des designs importants auxquels nous ferons référence par la suite :

Fax : $\mathfrak{F}\alpha\mathfrak{x}_{\xi, \xi'}$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \quad \mathfrak{F}\alpha\mathfrak{x}_{\xi' \star i, \xi \star i} \\
 \dots \quad \xi' \star i \vdash \xi \star i \quad \dots \quad (\xi', I) \\
 \hline
 \vdash \xi', \xi \star I \\
 \hline
 \dots \quad \xi \vdash \xi' \quad \dots \quad (\xi, \mathcal{P}_f((N)))
 \end{array}$$

Ramification : $\mathfrak{R}\alpha\mathfrak{m}_{(\lambda, I)}$

$$\begin{array}{c}
 \vdash \lambda \star i \star J \quad \star \\
 \dots \quad \vdash \lambda \star i \star J \quad \dots \quad (-, \lambda \star i, \mathcal{P}_f(\mathbb{N})) \\
 \hline
 \vdash \Lambda \\
 \hline
 \dots \quad \vdash \Lambda \quad \dots \quad (+, \lambda, I)
 \end{array}$$

Répertoire : $\text{Dir}_{\mathcal{N}}$

$$\frac{\dots \quad \overline{\vdash \xi \star I, \Lambda}^{\star} \quad \dots}{\xi \vdash \Lambda} \quad (-, \xi, \mathcal{N})$$

Daemon : Dai

$$\overline{\vdash \Lambda}^{\star}$$

Daemon négatif : Dai^{-}

$$\frac{\dots \quad \overline{\vdash \xi \star I, \Lambda}^{\star} \quad \dots}{\xi \vdash \Lambda} \quad (-, \xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

Sconse : $\mathfrak{Sf}$

$$\overline{\xi \vdash \Lambda}^{(\xi, \emptyset)}$$

Sconse positif : $\mathfrak{Sf}_{(\lambda, I)}$

$$\frac{\dots \quad \overline{\lambda \star i \vdash}^{(\lambda \star i, \emptyset)} \quad \dots}{\vdash \Lambda} \quad (\lambda, I)$$

Un : $\mathfrak{Un}$

$$\overline{\vdash \xi}^{(\xi, \emptyset)}$$

Bottes : $\mathfrak{Bot}$

$$\frac{\overline{\vdash}^{\star}}{\xi \vdash}^{(\xi, \{\emptyset\})}$$

Foi : $\mathfrak{Fid}^5$

$$\overline{\vdash \Lambda}^\Omega$$

2.4 Normalisation

La normalisation est peut-être le concept le plus difficile à comprendre en ludique, mais c'est également le plus important, puisque tous les résultats ultérieurs dériveront de la définition et des propriétés de la normalisation. Nous commencerons donc par présenter la normalisation des dessins, plus facile à comprendre, étant très proche de la normalisation de MALL, pour ensuite présenter la normalisation des desseins.

2.4.1 Normalisation des dessins

Pour présenter la normalisation des dessins, nous commencerons par présenter la normalisation dans le cas clos, puis nous introduirons les deux cas de commutations, et nous dirons un mot sur l'effet de la normalisation dans le cas où le réseau de coupures contient un $\mathfrak{Fax}$.

Cas clos

Commençons par quelques définitions :

Définition 13. On appelle réseau de coupures un ensemble fini non vide $A = \{\mathfrak{D}_i\}$ de dessins ayant les propriétés suivantes :

1. Les loci apparaissant dans les bases des $\mathfrak{D}_i$ sont deux à deux disjoints ou égaux.
2. Chaque locus apparaît au plus dans deux bases. Dans ce cas l'une de ces deux occurrences apparaît est le manche, et l'autre est une dent. On appellera un tel locus une coupure.
3. Le graphe dont les sommets sont les bases des dessins et dont les arêtes sont les coupures est connexe et acyclique.

⁵ $\mathfrak{Fid}$ n'est pas un design, on l'introduit afin de noter une absence de design, en général due à une divergence de la normalisation.

Définition 14. *Le seul dessin dont le manche n'est pas une coupure est le dessin principal du réseau, sa base est le séquent principal du réseau, et sa dernière règle est la règle principale du réseau.*

Définition 15. *Le réseau de coupure sera dit de base $\xi \vdash \Lambda$ où ξ est le seul locus apparaissant dans un manche et n'étant pas une coupure, et où Λ est l'ensemble des loci apparaissant comme dents dans les bases des $\mathcal{D}_i$ et n'étant pas des coupures.*

On s'occupera dans un premier temps du cas de la normalisation d'un réseau clos, c'est-à-dire un réseau de coupure de base $\vdash^6$:

Définition 16. *Dans la procédure de normalisation d'un réseau $\mathcal{R}$ clos, le dessin $\mathcal{D}$ principal est nécessairement positif. On note κ sa dernière règle. On se retrouve alors face à trois cas :*

Daemon Si $\kappa = \mathbf{\bowtie}$, alors $\llbracket \mathcal{R} \rrbracket = \mathcal{D} \mathbf{a} \mathbf{i}$.

Echec Si $\kappa = (\xi, I)$ alors ξ est coupure et apparaît dans le manche d'un autre dessin $\mathcal{E}$, le dessin adjoint, dont la dernière règle est nécessairement (ξ, N) . Si $I \notin N$, la normalisation ne termine pas.

Conversion Le cas de conversion est similaire au cas de l'échec, mais lorsque $I \in N$. Soit, pour tout $i \in I$, $\mathcal{D}_i$ le sous-dessin de $\mathcal{D}$ dont la conclusion est la prémisses d'index i de (ξ, I) . Soit $\mathcal{E}'$ le sous-dessin de $\mathcal{E}$ induit par la prémisses d'indice I . Soit $\mathcal{S}$ le réseau définit en remplaçant $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ par $\{\mathcal{D}_i\}_{i \in I}, \mathcal{E}'$. $\mathcal{S}$ n'étant pas forcément connexe, on note $\mathcal{S}'$ la partie connexe de $\mathcal{S}$. On a alors $\llbracket \mathcal{R} \rrbracket = \llbracket \mathcal{S}' \rrbracket$.

On notera $\llbracket \mathcal{R} \rrbracket = \mathfrak{F} \mathbf{id}$ lorsque la normalisation ne termine pas. Ceci peut arriver dans deux cas : le cas d'un échec et le cas d'une suite infinie de conversions⁷.

Cas général

Pour le cas général, il nous reste à traiter les deux cas de commutation :

Définition 17.

Commutation Positive Si le réseau $\mathcal{R}$ est positif, de dessin principal $\mathcal{D}$ de règle principale $(+, \xi, I)$, mais ξ n'est pas une coupure. On définit pour chaque $i \in I$ les dessins $\mathcal{D}_i$ comme les sous-dessins de $\mathcal{D}$ induits par chaque prémisses de la règle $(+, \xi, I)$, et on définit $\mathcal{R}'$ en remplaçant $\mathcal{D}$ par les $\mathcal{D}_i$.

⁶Il est évident que dans ce cas toutes les règles des dessins du réseau auront pour focus une coupure, ce qui écarte la possibilité de se trouver face à un cas de commutation.

⁷N'oublions pas que les dessins peuvent être de hauteur infinie.

$\mathfrak{R}'$ se décompose en plusieurs composantes connexes, et chaque $\mathfrak{D}_i$ apparaît dans une composante $\mathfrak{R}_i$, qui est un réseau. Les $\mathfrak{R}_i$ sont deux à deux disjoints, donc on définit pour chaque $i \in I$ la forme normale $\mathfrak{E}_i$ des $\mathfrak{R}_i$ ⁸. La forme normale de $\mathfrak{R}$ est ensuite définie de cette manière :

$$\llbracket \mathfrak{R} \rrbracket = \frac{\cdots \llbracket \mathfrak{R}_i \rrbracket \cdots}{\vdash \Lambda, \xi} (+, \xi, I)$$

Commutation Négative Si le réseau $\mathfrak{R}$ est négatif, de règle principale $(-, \xi, \mathcal{N})$, on note, pour tout $I \in \mathcal{N}$, $\mathfrak{D}_I$ comme le sous-dessin de $\mathfrak{D}$ induit par la prémisse d'index I , et l'on remplace $\mathfrak{D}$ par les $\mathfrak{D}_I$ dans $\mathfrak{R}$. Soit $\mathfrak{R}_I$ la composante connexe de $\mathfrak{D}_I$. On pose $\mathcal{N}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ tel que pour tout $I \in \mathcal{N}'$, $\mathfrak{R}_I$ ait une forme normale $\mathfrak{E}_I$. La forme normale de $\mathfrak{R}$ est alors définie par :

$$\llbracket \mathfrak{R} \rrbracket = \frac{\cdots \llbracket \mathfrak{R}_I \rrbracket \cdots}{\xi \vdash \Lambda} (-, \xi, \mathcal{N}')$$

Remarque 5. La commutation négative est le seul cas possible pour un réseau négatif. On en conclut donc que tout réseau négatif possède une forme normale. Le seul cas pouvant nous gêner est le cas où $\mathcal{N}' = \emptyset$. Mais dans ce cas, nous avons tout de même une forme normale :

$$\llbracket \mathfrak{R} \rrbracket = \frac{}{\xi \vdash \Lambda} (-, \xi, \emptyset)$$

$\mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ et Normalisation

Nous avons déjà présenté le $\mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ en 2.1.3 et 2.2.2. Nous allons maintenant voir comment se comporte le $\mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ à travers la normalisation.

On considère des designs $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ de bases $\vdash \xi$ et $\xi' \vdash$ terminant par des règles $(+, \xi, I)$ et $(-, \xi', \mathcal{N})$. Coupés avec $\mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}_{\xi, \xi'}$ ils normalisent en des designs de base $\vdash \xi'$ et $\xi \vdash$ et de dernières règles $(+, \xi', I)$ et $(-, \xi, \mathcal{N})$. Nous parlons des délocalisations dans la section 4.2.2 p.40, mais nous pouvons donner les quelques équations :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{D} \rrbracket &= \theta(\mathfrak{D}) \\ \llbracket \mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{E} \rrbracket &= \theta^{-1}(\mathfrak{E}) \\ \llbracket \mathfrak{F}\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \rrbracket &= \llbracket \mathfrak{D}, \theta^{-1}(\mathfrak{E}) \rrbracket = \llbracket \theta(\mathfrak{D}), \mathfrak{E} \rrbracket \end{aligned}$$

⁸Ces formes normales existent car ce sont des réseaux négatifs, voir la remarque 5.

2.4.2 Normalisation des desseins

Nous commençons par la définition évidente de réseau de coupure de desseins. Elle découle naturellement de la définition des réseaux de coupure de dessins.

Définition 18. *Un réseau $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_n\}$ de desseins de base $\Xi_p \vdash \Lambda_p$ est un ensemble fini et non vide de desseins tel que :*

1. *Les loci apparaissant dans les bases des $\mathfrak{D}_i$ sont deux à deux disjoints ou égaux.*
2. *Un locus ne peut apparaître deux fois comme manche. On appellera coupure un locus apparaissant à la fois comme manche et comme dent.*
3. *Pour chaque coupure, si l'on trace une arête entre le locus et l'une de ses apparition en tant que dent, le graphe obtenu est connexe et acyclique.*
4. *Si ξ est une dent dans les bases des dessins $\mathfrak{D}_k$ et $\mathfrak{D}_p$, et que des actions de focus ξ sont effectuées dans les deux desseins, alors $k = p$.*

Remarquons le changement dans la troisième condition par rapport aux réseaux de dessins. En effet, une coupure ξ n'apparaît qu'une fois comme manche, mais peut apparaître en tant que dent dans plusieurs desseins, or nous savons qu'elle ne sera active que dans l'un de ces desseins (condition 4). Pour comprendre cette condition, on peut penser aux réseaux de preuves, et aux graphes de correction des réseaux multiplicatifs. Si l'on pose $\mathcal{R}$ le réseau obtenu en traçant les arêtes entre chaque coupure (dans un manche) et ses différentes apparitions comme dent, on peut alors considérer des graphes de correction, qui sont les graphes obtenus à partir de $\mathcal{R}$ en choisissant pour chaque coupure une et une seule arête partant de celle-ci. La condition est alors similaire au critère de Danos-Reigner pour les réseaux de preuves multiplicatifs, à savoir que *tout graphe de correction doit être connexe et acyclique*. Un seul de ces "graphes de correction" sera utilisé, et la condition nous assure que ce graphe est bien un réseau de coupure.

Définition 19. *On appelle une tranche un réseau (ou un dessin) $\mathfrak{R}$ tel que toute règle négative est au plus unaire. Donc, si $c \star (-, \xi, I)$ et $c \star (-, \xi, I')$ sont deux chroniques de $\mathfrak{R}$, alors $I = I'$.*

Dans une tranche, on peut alors définir un ordre (non total) entre les actions κ et κ' :

$$\kappa <_{\mathfrak{R}} \kappa' \leftrightarrow c \star \kappa \star c' \star \kappa' \subset \mathfrak{R}$$

On dira que l'action κ est *cachée* si κ est propre (différente du Daemon) et si son focus est le sub-locus d'une coupure.

Définition 20. *Nous pouvons alors définir une tranche équilibrée : on dit qu'une tranche $\mathfrak{R}$ finie est équilibrée si pour toute action κ cachée de $\mathfrak{R}$, son opposée, l'action $\tilde{\kappa}$ est également dans $\mathfrak{R}$.*

Ces sont les tranches équilibrées qui nous intéressent réellement dans la cadre de la normalisation, puisque dans une tranche équilibrée, tout ce qui sera "coupé" est présent. En effet, à travers les conversions, la coupure sur ξ devient des coupures sur ses sub-loci. Ces coupures doivent être présentes dans la tranche si nous voulons continuer la normalisation.

Définition 21. On appelle *mêlée* d'une tranche équilibrée $\mathfrak{R}$ le quotient de l'ordre $<_{\mathfrak{R}}$ obtenu en identifiant chaque action cachée avec son opposée. On le note $\ll_{\mathfrak{R}}$.

On obtient alors les propositions suivantes :

Proposition 4. Si $\mathfrak{R}$ est une tranche équilibrée, alors $\ll_{\mathfrak{R}}$ est un ordre arborescent⁹.

Proposition 5. 1. Si $\mathfrak{R}$ est une tranche équilibrée, alors $[\![\mathfrak{R}]\!]$ consiste en les actions visibles de $\mathfrak{R}$ avec l'ordre induit par $\ll_{\mathfrak{R}}$
 2. Si $\mathfrak{R}$ est un réseau et $\mathfrak{S}$ est une tranche finie de $[\![\mathfrak{R}]\!]$, il existe une unique tranche $\mathfrak{T}$ équilibrée $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}$ telle que $\mathfrak{S} = [\![\mathfrak{T}]\!]$. On appelle $\mathfrak{T}$ le pull-back de $\mathfrak{S}$ selon $\mathfrak{R}$.

Nous présentons les démonstrations — assez longues et complexes — de ces deux résultats plus loin.

2.4.3 Disputes

Définition 22. On définit une dispute de $\mathfrak{R}$ comme une tranche équilibrée $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}$ telle que $\ll_{\mathfrak{S}}$ soit un ordre linéaire.

De manière équivalente, une dispute est le pull-back d'une chronique de $\mathfrak{R}$.

On définit la *dispute* générée par $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$. Cette définition utilise la notion d'orthogonalité, définie section 3.1 p.33.

Définition 23. Si $\mathfrak{D} \perp \mathfrak{E}$, le pull-back de $<\mathfrak{X}>$ selon $\{\mathfrak{D}, \mathfrak{E}\}$, que l'on note $[\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}]$, est la dispute générée par $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$. Cette dispute correspond à la suite $<\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1}, \mathfrak{X}>$ consistant en les $n - 1$ conversions effectuées suivies du Dae-mon final.

⁹Un ordre arborescent est un ordre dont tous les segments initiaux sont des ordres linéaires finis.

2.4.4 Démonstrations des propositions 4 et 5

Proposition 4

C'est la démonstration la plus longue et complexe.

On supposera dans la suite que la tranche finie $\mathfrak{S}$ n'utilise pas le Daemon. En effet, si on a une règle Daemon au-dessus d'une fourchette $\vdash \Lambda$, on choisit un nouveau locus τ — il peut être nécessaire de délocaliser avant, dans le cas d'un réseau clos — et on remplace $\vdash \Lambda$ par $\vdash \Lambda, \tau$, et au lieu d'appliquer un Daemon, on applique la règle $(\tau, \emptyset)$. Si la propriété est vraie pour la tranche ainsi modifiée, elle est également vraie pour $\mathfrak{S}$.

Soit $\mathfrak{T}$ la sous-forêt équilibrée maximale de $\mathfrak{S}$ telle que $\ll_{\mathfrak{T}}$ soit un ordre arborescent. Soit κ minimal pour $<_{\mathfrak{S}}$ dans $\mathfrak{S} - \mathfrak{T}$.

κ est positive et visible : dans ce cas, $\mathfrak{U} = \mathfrak{T} \cup \{\kappa\}$ est toujours un ordre, et même une forêt, c'est-à-dire que l'ensemble $\{\kappa' \ll_{\mathfrak{U}} \kappa\}$ est un ordre linéaire.

κ est négative et visible : alors $\mathfrak{U} = \mathfrak{T} \cup \{\kappa\}$ est toujours une forêt.

κ est cachée : l'idée est toujours d'ajouter κ , mais comme κ est cachée et que l'on doit donc identifier κ et $\tilde{\kappa}$, nous allons chercher κ, κ' minimaux pour $<_{\mathfrak{S}}$ dans $\mathfrak{S} - \mathfrak{T}$.

- (i) Si κ est positive et κ' positive est juste avant $\tilde{\kappa}$ pour $<_{\mathfrak{S}}$, alors κ' est cachée et $\kappa' <_{\mathfrak{S}} \kappa$, ce qui contredit l'hypothèse sur κ . Donc $\tilde{\kappa}$ est minimal aussi.
- (ii) Si κ est négative on prends κ_1 minimale hors de $\mathfrak{T}$ telle que $\kappa_1 \leq_{\mathfrak{S}} \tilde{\kappa}$
Alors :

1. Si $\kappa_1 = \tilde{\kappa}$ ou κ_1 est positive, alors on choisit κ_1 .
2. Sinon, on réitère le processus avec κ_1 — qui est nécessairement négative, jusqu'au moment où l'on trouve un κ_n approprié. Il reste à montrer que le processus termine. Premièrement on remarque que l'un des κ_i ne sera plus minimal puisque, si κ_i est minimal, le manche de la base de κ_i est une dent dans la base de κ_{i+1} et une boucle contredirait la condition d'acyclicité des réseaux. On peut facilement remarquer que pour tout $j > i$, les κ_j ne seront pas minimaux non plus. Supposons que la suite des κ_j ne s'arrête jamais, à savoir que toutes les actions κ_j sont négatives, et, pour $j > i$ soit $\kappa'_j \in \mathfrak{T}$ l'action positive maximale inférieure (pour $<_{\mathfrak{S}}$) à κ_j . Le focus de κ_j a été créé par κ'_j et donc $\tilde{\kappa}'_j <_{\mathfrak{S}} \tilde{\kappa}_j$ et par conséquent $\tilde{\kappa}'_j <_{\mathfrak{S}} \kappa_{j+1}$ d'où $\tilde{\kappa}'_j \leq_{\mathfrak{S}} \kappa'_{j+1}$ — et donc $\tilde{\kappa}'_j <_{\mathfrak{S}} \kappa'_{j+1}$ puisque les actions sont de polarité opposées. Mais cela nous donne que $\kappa'_j \ll_{\mathfrak{S}} \kappa'_{j+1}$ et donc la suite κ'_p est strictement croissante pour $\ll_{\mathfrak{S}}$ dans la forêt finie $\mathfrak{T}$.

Une fois l'action κ trouvée, on pose $\mathfrak{U} = \mathfrak{T} \cup \{\kappa, \tilde{\kappa}\}$. On peut supposer que κ est positive. Dans ce cas, κ est clairement maximale pour $\ll_{\mathfrak{U}}$. Il nous reste simplement à montrer que $\mathfrak{U}$ est une forêt, donc montrer que l'union

$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}' \cup \mathfrak{Q}''$ des ordres linéaires $\mathfrak{Q}' = \{\kappa' | \kappa' \ll \kappa\}$ et $\mathfrak{Q}'' = \{\kappa'' | \kappa'' \ll \tilde{\kappa}\}$ est un ordre linéaire. Les éléments maximaux de $\mathfrak{Q}'$ et $\mathfrak{Q}''$ sont les actions κ' négative et κ'' positive effectuées juste avant. On a alors forcément $\tilde{\kappa}'' \leq_{\mathfrak{S}} \kappa'$. D'où $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'$.

Proposition 5

Comme dans la démonstration précédente, on élimine les Daemon en les remplaçant par des actions positives.

1. On choisit une branche maximale dans la mêlée $\ll_{\mathfrak{S}}$ et on interprète la démonstration précédente comme une construction inductive de cette branche.

On a :

κ est positive et visible et dans ce cas, κ suivie d'une action négative et visible. La branche doit se terminer par une κ' positive et visible.

κ est négative et visible et alors κ est suivie soit d'une action positive et visible, soit d'une action positive cachée.

κ est une action cachée et est suivie soit par une action cachée, soit par une action négative et visible.

On peut donc conclure facilement que ce qu'il reste de la branche lorsque l'on a ôté les actions cachées est une chronique. On a donc construit un dessin ayant la même base que $\mathfrak{S}$. Il faudrait vérifier que ce dessin est bien égal à $\llbracket \mathfrak{S} \rrbracket$, mais c'est presque évident puisque si nous étions en train de normaliser $\mathfrak{S}$ en tant que dessin, les trois cas correspondraient respectivement aux cas commutation positive, commutation négative, et conversion.

2. On montre tout d'abord l'unicité. Si $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{U}$ sont des tranches équilibrées de $\mathfrak{R}$, alors $\ll_{\mathfrak{T}}$ est un sous-ordre initial de $\ll_{\mathfrak{U}}$, et les éléments maximaux de ces ordres sont ceux de $\llbracket \mathfrak{T} \rrbracket$ et $\llbracket \mathfrak{U} \rrbracket$. Donc $\llbracket \mathfrak{T} \rrbracket = \llbracket \mathfrak{U} \rrbracket$ implique $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}$. En général on remplace $\mathfrak{T}$ par $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{U}$.

Comme nous l'avons dit plus haut, les trois cas présentés dans la démonstration précédente correspondent aux cas de commutation positive, commutation négative et conversion dans le cas de la normalisation de dessins. En effet, une chronique $c \in \llbracket \mathfrak{R} \rrbracket$ terminant par une action positive provient d'une suite d'actions bien définie (une dispute) : positive, négative, neutre. Ces actions forment ensemble une tranche équilibrée, qui est le pull-back de c . Il est clair que le pull-back de $\mathfrak{S}$ est l'union des pull-back des c quand c parcourt $\mathfrak{R}$.

Chapitre 3

Les théorèmes importants

Dans ce chapitre, nous allons présenter cinq théorèmes par rapport à la normalisation. Les deux premiers résultats, l'associativité et la séparation, sont des résultats équivalents à deux propriétés syntaxiques du lambda-calcul. Ils permettent de démontrer le principe de clôture, qui sera un outil très utile par la suite. Les deux derniers résultats correspondent à deux théorèmes du lambda-calcul, mais sont principalement liés aux sémantiques dénotationnelles.

Mais avant tout cela, il est nécessaire de présenter la notion d'orthogonalité.

3.1 Orthogonalité

Définition 24. Soit $\mathcal{D}$ un design de base $\Xi \vdash \Lambda$ et soient $\mathcal{E}_\sigma$ des designs de base $\vdash \sigma$ si $\sigma \in \Xi$ et $\sigma \vdash$ si $\sigma \in \Lambda$. On note $\ll \mathcal{D} | (\mathcal{E}_\sigma) \gg$ pour la forme normale $\llbracket \mathcal{D}, (\mathcal{E}_\sigma) \rrbracket$ (égale à $\mathcal{D}a_i$, ou fid en cas de divergence) du réseau $\{\mathcal{D}, \dots, \mathcal{E}_\sigma, \dots\}$. $\mathcal{D}$ et la famille $(\mathcal{E}_\sigma)$ sont orthogonaux lorsque la forme normale est totale, c'est-à-dire lorsque $\ll \mathcal{D} | (\mathcal{E}_\sigma) \gg = \mathcal{D}a_i$. On notera que $\mathcal{D}$ et $(\mathcal{E}_\sigma)$ sont orthogonaux par $\mathcal{D} \perp (\mathcal{E}_\sigma)$.

On appellera la base $\Xi \vdash \Lambda$ la *pro-base*, et les bases $\vdash \sigma$ et $\sigma \vdash$ seront les *anti-bases* ou *contre-base*, un design de base $\Xi \vdash \Lambda$ sera un *pro-design* et un design de base $\vdash \sigma$ ou $\sigma \vdash$ sera un *anti-design* ou un *contre-design*.

Le cas le plus important sera celui d'une pro-base atomique, puisqu'il n'y aura qu'une seule contre-base et on aura donc un seul contre-design, ce que l'on notera de manière simplifiée $\ll \mathcal{D} | \mathcal{E} \gg$ et $\mathcal{D} \perp \mathcal{E}$.

Définition 25. L'ensemble des designs de base $\Xi \vdash \Lambda$ est équipé de la topologie générée par les ensembles $(\mathcal{E}_\sigma)^\perp$. La relation de pré-ordre est définie par $\mathcal{D}^\perp \subset \mathcal{D}'^\perp$.

La clôture d'un point $\mathfrak{D}$ est le bi-orthogonal $\mathfrak{D}^{\perp\perp}$. On peut définir le pré-ordre ainsi : $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{D}' \leftrightarrow \mathfrak{D}' \in \mathfrak{D}^{\perp\perp}$. La topologie sera $\mathcal{T}_0$ ⁽¹⁾ lorsque le pré-ordre est un ordre partiel, ce que prouvera le théorème de séparation (théorème 7).

Définition 26. Si $\mathfrak{c}$ est une chronique propre sur une pro-base atomique, on définit l'anti-design $\mathfrak{Dpp}_{\mathfrak{c}}$:

1. Si $\mathfrak{c}$ se termine par une action négative, alors $\mathfrak{Dpp}_{\mathfrak{c}}$ est constituée des opposées des actions de $\mathfrak{c}$.
2. Si $\mathfrak{c}$ termine par une action positive, alors $\mathfrak{Dpp}_{\mathfrak{c}}$ est constituée des opposées des actions de $\mathfrak{c}$ et d'un Daemon.

3.2 Associativité

L'équivalent de la propriété de Church-Rosser pour les réseaux de preuves de MALL : la normalisation est associative.

Théorème 6. Soit $\{\mathfrak{R}_0, \dots, \mathfrak{R}_n\}$ un réseau de réseaux. On a alors :

$$\llbracket \mathfrak{R}_0 \cup \dots \cup \mathfrak{R}_n \rrbracket = \llbracket \llbracket \mathfrak{R}_0 \rrbracket, \dots, \llbracket \mathfrak{R}_n \rrbracket \rrbracket \quad (3.1)$$

Le résultat est une application immédiate des pull-backs. Soit $\mathfrak{c} \in \llbracket \llbracket \mathfrak{R}_0 \rrbracket, \dots, \llbracket \mathfrak{R}_n \rrbracket \rrbracket$, et son pull-back $\{\llbracket \mathfrak{c}_0 \rrbracket, \dots, \llbracket \mathfrak{c}_n \rrbracket\}$, et les pull-backs $\mathfrak{d}_i$ des $\mathfrak{c}_i$ par les $\mathfrak{R}_i$. On a $\mathfrak{d}_i \subset \mathfrak{R}_i$ et on peut conclure que $\llbracket \mathfrak{d}_0 \cup \dots \cup \mathfrak{d}_n \rrbracket = \mathfrak{c}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{c} \in \llbracket \mathfrak{R}_0 \cup \dots \cup \mathfrak{R}_n \rrbracket$. L'autre sens de même manière similaire.

3.3 Séparation

Le théorème de séparation est une version affine de la séparation en lambda-calcul. Il nous donne donc que $\leq$ est un ordre, et que la topologie associée est donc $\mathcal{T}_0$. Cela nous permet de former un domaine de Scott avec les designs. C'est donc un lien avec les sémantiques dénotationnelles de première génération.

Théorème 7. La relation $\leq$ est un ordre partiel. On peut également le dire ainsi : la topologie est $\mathcal{T}_0$. On a que $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{D}'$ si et seulement si $\mathfrak{D}$ est plus défini que $\mathfrak{D}'$, c'est-à-dire si chaque chronique $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D} - \mathfrak{D}'$ peut être écrite $\mathfrak{c} \star \mathfrak{d}$ pour un certain $\mathfrak{c}'$ tel que $\mathfrak{c}' \star \mathfrak{x} \in \mathfrak{D}'$.

¹Une topologie $\mathcal{T}_0$ est une topologie dans laquelle pour tout couple de points distincts, l'un des deux points au moins a un voisinage qui ne contient pas l'autre.

On suppose que la base est atomique, et on utilisera le temps de la démonstration la notation $\mathcal{D} \ll \mathcal{D}'$ pour dire que $\mathcal{D}$ est plus défini que $\mathcal{D}'$. On fera référence à la condition

$$(\mathfrak{c} \in \mathcal{D} - \mathcal{D}') \wedge (\exists \mathfrak{c}', (\mathfrak{c}' \star \mathfrak{X} \in \mathcal{D}') \wedge (\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' \star \mathfrak{d})) \quad (3.2)$$

par son numéro.

1. Supposons que $\mathcal{D} \ll \mathcal{D}'$. On définit une fonction de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}'$ de la manière suivante : $\phi(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$ quand $\mathfrak{c} \in \mathcal{D}'$, et $\phi(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}' \star \mathfrak{X}$ lorsque $\mathfrak{c}$ vérifie la condition 3.2. On pose $\mathcal{D}'' = \phi(\mathcal{D}')$. alors $\mathcal{D}''$ est un dessein et $\mathcal{D} \ll \mathcal{D}'' \ll \mathcal{D}'$. On va montrer que $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}'' \leq \mathcal{D}'$.

- (a) $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}'$, ce qui signifie en termes de dessins que $\mathcal{D}''$ est obtenu par une restriction des règles négatives de $\mathcal{D}'$, remplaçant les règles $(-, \xi, \mathcal{N})$ par $(-, \xi, \mathcal{N}')$ avec $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$. Si $\mathcal{D}'' \perp \mathfrak{E}$, alors l'ajout de prémisses dans les règles négatives ne modifie pas la convergence, et donc $\mathcal{D}' \perp \mathfrak{E}$.
- (b) $\mathcal{D}''$ est obtenu en remplaçant des sous-dessins de $\mathcal{D}$ par des Daemon. Cela correspond au remplacement de règles positives par des Daemon. Si $\mathcal{D} \perp \mathfrak{E}$, et que la normalisation se retrouve avec l'une de ces règles modifiées comme règle principale, alors le remplacement de cette règle par le Daemon nous assure une convergence plus rapide. On a donc $\mathcal{D}'' \perp \mathfrak{E}$.

2. Supposons que $\mathcal{D} \not\ll \mathcal{D}'$. Cela signifie qu'il existe une chronique $\mathfrak{c}$ ne vérifiant pas la condition 3.2. Si l'on prends $\mathfrak{c}$ de longueur minimale, on obtient $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' \star (\epsilon, \xi, I)$ avec $\mathfrak{c}' \in \mathcal{D}' \cup \{\langle \rangle\}$. Ou bien $\epsilon := -1$, ou $\mathfrak{c}' \star \mathfrak{X} \notin \mathcal{D}'$:
 - i. Si $\epsilon := -1$ alors il y a une unique action positive telle que $\mathfrak{c} \star \kappa \in \mathcal{D}$. Si $\kappa = \mathfrak{X}$ on pose $\mathfrak{E} = \mathfrak{Dpp}_{\mathfrak{c}}$, sinon on pose $\mathfrak{E} = \mathfrak{Dpp}_{\mathfrak{c} \star \kappa}$.
 - ii. Si $\epsilon := +1$, alors il existe $\kappa' \neq \mathfrak{X}$ et $\kappa' \neq (-, \xi, I)$ telle que $\mathfrak{c}' \star \kappa' \in \mathcal{D}'$. On pose $\mathfrak{E} = \mathfrak{Dpp}_{\mathfrak{c}}$.

Les normalisations de $\ll \mathcal{D} | \mathfrak{E} \gg$ et $\ll \mathcal{D}' | \mathfrak{E} \gg$ commencent par la même suite de conversions correspondant aux actions de $\mathfrak{c}'$, jusqu'au moment où l'on arrive à un réseau de coupures d'action principale $(-, \xi, I)$ ou κ' . Dans ce cas, $\ll \mathcal{D} | \mathfrak{E} \gg$ converge, tandis que $\ll \mathcal{D}' | \mathfrak{E} \gg$ diverge. En effet :

- a. Si $\epsilon := -1$ et est suivie de $\kappa = \mathfrak{X}$. Après une conversion entre $(-, \xi, I)$ et son opposée $(+, \xi, I)$, le Daemon de $\mathcal{D}$ fait converger $\ll \mathcal{D} | \mathfrak{E} \gg$. $\ll \mathcal{D}' | \mathfrak{E} \gg$ diverge puisque l'action opposée de $(-, \nu, J)$ — l'action de $\mathcal{D}'$ qui suit $\mathfrak{c}'$ — n'est pas dans $\mathfrak{E}$.
- b. Le même argument nous permet de montrer que $\ll \mathcal{D}' | \mathfrak{E} \gg$ diverge dans le cas où $\epsilon := -1$ et est suivie de $\kappa \neq \mathfrak{X}$. $\ll \mathcal{D} | \mathfrak{E} \gg$ converge à cause du Daemon qui suit $\tilde{\kappa}$ dans $\mathfrak{E}$.
- c. Dans le dernier cas, après une conversion entre $(+, \xi, I)$ et $(-, \xi, I)$, le Daemon de $\mathfrak{E}$ assure la convergence de $\ll \mathcal{D} | \mathfrak{E} \gg$. $\ll \mathcal{D}' | \mathfrak{E} \gg$ diverge parce qu'il n'existe pas dans $\mathfrak{E}$ d'opposée à l'action κ' de $\mathcal{D}'$.

3. Il suffit alors montrer que $\mathcal{D} \lll \mathcal{D}'$ est antisymétrique.

3.4 Le principe de clôture

Ce principe nous dit que nous pouvons nous restreindre à des réseaux clos. En effet, si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont des designs de bases respectivement $\xi \vdash \lambda$ et $\vdash \xi$, la forme normale $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{E} \rrbracket$ est l'unique design $\mathcal{D}'$ de base $\vdash \lambda$ tel que pour tout $\mathcal{F}$ de base $\lambda \vdash$ l'on ai

$$\llbracket \mathcal{D}', \mathcal{F} \rrbracket = \llbracket \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \rrbracket$$

Théorème 8. *Soit $\mathcal{R}$ un réseau de base $\Xi \vdash \Lambda$. La forme normale $\llbracket \mathcal{R} \rrbracket$ de $\mathcal{R}$ est l'unique design $\mathcal{D}$ tel que pour toute famille d'anti-designs $(\mathcal{E}_\sigma)$:*

$$\mathcal{D} \perp (\mathcal{E}_\sigma) \leftrightarrow \llbracket \mathcal{R} \cup \dots \cup \mathcal{E}_\sigma \cup \dots \rrbracket = \mathcal{D} \text{ ai}$$

Le résultat découle de l'associativité et l'unicité est garantie par la séparation.

3.5 Croissance

La croissance est l'équivalent du théorème de continuité syntaxique² du lambda-calcul.

Théorème 9. *La normalisation croît avec l'ordre $\leq$. Si pour tout $0 \leq i \leq n$, $\mathcal{D}_i \leq \mathcal{E}_i$, alors :*

$$\llbracket \mathcal{D}_0, \dots, \mathcal{D}_n \rrbracket \leq \llbracket \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_n \rrbracket \quad (3.3)$$

La preuve est une application du principe de clôture (voir 3.4 p.36). Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}$ de bases $\vdash \Lambda, \xi$ et $\xi \vdash \Xi$, et soit $\mathcal{D}'$ tel que $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}'$. On a alors $\llbracket \mathcal{D}, (\mathcal{E}_\sigma) \rrbracket \leq \llbracket \mathcal{D}', (\mathcal{E}_\sigma) \rrbracket$ pour tout anti-design $\{\mathcal{E}_\sigma | \sigma \in \Xi, \xi\}$. On coupe $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ avec $\mathcal{F}$. Soient les anti-designs $\{\mathcal{E}_\tau | \tau \in \Xi \cup \Lambda\}$ pour $\llbracket \mathcal{F}, \mathcal{D} \rrbracket$. On définit $\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma$ pour $\sigma \in \Xi$ et $\mathcal{E}_\sigma = \llbracket \mathcal{F}, (\mathcal{E}_\sigma) \rrbracket$ pour $\sigma \in \Lambda$.

On obtient alors que $\llbracket \mathcal{D}, (\mathcal{E}_\sigma) \rrbracket \leq \llbracket \mathcal{D}', (\mathcal{E}_\sigma) \rrbracket$.

en utilisant l'associativité, $\llbracket \llbracket \mathcal{F}, \mathcal{D} \rrbracket, (\mathcal{E}_\tau) \rrbracket \leq \llbracket \llbracket \mathcal{F}, \mathcal{D}' \rrbracket, (\mathcal{E}_\tau) \rrbracket$. Et on en déduit que $\llbracket \mathcal{F}, \mathcal{D} \rrbracket \leq \llbracket \mathcal{F}, \mathcal{D}' \rrbracket$.

3.6 Stabilité

La stabilité correspond aux théorème de stabilité syntaxique³ du lambda-calcul, dû à Berry. Il stipule que la fonction des arbres de Böhm, qui associe des termes

²Syntactic continuity theorem, voir [Ama98].

³syntactic stability theorem, voir [Ama98].

partiels du lambda-calcul à des arbres de Böhm partiels, est stable. On a, en lambda-calcul, une propriété plus forte, à savoir que cette fonction est séquentialisable. Nous n'avons pas ce résultat en ludique.

La stabilité correspond à la propriété de *stabilité* dans les espaces cohérents, qui provient de ce théorème. C'est donc le lien avec les sémantiques dénotationnelles de seconde génération.

Théorème 10. *La normalisation commute avec les intersections compatibles. Si K est non-vide et $\forall k \in K, \mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{R}$, alors on a :*

$$\llbracket \bigcap_{k \in K} \mathfrak{R}_k \rrbracket = \bigcap_{k \in K} \llbracket \mathfrak{R}_k \rrbracket \quad (3.4)$$

L'inclusion $\llbracket \bigcap_k \mathfrak{R}_k \rrbracket \subset \bigcap_k \llbracket \mathfrak{R}_k \rrbracket$ est immédiate. Réciproquement, supposons que $c \in \bigcap_k \llbracket \mathfrak{R}_k \rrbracket$. Alors c a un pull-back $t_k \subset \mathfrak{R}_k$. Mais $t_k \subset \mathfrak{R}$ et par unicité du pull-back t de c par rapport à $\mathfrak{R}$, on obtient $t_k = t_{k'} = t$ pour tout $(k, k') \in K^2$. On a donc $t \subset \bigcap_k \mathfrak{R}_k$ et $c \in \llbracket \bigcap_k \mathfrak{R}_k \rrbracket$.

Chapitre 4

Les connecteurs

Comme nous l'avons expliqué brièvement dans l'introduction, les designs sont des objets, qui représentent des preuves, ou des stratégies de recherche de preuves. Nous allons maintenant introduire de nouveaux objets, les *comportements*, qui représentent des formules, ou des types. Nous dirons ensuite un mot sur la délocalisation, qui est un outil nécessaire pour pouvoir retrouver les connecteurs habituels (spirituels), puis nous introduirons les connecteurs additifs et multiplicatifs, et nous dirons un mot sur les quantificateurs.

4.1 Comportements

4.1.1 Définition

Définition 27. Un comportement est un ensemble $\mathbf{G}$ de designs de même base égal à son bi-orthogonal $\mathbf{G}^{\perp\perp}$. Il sera dit négatif ou positif suivant la polarité de sa base.

On peut définir le plus petit comportement contenant un design $\mathfrak{D}$, le comportement $\mathfrak{D}^{\perp\perp}$. Le comportement *principal* est donné par $\mathfrak{D}^{\perp\perp} = \{\mathfrak{D}' \mid \mathfrak{D} \leq \mathfrak{D}'\}$.

Théorème 11. Si $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{E}$ et $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$ alors $\mathfrak{E} \in \mathbf{G}$.

Si K est non-vide et $\forall k \in K, \mathfrak{D}_k \in \mathbf{G}$, et si $\bigcup_k \mathfrak{D}_k$ est un design, alors $\bigcap_k \mathfrak{D}_k \in \mathbf{G}$.

Preuve : immédiat d'après stabilité + définition de $\leq$ (voir 3.1 p.33).

4.1.2 Les comportements principaux

Il existe des designs importants (voir 2.3 p.24), mais également des comportements bien particuliers dont nous nous servirons par la suite. En voilà la liste :

Sconse ($\top^\epsilon$) : C'est l'ensemble des designs d'une base donnée, égal à $\emptyset^\perp$. ϵ est la polarité de la base.

Daemon ($\{\mathcal{D}\alpha i^\epsilon\}$) : C'est le plus petit des comportements, égal à $\emptyset^{\perp\perp}$. On le note $\mathbf{0}^\epsilon$.

Bottom ($\perp$) : C'est un comportement négatif, défini par $\perp = \mathcal{B}ot^{\perp\perp}$.

Un ($\mathbf{1}$) : C'est un comportement positif, défini par $\mathbf{1} = \mathcal{D}ne^{\perp\perp}$.

4.1.3 Incarnation

Théorème 12. *Soit $\mathcal{E} \in \mathbf{G}$. Il existe un plus petit design $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{D} \in \mathbf{G}$.*

C'est presque immédiat. On prend l'ensemble des designs de $\mathbf{G}$ inclus dans $\mathcal{E}$. Cet ensemble est non-vidé — puisqu'il contient $\mathcal{E}$ lui-même, et son union est un design (égal à $\mathcal{E}$). Le théorème 11 nous permet alors de dire que l'intersection $\mathcal{D}$ de cette famille est un design appartenant à $\mathbf{G}$.

Définition 28. *Le design défini par le théorème 12 est appelé l'incarnation de $\mathcal{E}$ et sera noté $|\mathcal{E}|_{\mathbf{G}}$ (on écrira $|\mathcal{E}|$ lorsque le contexte sera clair). On a*

$$|\mathcal{E}|_{\mathbf{G}} = \bigcap \{ \mathcal{E}' \mid (\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}) \wedge (\mathcal{E}' \in \mathbf{G}) \}$$

Un design est dit incarné ou matériel lorsque $\mathcal{D} = |\mathcal{D}|$. On appellera l'incarnation de $\mathbf{G}$ l'ensemble de ses designs matériels.

Les designs matériels sont la partie d'un comportement qui est réellement intéressante. C'est la partie que l'on peut observer par un test. En effet, si l'on considère un design $\mathcal{D} \in \mathbf{G}$ matériel et un design $\mathcal{D}'$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$. Alors $\mathcal{D}' \in \mathbf{G}$. Mais $\mathcal{D}'$ est dans $\mathbf{G}$ pour de mauvaises raisons puisque les actions de $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$ ne seront peut-être jamais utilisées : un test qui accéderait aux actions de $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$ divergerait contre $\mathcal{D}$.

Définition 29. *On appelle une éthique un ensemble $\mathbf{E}$ de designs de même base. Si $\mathbf{E}^{\perp\perp} = \mathbf{G}$ on dit que $\mathbf{E}$ est une éthique pour $\mathbf{G}$. Une éthique est complète lorsqu'elle contient l'incarnation de son bi-orthogonal, c'est-à-dire lorsque $|\mathbf{E}^{\perp\perp}| \subset \mathbf{E}$.*

Remarque 6. *La complétude de l'éthique est un résultat de complétude interne¹.*

¹Voir 5.4.1 p.56.

4.1.4 Comportements et jeux

La différence entre la ludique et les sémantiques de jeu est l'absence d'arbitre. Dans la ludique, les jeux que nous considérons sont des jeux par *consensus*, sans règles externes. Voici la traduction d'un réseaux clos $\llbracket \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \rrbracket$ en termes de sémantique de jeu :

Joueurs : Il y a deux joueurs, *Proposant* (positif) et *Opposant* (négatif).

Parties : Une partie est la séquence de conversions effectuées lors de la normalisation de $\ll \mathfrak{D} | \mathfrak{E} \gg$, ce que l'on a appelé une dispute (22 p.30).

Stratégies : $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ représentent des stratégies pour Proposant et Opposant.

Gagnant : La définition est donnée plus loin (Définition 63 p.57).

Abandon : Si l'un des joueurs joue un Daemon, il abandonne, et perd. L'une des conditions de gain est d'ailleurs de ne jamais jouer le Daemon.

Règles : Les règles sont données par $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}^\perp$. En effet, $\mathbf{G}$ est la règle du jeu $\mathbf{G}^\perp$ et $\mathbf{G}^\perp$ est la règle du jeu $\mathbf{G}$.

4.2 Locatif/Spirituel

4.2.1 Un petit mot

Comme nous l'avons vu plus haut la ludique prends en compte les adresses, les *lieux* où se trouvent les formules. C'est l'un des points où la ludique s'éloigne vraiment des logiques habituelles, et cela a certaines conséquences. Ainsi, nous allons définir des connecteurs locatifs, qui agissent sur les designs directement, mais ne sont pas des connecteurs totaux. Afin de retrouver les connecteurs habituels — et par conséquent totaux, nous devons considérer des connecteurs spirituels, agissant sur les designs *via* délocalisation. Pour cela il est nécessaire de définir ce qu'est une délocalisation. Nous verrons cependant qu'il subsiste quelques problèmes, en particulier avec la constante $\mathbf{1}$ ⁽²⁾.

4.2.2 Délocalisations

Définition 30. Une délocalisation du locus ξ au locus ξ' est une application injective partielle θ des subloci de ξ aux subloci de ξ' telle que :

1. $\theta(\xi) = \xi'$
2. Pour tout σ il existe une fonction θ_σ de biais à biais telle que $\theta(\sigma \star i) = \theta(\sigma) \star \theta_\sigma(i)$.

²Voir 4.4.1 p.48.

Une délocalisation est positive lorsque les deux loci ξ et ξ' ont la même parité, et négative sinon. Si $\mathfrak{c} = \langle \dots, (\sigma_p, I_p), \dots \rangle$ est une chronique propre (ne terminant pas par un Daemon) de base $\vdash \xi$, on définit $\theta(\mathfrak{c})$ de base $\vdash \xi'$ par $\theta(\mathfrak{c}) = \langle \dots, (\theta(\sigma_p), \theta_{\sigma_p}(I_p)), \dots \rangle$. Si $\mathfrak{c}$ est impropre et se termine par un Daemon, c'est-à-dire $\mathfrak{c} = \mathfrak{d} \star \mathfrak{H}$, on définit $\theta(\mathfrak{d} \star \mathfrak{H}) = \theta(\mathfrak{d}) \star \mathfrak{H}$.

Si $\mathfrak{D}$ est un design de base $\vdash \xi$ (resp. $\xi \vdash$) on définit $\theta(\mathfrak{D}) = \{\theta(\mathfrak{c}) | \mathfrak{c} \in \mathfrak{D}\}$ un design de base $\vdash \xi'$ (resp. $\xi' \vdash$).

Exemple 6. Voici deux délocalisations de $\langle \rangle$ sur lui-même :

$$\begin{aligned}\varphi(i \star \sigma) &= 3i \star \sigma \\ \psi(i \star \sigma) &= (3i + 1) \star \sigma\end{aligned}$$

Définition 31. Si $\mathbf{G}$ est un comportement de base $\vdash \xi$ (resp. $\xi \vdash$), et θ est une délocalisation totale de ξ sur ξ' , on définit le comportement $\theta(\mathbf{G})$ de base $\vdash \xi'$ (resp. $\xi' \vdash$) de la manière suivante :

$$\theta(\mathbf{G}) = \{\theta(\mathfrak{D}) | \mathfrak{D} \in \mathbf{G}\}^{\perp\perp}$$

Proposition 13. Les designs matériels de $\theta(\mathbf{G})$ sont exactement les images des designs matériels de $\mathbf{G}$.

Corollaire 13.1. L'image de $\mathbf{G}$ par θ est une éthique complète pour $\theta(\mathbf{G})$.

4.2.3 Axiome Identité

La forme générale de l'axiome identité est un "axiome de délocalisation", qui correspond à une sorte de $\mathfrak{Iax}$. Supposons que θ, η soient des délocalisations de $\langle \rangle$ sur ξ, ξ' disjoints. On veut définir $\mathfrak{Iax}_{\xi, \xi'}^{\theta, \eta}$, un design de base $\xi \vdash \xi'$ avec les propriétés suivantes pour tous $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ de bases $\vdash \langle \rangle$ et $\langle \rangle \vdash$:

$$\begin{aligned}\llbracket \theta(\mathfrak{D}), \mathfrak{Iax}_{\xi, \xi'}^{\theta, \eta} \rrbracket &= \eta(\mathfrak{D}) \\ \llbracket \eta(\mathfrak{E}), \mathfrak{Iax}_{\xi, \xi'}^{\theta, \eta} \rrbracket &= \theta(\mathfrak{E})\end{aligned}$$

La solution est donnée par :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \mathfrak{Iax}_{\xi' \star \eta(i), \xi \star \theta(i)}^{\theta, \eta} \\ \dots \quad \xi' \star \eta(i) \vdash \xi \star \theta(i) \quad \dots \end{array}}{\vdash \xi', \xi \star \theta(I)} \xrightarrow{(\xi', \eta(I))} \dots \xrightarrow{(\xi, \theta(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}))} \xi \vdash \xi'$$

Des designs de ce genre apparaîtront dans les séquents de comportements $\theta(\mathbf{G}) \vdash \eta(\mathbf{G})$.

4.2.4 Shifts

Le shift de la ludique, tout comme celui introduit dans 1.2.2 page 10, se contente de changer la polarité. Le shift introduit pour le typage des formules positives et négatives n'effectuait aucune réelle opération sur les formules, mais le shift ludique ajoutera des actions inutiles puisque la polarité d'un design dépend de la polarité de la base. Il s'agit donc d'un changement de polarité effectif.

Définition 32. Soit c une chronique de base $\vdash \Lambda, \xi \star i$ (resp. $\xi \star i \vdash \Lambda$). Le shift $\uparrow c$ de c est la chronique $(-, \xi, \{i\}) \star c$ de base $\xi \vdash \Lambda$ (resp. $(+, \xi, \{i\}) \star c$ de base $\vdash \xi, \Lambda$). Si $\mathcal{D}$ est un design de base $\vdash \Lambda, \xi \star i$ (resp. $\xi \star i \vdash \Lambda$), le shift de $\mathcal{D}$ est le design $\uparrow \mathcal{D} = \{\uparrow c \mid c \in \mathcal{D}\}$ de base $\xi \vdash \Lambda$ (resp. $\vdash \xi, \Lambda$).

Si $\mathbf{G}$ est un comportement de base $\vdash \xi \star i$ (resp. $\xi \star i \vdash$), le shift de $\mathbf{G}$ est le comportement $\uparrow \mathbf{G} = \{\uparrow \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \in \mathbf{G}\}^{\perp\perp}$ de base $\xi \vdash$ (resp. $\vdash \xi$).

Un comportement premier est un comportement de la forme $\uparrow \mathbf{G}$.

On remplacera $\uparrow$ par $\downarrow$ (ou $\downarrow$) quand le shift est négatif (ou positif).

Proposition 14. Si $\mathbf{G}$ est négatif, alors $\downarrow \mathbf{G} = \{\downarrow \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \in \mathbf{G}\} \cup \{\mathbf{X}\}$.

Si $\mathbf{G}$ est positif, alors $\{\uparrow \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \in \mathbf{G}\}$ est une éthique complète pour $\uparrow \mathbf{G}$.

De plus, $(\uparrow \mathbf{G})^\perp = \uparrow(\mathbf{G}^\perp)$.

4.3 Connecteurs additifs

4.3.1 Additifs localisés

Remarque 7. Nous avons défini dans la section 2.3 page 24 le design $\mathfrak{Ram}_{(\lambda, I)}$. Ces designs sont les designs propres maximaux de base $\vdash \Lambda$. Nous rappelons sa forme de dessin :

$$\frac{\dots \frac{\dots \frac{\vdash \lambda \star i \star J}{\vdash \Lambda} \star \dots}{\vdash \Lambda} \dots}{\vdash \Lambda} \dots \quad \begin{matrix} \star \\ (-, \lambda \star i, \mathcal{P}_f(\mathbb{N})) \end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix} \star \\ (+, \lambda, I) \end{matrix}$$

Définition 33. Un répertoire est un ensemble $\mathcal{N}$ de ramifications. Si $\mathbf{G}$ est un comportement positif, le répertoire de $\mathbf{G}$ est l'ensemble $\mathbb{I}\mathbf{G} = \{I \mid \mathfrak{Ram}_{(\langle \rangle, I)} \in \mathbf{G}\}$. Si $\mathbf{G}$ est un comportement négatif, l'incarnation $|\mathcal{D} \mathfrak{ai}^-|_{\mathbf{G}}$ du Daemon négatif est de la forme $\text{Dir}_{\mathcal{N}}$ pour un répertoire $\mathcal{N}$, qui est par définition le répertoire de $\mathbf{G}$, c'est-à-dire $|\mathcal{D} \mathfrak{ai}^-|_{\mathbf{G}} = \text{Dir}_{\mathbb{I}\mathbf{G}}$.

Un réservoir est un ensemble quelconque de biais. Le réservoir d'un comportement est défini par $\S \mathbf{G} = \bigcup \mathbb{I}\mathbf{G}$.

Proposition 15. Si $\mathbf{G}$ est positif, alors $\mathbb{I}\mathbf{G}$ est constitué des I tels que $(\langle \rangle, I)$ soit la première action d'un design $\mathcal{D} \in \mathbf{G}$. De plus, $\mathbb{I}\mathbf{G}^\perp = \mathbb{I}\mathbf{G}$.

On montre ce résultat ainsi :

Si $(\langle \rangle, I)$ est la première action de $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$, alors $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{Ram}_{(\langle \rangle, I)}$ et $\mathfrak{Ram}_{(\langle \rangle, I)} \in \mathbf{G}$. L'incarnation de $\mathfrak{D} \mathfrak{a} \mathfrak{i}^-$ dans $\mathbf{G}^\perp$ est de la forme $\mathfrak{Dir}_N$, et il est immédiat que $I \in \mathcal{N}$ exactement lorsque $(\langle \rangle, I)$ est la première action d'un quelconque $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$.

Définition 34. Soit $\mathbf{G}_k$ une famille de comportements de même base. On définit alors $\bigcap_k \mathbf{G}_k$ comme l'intersection des $\mathbf{G}_k$. On utilisera les notations $\mathfrak{F} \sqcap$ et $\mathfrak{F} \sqcap$ selon la polarité des $\mathbf{G}_k$.

Proposition 16. Le connecteur $\sqcap$ est strictement commutatif et associatif. Son élément neutre est l'intersection vide, à savoir le sconse $\top^\epsilon$, et son élément absorbant est le plus petit comportement négatif, le Daemon $\mathbf{0}^\epsilon$.

Définition 35. Soit $\mathbf{G}_k$ une famille de comportements. On définit $\biguplus_k \mathbf{G}_k = (\bigcup_k \mathbf{G}_k)^{\perp\perp}$.

Proposition 17. Le connecteur $\biguplus$ est strictement commutatif et associatif. Son élément neutre est le Daemon $\mathbf{0}^\epsilon$ et son élément absorbant est le sconse $\top^\epsilon$.

Théorème 18.

$$|\mathfrak{D}|_{\bigcap_k \mathbf{G}_k} = \bigcup_k |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}_k}$$

En effet, soit $\mathfrak{D}' = |\mathfrak{D}|_{\bigcap_k \mathbf{G}_k}$ et $\mathfrak{D}'' = \bigcup_k |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}_k}$. L'inclusion $\mathfrak{D}'' \subset \mathfrak{D}'$ est immédiate en utilisant la contravariance de l'incarnation. Inversement, comme $\mathfrak{D}''$ est orthogonal à tous les designs dans l'éthique $\bigcup_k \mathbf{G}_k^\perp$, il est dans $\bigcap_k \mathbf{G}_k$. Mais comme $\mathfrak{D}'$ est matériel, on obtient l'égalité.

Proposition 19.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathfrak{F} \sqcap)_k \mathbf{G}_k &= \bigcap_k \mathfrak{F} \mathbf{G}_k \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{F} \biguplus)_k \mathbf{G}_k &= \bigcup_k \mathfrak{F} \mathbf{G}_k \end{aligned}$$

Corollaire 19.1.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathfrak{F} \sqcap)_k \mathbf{G}_k &= \bigcup_k \mathfrak{F} \mathbf{G}_k \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{F} \biguplus)_k \mathbf{G}_k &= \bigcap_k \mathfrak{F} \mathbf{G}_k \end{aligned}$$

4.4 Connecteurs multiplicatifs

4.4.1 Multiplicatifs localisés

Dans cette section, nous allons présenter trois tenseurs — quatre si l'on considère le symétrique du premier tenseur, qui est non-commutatif. La présentation

des tenseurs se fera de la même manière à chaque fois : définition, suivie de la définition (et démonstration d'existence) d'adjonctions, la démonstration de quelques égalités, et l'extension de la définition aux comportements. Nous passerons quelques démonstrations pour les deux derniers tenseurs, les résultats étant presque similaires que pour le premier.

Un tenseur non-commutatif

Définition 36. On définit le produit tensoriel $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ des designs positifs $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$:

1. Si $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ est égal à $\mathfrak{D}ai$, on a $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} = \mathfrak{D}ai$.
2. Sinon, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ont pour première action $(\langle \rangle, I)$ et $(\langle \rangle, J)$ respectivement. On remplace dans chaque chronique de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ la première action par $(\langle \rangle, I \cup J)$ afin d'obtenir $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$. $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ est alors le sous-ensemble de $\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{B}'$ consistant en toute les chroniques de $\mathfrak{B}'$, et les chroniques de $\mathfrak{A}'$ dont la seconde action (i, I') est telle que $i \notin J$.

On remarque immédiatement que ce produit tensoriel n'est pas commutatif. On peut donc définir un second produit tensoriel non-commutatif, son symétrique : $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} := \mathfrak{E} \otimes \mathfrak{D}$. Les résultats pour ce tenseur sont sensiblement les mêmes que pour $\otimes$.

Théorème 20. Soient $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ des designs. $\mathfrak{F}$ est négatif, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont positifs. Alors il existe deux designs négatifs $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]$ ne dépendant pas de $\mathfrak{B}$ et $[\mathfrak{B}]\mathfrak{F}$ ne dépendant pas de $\mathfrak{A}$ tels que :

$$\ll \mathfrak{F} | \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \gg = \ll \mathfrak{F}[\mathfrak{A}] | \mathfrak{B} \gg = \ll \mathfrak{A} | [\mathfrak{B}]\mathfrak{F} \gg$$

L'unicité est une conséquence du théorème de séparation 34.

Remarquons que $\mathfrak{F}[\mathfrak{D}ai] = [\mathfrak{D}ai]\mathfrak{F} = \mathfrak{D}ai^-$ suffit à satisfaire l'équation si $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ au moins est un Daemon. Il nous reste donc à construire $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]$ et $[\mathfrak{B}]\mathfrak{F}$ dans le cas où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ont pour premières actions $(\langle \rangle, I)$ et $(\langle \rangle, J)$. Pour $i \in I$ (resp. $j \in J$) on définit $\mathfrak{A}_i$ (resp. $\mathfrak{B}_j$ comme le sous-design de $\mathfrak{A}$ (resp. de $\mathfrak{B}$) dont la base est $i \vdash$ (resp. $\vdash j$). Pour $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, on pose $\mathfrak{F}_I$ le sous-design de $\mathfrak{F}$ dont la base est $\vdash I$ en posant $\mathfrak{F}_I = \mathfrak{F}id$ lorsque la prémisse $\vdash I$ n'est pas dans $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]$ et $[\mathfrak{B}]\mathfrak{F}$ seront définis par leurs sous-designs $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]_K$ et $[\mathfrak{B}]\mathfrak{F}_K$ de base $\vdash K$ pour chaque ramification K (cette fois encore, ces sous-designs seront peut-être absents).

$\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]$ On forme un réseau de coupures entre $\mathfrak{F}_{I \cup K}$ et, les $\mathfrak{A}_i$ dans $I - K$. Ce réseau est de base $\vdash K$ et sa forme normale, partielle ou totale, est égale à $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]_K$. L'équation $\ll \mathfrak{F} | \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \gg = \ll \mathfrak{F}[\mathfrak{A}] | \mathfrak{B} \gg$ vient de la construction de $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]_J$ et la définition de la normalisation.

$[\mathfrak{B}]\mathfrak{F}$ On forme un réseau de coupures entre $\mathfrak{F}_{J \cup K}$ et les $\mathfrak{B}_j$ dans J . Sa base est $\vdash K - J$, et sa forme normale, partielle ou totale, définit $[\mathfrak{B}]\mathfrak{F}_K$ si l'on change l'action initiale de toute chronique $(\langle \rangle, K - J)$ par $(\langle \rangle, K)$ afin de changer la base en $\vdash K$. L'équation $\ll \mathfrak{F}|\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \gg = \ll \mathfrak{A}||[\mathfrak{B}]\mathfrak{F} \gg$ provient de la construction de $[\mathfrak{B}]\mathfrak{F}_I$ et de la définition de la normalisation.

On a alors :

Proposition 21. *L'opération $\otimes$ est associative et son élément neutre est $\mathfrak{U}_n$.*

Corollaire 21.1. *$\mathfrak{F} \perp \mathfrak{A}$ si et seulement si la chronique $\langle (\langle \rangle, \emptyset) \rangle$ appartient à $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]$.*

Le résultat est identique en remplaçant $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]$ par $[\mathfrak{A}]\mathfrak{F}$.

Il vient de l'égalité

$$\ll \mathfrak{F}|\mathfrak{A} \gg = \ll \mathfrak{F}|\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{U}_n \gg = \ll \mathfrak{F}[\mathfrak{A}]|\mathfrak{U}_n \gg$$

Corollaire 21.2.

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{A}][\mathfrak{B}] = \mathfrak{F}[\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}] \quad (4.1)$$

$$[\mathfrak{A}][\mathfrak{B}]\mathfrak{F} = [\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}]\mathfrak{F} \quad (4.2)$$

$$[\mathfrak{B}](\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]) = ([\mathfrak{B}]\mathfrak{F})[\mathfrak{A}] \quad (4.3)$$

Par exemple, la dernière égalité se démontre ainsi :

$$\ll [\mathfrak{B}](\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]|\mathfrak{C}) \gg = \ll \mathfrak{F}|\mathfrak{A} \otimes (\mathfrak{C} \otimes \mathfrak{B}) \gg = \ll \mathfrak{F}|\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{B} \gg = \ll ([\mathfrak{B}]\mathfrak{F})[\mathfrak{A}]|\mathfrak{C} \gg$$

Définition 37. *Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont des comportements positifs, on définit :*

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} | \mathfrak{A} \in \mathbf{G}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}\}^{\perp\perp}$$

Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont des comportements négatifs, on définit :

$$\mathbf{G} \ltimes \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} | \mathfrak{A} \in \mathbf{G}^\perp, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}^\perp\}^\perp$$

Proposition 22. *Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ deux comportements négatifs, on a :*

$$\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \ltimes \mathbf{H} \leftrightarrow \forall \mathfrak{A} (\mathfrak{A} \in \mathbf{G}^\perp \rightarrow \mathfrak{F}[\mathfrak{A}] \in \mathbf{H})$$

$$\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \ltimes \mathbf{H} \leftrightarrow \forall \mathfrak{B} (\mathfrak{B} \in \mathbf{H}^\perp \rightarrow [\mathfrak{B}]\mathfrak{F} \in \mathbf{G})$$

Théorème 23. *Le connecteur $\otimes$ est strictement associatif, son élément neutre est 1 et son élément absorbant 0 . Il distribue sur le connecteur locatif $\uplus$.*

Le connecteur $\ltimes$ est strictement associatif, d'élément neutre $\perp$ et d'élément absorbant $\top$. Il distribue sur l'intersection $\cap$.

On prouve le résultat pour $\ltimes$, ce qui est suffisant par dualité.

On a : $\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \ltimes (\mathbf{G}' \ltimes \mathbf{G}'')$ si et seulement si tout $\mathfrak{A} \in \mathbf{G}^\perp$, $\mathfrak{A}'' \in \mathbf{G}''^\perp$, $[\mathfrak{A}''](\mathfrak{F}[\mathfrak{A}]) \in \mathbf{G}'$, et $\mathfrak{F} \in (\mathbf{G} \ltimes \mathbf{G}') \ltimes \mathbf{G}''$ si et seulement si tout $\mathfrak{A} \in \mathbf{G}^\perp$, $\mathfrak{A}'' \in \mathbf{G}''^\perp$, $([\mathfrak{A}'']\mathfrak{F})[\mathfrak{A}] \in \mathbf{G}'$. L'associativité est donc une conséquence immédiate de l'équation 4.3.

De plus, $\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \ltimes \bigcap_k \mathbf{H}_k$ si et seulement si pour tout $\mathfrak{A} \in \mathbf{G}^\perp$, $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}] \in \bigcap_k \mathbf{H}_k$, donc $\mathfrak{F}[\mathfrak{A}] \in \mathbf{H}_k$, d'où on déduit la distributivité à droite. La distributivité à gauche se montre de manière équivalente en utilisant $[\mathfrak{A}]\mathfrak{F}$.

Un tenseur commutatif

Définition 38. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux designs positifs. On définit le produit tensoriel $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$ de la manière suivante :

1. Si $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ est un Daemon, $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} = \mathfrak{Dai}$.
2. Sinon, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ont pour actions initiales $(\langle \rangle, I)$ et $(\langle \rangle, J)$. Si $I \cap J \neq \emptyset$, on pose $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} = \mathfrak{Dai}$. Sinon, on a $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

Théorème 24. Soient $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ des designs, $\mathfrak{F}$ négatif, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ positifs. alors il existe un unique design $(\mathfrak{F})\mathfrak{A}$ ne dépendant pas de $\mathfrak{B}$ tel que

$$\ll \mathfrak{F} | \mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} \gg = \ll (\mathfrak{F})\mathfrak{A} | \mathfrak{B} \gg$$

La preuve est la même que pour le théorème 20 page 44 :

$I \cap J = \emptyset$: On pose $(\mathfrak{F})\mathfrak{A}_K = \mathfrak{F}[\mathfrak{A}]_K = [\mathfrak{A}]\mathfrak{F}_K$.

$I \cap J \neq \emptyset$: On pose $(\mathfrak{F})\mathfrak{A}_K = \mathfrak{Dai}$.

Proposition 25. L'opération $\odot$ est commutative, associative, et son élément neutre est égal à $\mathfrak{A}_n$.

Corollaire 25.1. $\mathfrak{F} \perp \mathfrak{A}$ si et seulement si la chronique $\langle (\langle \rangle, \emptyset) \rangle$ appartient à $(\mathfrak{F})\mathfrak{A}$.

Corollaire 25.2.

$$((\mathfrak{F})\mathfrak{A})\mathfrak{B} = ((\mathfrak{F})\mathfrak{B})\mathfrak{A} = (\mathfrak{F})\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} = (\mathfrak{F})\mathfrak{B} \odot \mathfrak{A}$$

Définition 39. Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ des comportements positifs. On définit :

$$\mathbf{G} \odot \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} | \mathfrak{A} \in \mathbf{G}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}\}^{\perp\perp}$$

Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ des comportements négatifs, on définit :

$$\mathbf{G} \bowtie \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} | \mathfrak{A} \in \mathbf{G}^{\perp}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}^{\perp}\}^{\perp}$$

Proposition 26. Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ des comportements négatifs. On a :

$$\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \bowtie \mathbf{H} \leftrightarrow \forall \mathfrak{A} (\mathfrak{A} \in \mathbf{G}^{\perp} \rightarrow (\mathfrak{F})\mathfrak{A} \in \mathbf{H})$$

$$\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \bowtie \mathbf{H} \leftrightarrow \forall \mathfrak{B} (\mathfrak{B} \in \mathbf{H}^{\perp} \rightarrow (\mathfrak{F})\mathfrak{B} \in \mathbf{G})$$

Théorème 27. Le connecteur $\odot$ est strictement commutatif, associatif, d'élément neutre $\mathbf{1}$ et absorbant $\mathbf{0}$. Il distribue sur l'union locale $\uplus$.

Un autre tenseur commutatif

Définition 40. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ des designs positifs. On définit le produit tensoriel $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ par :

1. Si $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ est égal au Daemon, on définit $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} = \mathfrak{D}_{ai}$.
2. Sinon, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ont pour première action $(\langle \rangle, I)$ et $(\langle \rangle, J)$. On remplace dans chaque chronique de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ les actions $(\langle \rangle, I)$ et $(\langle \rangle, J)$ par $(\langle \rangle, I \cup J)$, afin d'obtenir $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$. $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ est le sous-ensemble de $\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{B}'$ comprenant :
 - a. Les chroniques de $\mathfrak{A}'$ dont la seconde action (i, I') est telle que $i \notin J$.
 - b. Les chroniques de $\mathfrak{B}'$ dont la seconde action (j, J') est telle que $j \notin I$.

Définition 41. Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ des comportements positifs. On définit :

$$\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \in \mathbf{G}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}\}^{\perp\perp}$$

Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ des comportements négatifs, on définit :

$$\mathbf{G} \infty \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \in \mathbf{G}^{\perp}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}^{\perp}\}^{\perp}$$

Nous avons, comme pour les autres tenseurs, une adjonction (commutative, comme dans le cas de $\odot$), que nous noterons $\{\mathfrak{F}\}\mathfrak{A}$. On obtient alors le théorème suivant :

Proposition 28. Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ des comportements négatifs. On a :

$$\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \infty \mathbf{H} \leftrightarrow \forall \mathfrak{A} (\mathfrak{A} \in \mathbf{G}^{\perp} \rightarrow \{\mathfrak{F}\}\mathfrak{A} \in \mathbf{H})$$

$$\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \infty \mathbf{H} \leftrightarrow \forall \mathfrak{B} (\mathfrak{B} \in \mathbf{H}^{\perp} \rightarrow \{\mathfrak{F}\}\mathfrak{B} \in \mathbf{G})$$

Théorème 29. Inclusions.

$$\mathbf{G} \odot \mathbf{H} \subset \mathbf{G} \otimes \mathbf{H} \subset \mathbf{G} \oplus \mathbf{H}$$

$$\mathbf{G} \infty \mathbf{H} \subset \mathbf{G} \bowtie \mathbf{H} \subset \mathbf{G} \bowtie \mathbf{H}$$

Preuve. A partir de $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$.

Proposition 30.

$$\mathbb{Q}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) = \mathbb{Q}\mathbf{G} \bowtie \mathbb{Q}\mathbf{H}$$

$$\mathbb{Q}(\mathbf{G} \oplus \mathbf{H}) = \mathbb{Q}\mathbf{G} \bowtie \mathbb{Q}\mathbf{H}$$

$$\mathbb{Q}(\mathbf{G} \odot \mathbf{H}) = \{I \cup J \mid I \in \mathbb{Q}\mathbf{G}, J \in \mathbb{Q}\mathbf{H}, I \cap J = \emptyset\}$$

Définition 42. Deux comportements $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ de même polarité sont étrangers lorsque leurs réservoirs³ ont une intersection vide : $\S \mathbf{G} \cap \S \mathbf{H} = \emptyset$.

Remarque 8. Pour deux comportements étrangers, les quatre connecteurs multiplicatifs sont équivalents.

³Définition 33 p.42.

Sur la constante 1

Il faut remarquer que la constante **1** pose problème. En effet, l'extranéité n'implique pas nécessairement la disjonction — c'est-à-dire $\S \mathbf{G} \cap \S \mathbf{H} = \emptyset \rightarrow \llbracket \mathbf{G} \cap \mathbf{H} \rrbracket = \emptyset$, à cause de la ramification vide. Le comportement **1** pose donc un problème, puisqu'il est étranger à lui-même mais n'est pas disjoint avec lui-même. **1** ne pourra pas être traité comme une formule usuelle car $\varphi(\mathbf{1}) \oplus \psi(\mathbf{1})$ n'est pas défini pour des délocalisations φ, ψ .

Nous n'aurons donc pas d'élément neutre multiplicatif. Cela ne posera pas trop de problème pour la définition des booléens — que l'on ne peut évidemment plus définir par $\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$ — puisque nous pourrions prendre $\varphi(\mathbf{U}) \oplus \psi(\mathbf{U})$, où $\mathbf{U} = \Downarrow \mathbf{1}$.

4.4.2 Séquents de comportements

Définition 43. Soit $\Xi \vdash \Lambda$ une fourchette et Ξ et Λ des comportements positifs $\mathbf{G}_\sigma$ de bases respectives $\vdash \sigma$ pour $\sigma \in \Xi, \Lambda$. On définit le comportement $\Xi \vdash \Lambda$ de base $\Xi \vdash \Lambda$ comme l'ensemble des familles $(\mathfrak{G}_\sigma)$ des designs $\mathfrak{G}_\sigma \in \mathbf{G}_\sigma$ pour $\sigma \in \Xi$ (resp. $\mathfrak{G}_\sigma \in \mathbf{G}_\sigma^\perp$ pour $\sigma \in \Lambda$).

Théorème 31. On a :

1. Le séquent de comportements $\vdash$ est égal à $\mathbf{0} = \{\Downarrow \mathbf{1}\}$, le seul comportement de base $\vdash$.
2. Le séquent de comportements $\vdash \mathbf{G}$ est égal à $\mathbf{G}$.
3. Le séquent de comportements $\mathbf{G} \vdash$ est égal à $\mathbf{G}^\perp$.
4. $\Downarrow \in \mathbf{G} \vdash \Lambda$ si et seulement si pour tout $\mathfrak{G} \in \mathbf{G}$, $\llbracket \Downarrow, \mathfrak{G} \rrbracket \in \vdash \Lambda$.
5. $\Downarrow \in \Xi \vdash \mathbf{G}, \Lambda$ si et seulement si pour tout $\mathfrak{G} \in \mathbf{G}^\perp$, $\llbracket \Downarrow, \mathfrak{G} \rrbracket \in \Xi \vdash \Lambda$.

4.5 Les quantificateurs

4.5.1 Définitions

Définition 44. Soit $\mathbf{G}_d$ une famille de comportements de même polarité, indexée par un ensemble $\mathbb{D}$ de cardinalité quelconque. On définit $\forall d \in \mathbb{D} \mathbf{G}_d$ comme l'intersection $\bigcap_{d \in \mathbb{D}} \mathbf{G}_d$.

L'ensemble $\mathbb{D}$ peut être de cardinalité quelconque, par exemple 0 — ce qui donnerait $\top^\epsilon$, ou $\aleph_0$ — quantification du premier ordre, ou encore $2^{\aleph_0}$ — une quantification du second ordre.

Définition 45. Soit $\mathbf{G}_d$ une famille de comportements de même polarité, indexée par un ensemble $\mathbb{D}$ de cardinalité quelconque. On définit $\exists d \in \mathbb{D} \mathbf{G}_d$ par $(\bigcup_{d \in \mathbb{D}} \mathbf{G}_d)^{\perp\perp}$.

4.5.2 Résultats de commutations

Théorème 32. $\forall d$ commute avec toutes les opérations.

Commutations de $\forall$

$$\begin{array}{ll} \forall d \downarrow \mathbf{G}_d = \downarrow \forall d \mathbf{G}_d & \forall d \uparrow \mathbf{G}_d = \uparrow \forall d \mathbf{G}_d \\ \forall d (\mathbf{G}_d \oplus \mathbf{H}_d) = (\forall d \mathbf{G}_d) \oplus (\forall d \mathbf{H}_d) & \forall d (\mathbf{G}_d \otimes \mathbf{H}_d) = (\forall d \mathbf{G}_d) \otimes (\forall d \mathbf{H}_d) \\ \forall d (\mathbf{G}_d \& \mathbf{H}_d) = (\forall d \mathbf{G}_d) \& (\forall d \mathbf{H}_d) & \forall d (\mathbf{G}_d \wp \mathbf{H}) = (\forall d \mathbf{G}_d) \wp \mathbf{H} \end{array}$$

Commutations de $\exists$

$$\begin{array}{ll} \exists d \uparrow \mathbf{G}_d = \uparrow \exists d \mathbf{G}_d & \exists d \downarrow \mathbf{G}_d = \downarrow \exists d \mathbf{G}_d \\ (\exists d \mathbf{G}_d) \& (\exists d \mathbf{H}_d) = \exists d (\mathbf{G}_d \& \mathbf{H}_d) & (\exists d \mathbf{G}_d) \wp (\exists d \mathbf{H}_d) = \exists d (\mathbf{G}_d \wp \mathbf{H}_d) \\ (\exists d \mathbf{G}_d) \oplus (\exists d \mathbf{H}_d) = \exists d (\mathbf{G}_d \oplus \mathbf{H}_d) & (\exists d \mathbf{G}_d) \otimes \mathbf{H} = \exists d (\mathbf{G}_d \otimes \mathbf{H}) \end{array}$$

4.5.3 Sur l'existentiel

Nous n'avons pas de moyens de donner une éthique complète pour $\exists d$. Cette incomplétude correspond à l'impossibilité de faire disparaître le bi-orthogonal induit par le quantificateur existentiel dès que $\#\mathbb{D} \geq 2$. On peut aussi remarquer que pour toute éthique $\mathbf{E}$ on a :

$$\mathbf{E}^{\perp\perp} = \exists \mathfrak{E} \in \mathbf{E}, \{\mathfrak{E}' \mid \mathfrak{E} \leq \mathfrak{E}'\}$$

Le bi-orthogonal n'est donc rien d'autre qu'une instance d'un quantificateur existentiel.

Chapitre 5

Résultats de complétude

Dans ce chapitre nous commençons par présenter la notion de projection, puis celle d'indépendance. Après avoir défini de manière précise ce qu'est l'ensemble des designs partiels d'un comportement, nous définirons les bi-comportements, qui, comme nous l'avons expliqué brièvement dans l'introduction, sont des comportements auxquels l'on ajoute une relation d'équivalence partielle qui permet de faire la distinction entre les designs partiels et les designs totaux à travers la normalisation. En effet, cette relation permettra de faire la distinction entre les réseaux clos qui convergent ($\llbracket \mathcal{R} \rrbracket = \mathfrak{D} \mathfrak{a} \mathfrak{i}$) et ceux qui échouent ($\llbracket \mathcal{R} \rrbracket = \mathfrak{F} \mathfrak{i} \mathfrak{d}$), et sera indispensable dans la définition ultérieure d'uniformité. Nous présentons quelques résultats pour les bi-comportements, qui sont équivalents aux résultats pour les comportements. Nous terminons par la définition de la vérité, et les résultats de complétude de $MALL_2$.

5.1 Ethiques complètes pour les connecteurs.

5.1.1 $\oplus$ et $\&$

Définition 46. Deux comportements $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont dit disjoints lorsque leur répertoire sont disjoints. Un comportement est dit connexe lorsque son répertoire $\mathbb{P}\mathbf{G}$ est un singleton $\{I\}$, et nous dirons dans ce cas que I est la ramification du comportement.

On notera les opérations $\uplus$ et $\cap$ par $\oplus$ et $\&$ lorsqu'elles seront effectuées sur des comportements disjoints deux à deux.

Proposition 33. Deux comportements positifs sont disjoints si et seulement si $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{0} = \{\mathfrak{D} \mathfrak{a} \mathfrak{i}\}$. Deux comportements négatifs $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont disjoints si et seulement si $\forall \mathfrak{D} \in \mathbf{G}, \forall \mathfrak{E} \in \mathbf{H}, |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}} \cap |\mathfrak{E}|_{\mathbf{H}} = \emptyset$.

Le résultat suivant semble étrange au premier coup d'oeil du fait de la non-commutativité du produit cartésien et de la commutativité du connecteur $\&$. En réalité, nous choisissons la meilleure définition du produit parmi toutes les définitions (isomorphes) possible. On choisit la définition suivante :

$$X \oslash Y = \{x \cup y \mid x \in X, y \in Y\}$$

Théorème 34. *Le mystère de l'incarnation.*

$$|\mathbf{G} \& \mathbf{H}| = |\mathbf{G}| \times |\mathbf{H}|$$

Preuve. Supposons que $\mathcal{D} \in \mathbf{G} \& \mathbf{H}$ est matériel. Alors les incarnations $|\mathcal{D}|_{\mathbf{G}}$ et $|\mathcal{D}|_{\mathbf{H}}$ sont incluses dans $\mathcal{D}$. On a donc que $|\mathcal{D}|_{\mathbf{G}} \cup |\mathcal{D}|_{\mathbf{H}} \subset \mathcal{D}$.

Inversement, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des incarnations respectivement dans $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$, alors la proposition 33 montre qu'elles sont disjointes, et donc leur union est un design $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D}$ n'était pas une incarnation dans $\mathbf{G} \& \mathbf{H}$, on aurait que $\mathcal{E}' \cup \mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{D}$ pour $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ appropriés. Mais alors $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{F}$ ne serait pas une incarnation.

Théorème 35. *Propriété de la disjonction.*

Si K est non-vide :

$$\bigoplus_{k \in K} \mathbf{G}_k = \bigcup_{k \in K} \mathbf{G}_k$$

On le montre pour $K = \{1, 2\}$, ce qui est suffisant. Si $\mathcal{D} \in (\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\perp\perp} - (\mathbf{G} \cup \mathbf{H})$, alors $\mathcal{D}$ est orthogonal à un $\mathcal{E} \in \mathbf{G}^{\perp}$ et un $\mathcal{F} \in \mathbf{H}^{\perp}$, et l'on peut supposer $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ matériels. Or nous savons (proposition 33) que $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Donc $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ est un design dans l'intersection $\mathbf{G}^{\perp} \cup \mathbf{H}^{\perp}$, non orthogonal à $\mathcal{D}$, ce qui est une contradiction.

Décomposition additive

Proposition 36. *Tout comportement positif peut s'écrire de manière unique sous la forme d'un $\bigoplus$ de comportements connexes.*

$$\mathbf{G} = \bigoplus_{I \in \mathbb{I}\mathbf{G}} \mathbf{G}_I$$

Corollaire 36.1. *Tout comportement négatif peut être écrit de manière unique comme un $\&$ de comportements connexes.*

$$\mathbf{G} = \&_{I \in \mathbb{I}\mathbf{G}} \mathbf{G}_I$$

5.1.2 Les tenseurs

Le lemme de projection

Définition 47. Soit $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$ un réservoir¹. Chaque design $\mathfrak{A}$ positif de première action $(\langle \rangle, K)$ peut être écrit de manière unique sous la forme du produit tensoriel $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{B}$ des designs $\mathfrak{D}$ commençant par $(\langle \rangle, K \cap \mathbb{X})$ et $\mathfrak{B}$ commençant par $(\langle \rangle, K - \mathbb{X})$. Le design $\mathfrak{D}$ est appelé la projection de $\mathfrak{A}$ sur $\mathbb{X}$ et noté $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathbb{X}$. On définit également $\mathfrak{D} \text{ai} \upharpoonright \mathbb{X} = \mathfrak{D} \text{ai}$.

Si $\mathbf{E}$ est une éthique, $\{\mathfrak{A} \upharpoonright \mathbb{X} \mid \mathfrak{A} \in \mathbf{E}\}$ est la projection de $\mathbf{E}$ sur $\mathbb{X}$, notée $\mathbf{E} \upharpoonright \mathbb{X}$.

Théorème 37. Soit $\mathbf{E}$ connexe². La projection commute avec le bi-orthogonal :

$$\mathbf{E}^{\perp\perp} \upharpoonright \mathbb{X} = (\mathbf{E} \upharpoonright \mathbb{X})^{\perp\perp}$$

Soit $(\langle \rangle, K)$ la première action de $\mathbf{E}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\mathbb{X} = I \subset K$.

$\mathbf{E}^{\perp\perp} \upharpoonright \mathbb{X} \subset (\mathbf{E} \upharpoonright \mathbb{X})^{\perp\perp}$: Soit $\mathfrak{F} \in (\mathbf{E} \upharpoonright I)^{\perp}$. Supposons que $\mathfrak{F}$ est matériel. On peut remplacer son unique première action négative $(\langle \rangle, I)$ par $(\langle \rangle, K)$ afin d'obtenir $\mathfrak{F}'$. Si $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \upharpoonright I$, il est immédiat que $\ll \mathfrak{A} \upharpoonright \mathfrak{F}' \gg = \ll \mathfrak{D} \upharpoonright \mathfrak{F} \gg$, et en laissant $\mathfrak{A}$ parcourir $\mathbf{E}$ on en conclue que $\mathfrak{F}' \in \mathbf{E}^{\perp}$. On effectue la même opération pour $\mathfrak{A} \in \mathbf{E}^{\perp\perp}$, on en conclue que $\mathfrak{D} \perp \mathfrak{F}$, c'est-à-dire $\mathfrak{D} \in (\mathbf{E} \upharpoonright I)^{\perp\perp}$.
 $(\mathbf{E} \upharpoonright \mathbb{X})^{\perp\perp} \subset \mathbf{E}^{\perp\perp} \upharpoonright \mathbb{X}$: Soit $\mathfrak{F}' \in \mathbf{E}^{\perp}$, et posons $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}') \mathfrak{B}$, où $\mathfrak{B} = \mathfrak{Ram}_{(\langle \rangle, K-I)}$. Si $\mathfrak{A} \in \mathbf{E}$ et $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \upharpoonright I$, alors $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{D} \odot \mathfrak{B}$ donc $\mathfrak{F}' \perp \mathfrak{D} \odot \mathfrak{B}$, ce qui donne par adjonction $\mathfrak{F}' \perp \mathfrak{D}$, et on peut conclure que $\mathfrak{F}' \in (\mathbf{E} \upharpoonright I)^{\perp}$. Si $\mathfrak{D} \in (\mathbf{E} \upharpoonright I)^{\perp\perp}$ on peut maintenant conclure que $\mathfrak{D} \odot \mathfrak{B} \perp \mathfrak{F}'$, et par conséquent $\mathfrak{D} \odot \mathfrak{B} \in \mathbf{E}^{\perp\perp}$. Comme $(\mathfrak{D} \odot \mathfrak{B}) \upharpoonright I = \mathfrak{D}$, on en déduit que $\mathfrak{D} \in \mathbf{E}^{\perp\perp} \upharpoonright I$.

Indépendance

Définition 48. Deux comportements $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ de même polarité sont dits indépendants lorsque l'on a :

$$\forall (I, I') \in (\mathbb{Q}(\mathbf{G}))^2, \forall (J, J') \in (\mathbb{Q}(\mathbf{H}))^2, I \cup J = I' \cup J' \rightarrow I = I' \wedge J = J'$$

Nous notons $\otimes$ pour signifier que l'on considère l'un quelconque des tenseurs définis dans la section 4.4 p.43. Toutes les définitions sont de la même forme, à savoir

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \in \mathbf{G}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}\}^{\perp\perp}$$

Nous noterons alors

$$\mathbf{G} \odot \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \in \mathbf{G}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}\}. \quad (5.1)$$

¹Nous rappelons qu'un réservoir est un ensemble de biais, fini ou infini.

²Définition 46, p.50.

Théorème 38. Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont positifs et indépendants, alors $\mathbf{G} \odot \mathbf{H}$ est une éthique complète pour $\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}$.

On écrit $\mathbf{G} \odot \mathbf{H} = \bigcup_K (\bigcup_{I \cup J = K} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{H}_J)$. En utilisant la propriété de la disjonction (théorème 35, p.51), il nous suffit de montrer que $\bigcup_{I \cup J = K} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{H}_J$ est un comportement. Mais la condition d'indépendance nous dit que cette union est réduite à la forme $\mathbf{G}_I \otimes \mathbf{H}_J$, ce qui nous ramène au cas connexe. Supposons alors $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ connexes.

⊙ : Si I et J ne sont pas disjoints, alors $\mathbf{G} \odot \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Si I et J sont disjoints, et si $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \odot \mathfrak{B} \in \mathbf{G} \odot \mathbf{H}$, on a que $\mathfrak{D} \in \mathbf{G} = \mathbf{G}^{\perp\perp}$ et $\mathfrak{B} \in \mathbf{H} = \mathbf{H}^{\perp\perp}$ grâce au théorème ???. Donc $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \odot \mathfrak{B} \in \mathbf{G} \odot \mathbf{H}$.

⊗ : $\mathbf{G} \odot \mathbf{H} = (\mathbf{G} \upharpoonright K - J) \odot \mathbf{H}$. Le théorème 37 nous assure que $\mathbf{G} \upharpoonright K - J$ est un comportement, et nous nous retrouvons dans le cas où I et J sont disjoints.

⊕ : On obtient

$$\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} = (\mathbf{G} \upharpoonright I - J) \odot \top_{I \cap J}^+ \odot (\mathbf{H} \upharpoonright J - I)$$

La partie centrale est un scone positif, dont le seul habitant matériel est $\mathfrak{S}_{\langle \emptyset, I \cap J \rangle}$. On en déduit que $|\mathbf{G} \oplus \mathbf{H}| = \mathbf{G} \odot \mathbf{H}$.

5.2 Bi-comportement

5.2.1 Designs partiels

Définition 49. Comportements partiels

Soit $\mathbf{E}$ une éthique. L'éthique partielle associée avec $\mathbf{E}$ est l'ensemble $\mathbf{E}^p$ de tous les designs (totaux ou partiels) inclus dans un design de $\mathbf{E}$. Les éléments de $\mathbf{E}^p$ sont les designs partiels de $\mathbf{E}$

Définition 50. On définit la relation d'équivalence $\equiv_{\mathbf{G}}$ sur $\mathbf{G}^p$ par :

$$\mathfrak{D} \equiv_{\mathbf{G}} \mathfrak{D}' \leftrightarrow \forall \mathfrak{E} \in (\mathbf{G}^{\perp})^p, \ll \mathfrak{D} | \mathfrak{E} \gg = \ll \mathfrak{D}' | \mathfrak{E} \gg$$

Définition 51. L'incarnation $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$ de $\mathfrak{D}$ par rapport à $\mathbf{G}$ est le plus petit design $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}$ tel que $\mathfrak{E} \equiv_{\mathbf{G}} \mathfrak{D}$.

Proposition 39. Soient $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \in \mathbf{G}^p$. Alors :

$$\mathfrak{D} \equiv_{\mathbf{G}} \mathfrak{D}' \leftrightarrow |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}} = |\mathfrak{D}'|_{\mathbf{G}}$$

5.2.2 Bi-comportements

Définition 52. On définit une relation d'équivalence partielle (REP) comme une relation binaire symétrique et transitive.

Une des conséquences immédiates de cette définition est que la relation est faiblement réflexive :

$$x \cong y \rightarrow (x \cong x) \wedge (y \cong y)$$

Définition 53. Une bi-éthique est une paire $(\mathbf{E}, \cong)$, où $\mathbf{E}$ est une éthique et $\cong$ est une REP telle que :

Base Positive : Si $\mathcal{D} \cong \mathcal{E}$, alors :

1. Si $\mathcal{E} = \mathfrak{F}\text{id}$, alors $\mathcal{D} = \mathfrak{F}\text{id}$.
2. Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}\text{ai}$, alors $\mathcal{E} = \mathcal{D}\text{ai}$.

Base Négative : $\mathcal{E}\mathfrak{f} \cong \mathcal{E}\mathfrak{f}$ et $\mathcal{D}\text{ai}^- \cong \mathcal{D}\text{ai}^-$.

Définition 54. Soit $(\mathbf{E}, \cong)$ une bi-éthique. Son orthogonal est la paire $(\mathbf{E}^\perp, \cong^\perp)$ dont la REP est définie par :

$$\mathcal{E} \cong^\perp \mathcal{E}' \leftrightarrow \forall \mathcal{D} \cong \mathcal{D}', \ll \mathcal{D} | \mathcal{E} \gg = \ll \mathcal{D}' | \mathcal{E}' \gg$$

Proposition 40. $(\mathbf{E}^\perp, \cong^\perp)$ est également une bi-éthique.

Définition 55. Un bi-comportement est une bi-éthique $(\mathbf{G}, \cong)$ égale à son bi-orthogonal.

Proposition 41. Soit $(\mathbf{G}, \cong)$ un bi-comportement. Alors, pour tout $\mathcal{D}, \mathcal{E} \in \mathbf{G}^p$,

$$\mathcal{D} \cong \mathcal{D}' \leftrightarrow |\mathcal{D}| \cong |\mathcal{D}'|$$

Définition 56. Si $(\mathbf{G}, \cong)$ est un bi-comportement et $\mathcal{D} \cong \mathcal{D} \in \mathbf{G}^p$. La bi-incarnation de $\mathcal{D}$, notée $\|\mathcal{D}\|$ est le plus petit design $\mathcal{E} \in \mathbf{G}^p$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ et $\mathcal{E} \cong \mathcal{D}$. Un design égal à sa bi-incarnation est dit bi-matériel (ou bi-incarné).

Proposition 42. Soit $\mathcal{D}$ un design de base $\vdash \langle \rangle$. On peut trouver un bi-comportement $(\mathcal{D}^{\perp\perp}, \cong)$ tel que :

1. Si $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^{\perp\perp}$ est tel que $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$, alors $|\mathcal{E}| = \mathcal{D}$.
2. $\mathcal{D}$ est bi-matériel dans $(\mathcal{D}^{\perp\perp}, \cong)$.

Preuve. Définissons $\cong$ comme le bi-orthogonal de la relation $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}' \leftrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}' \subset \mathcal{D}$. On peut remarquer que comme $\simeq$ est plus large que $\equiv_{\mathcal{D}^{\perp\perp}}$, $\simeq^\perp$ est plus fin que $\equiv_{\mathcal{D}^\perp}$, en particulier $\mathfrak{F} \simeq^\perp \mathfrak{F}$ pour tout $\mathfrak{F} \in \mathcal{D}^\perp$.

1. Supposons que $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^{\perp\perp}$ — c'est-à-dire que $\mathcal{D} \leq \mathcal{E}$ avec $|\mathcal{E}| \neq \mathcal{D}$, alors il existe une chronique $c \star \kappa \in \mathcal{D}$ se terminant sur une action positive propre κ , telle que $c \star \mathfrak{F} \in \mathcal{E}$. Alors l'anti-design $\mathfrak{F} = \mathcal{D}\text{pp}_c$ est tel que $\ll \mathcal{E}, \mathfrak{F} \gg = \mathcal{D}\text{ai}$ et $\ll \mathcal{D}, \mathfrak{F} \gg = \mathfrak{F}\text{id}$. De plus, $\mathcal{D}\text{pp}_c \subset \mathcal{D}\text{pp}_{c \star \kappa} \in \mathcal{D}^\perp$, et donc $\mathfrak{F} \in (\mathcal{D}^\perp)^p$. On a donc $\mathfrak{F} \simeq^\perp \mathcal{E}\mathfrak{f}$ puisque $\ll \mathcal{D}', \mathfrak{F} \gg = \ll \mathcal{D}', \mathcal{E}\mathfrak{f} \gg = \mathfrak{F}\text{id}$ pour tout $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. Puisque $\ll \mathcal{E}, \mathfrak{F} \gg = \mathcal{D}\text{ai}$ et $\ll \mathcal{E}, \mathcal{E}\mathfrak{f} \gg = \mathfrak{F}\text{id}$ on conclue que $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}$.
2. Supposons que $\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{D}$. Alors il existe un anti-design $\mathfrak{F} \in \mathcal{D}^\perp - \mathcal{E}^\perp$. $\mathfrak{F} \simeq^\perp \mathfrak{F}$, mais $\ll \mathcal{D}, \mathfrak{F} \gg = \mathcal{D}\text{ai}$ et $\ll \mathcal{E}, \mathfrak{F} \gg = \mathfrak{F}\text{id}$ donc $\mathcal{D} \neq \mathcal{E}$.

5.3 Connecteurs

5.3.1 Additifs

Définition 57. Si $(\mathbf{G}, \cong)$ est négatif, un répertoire $\mathcal{N}$ est saturé par rapport à $(\mathbf{G}, \cong)$ lorsque $\text{Dir}_{\mathcal{N}}$ est bi-matériel dans $(\mathbf{G}, \cong)$.

Théorème 43. Bi-répertoire. Si $\mathbf{G}$ est négatif, il existe une REP $\sim_{(\mathbf{G}, \cong)}$ sur $\mathbb{G}$ telle que les répertoires saturés par rapport à $(\mathbf{G}, \cong)$ sont exactement les ensembles $\mathcal{N}$ qui peuvent être écrits sous la forme d'une union $\bigcup_k \mathcal{N}_k$ des classes d'équivalence modulo $\sim_{(\mathbf{G}, \cong)}$.

Si $(\mathbf{G}, \cong)$ est négatif, disons que deux ramifications I et I' sont parentes lorsqu'il existe des designs partiels $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ de $(\mathbf{G}^\perp)^p$ dont les premières actions sont $(\langle \rangle, I)$ et $(\langle \rangle, I')$ et tels que $\mathfrak{E} \simeq^\perp \mathfrak{E}'$. Définissons la REP $\sim_{\mathbf{G}}$ sur $\mathbb{G}$ comme la clôture transitive de la relation "être apparentés". Pour la suite, faisons remarquer que lorsque $\mathfrak{E}$ positif commence par $(\langle \rangle, I)$, $\llbracket \text{Dir}_{\mathcal{N}}, \mathfrak{E} \rrbracket$ converge si et seulement si $I \in \mathcal{N}$.

1. Si $\text{Dir}_{\mathcal{N}} \neq \text{Dir}_{\mathcal{N}}$ il existe $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}' \in (\mathbf{G}^\perp)^p$ tels que $\llbracket \text{Dir}_{\mathcal{N}}, \mathfrak{E} \rrbracket \neq \llbracket \text{Dir}_{\mathcal{N}}, \mathfrak{E}' \rrbracket$, et il est clair que $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ ne sont pas égaux à $\mathfrak{D}\text{ai}$ ou $\mathfrak{F}\text{id}$. Soient $(\langle \rangle, I)$ et $(\langle \rangle, I')$ les premières actions de $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$. Alors $I \in \mathcal{N}$ si et seulement si $I' \notin \mathcal{N}$. Si $\text{Dir}_{\mathcal{N}} \simeq \text{Dir}_{\mathcal{N}}$ et que $\text{Dir}_{\mathcal{N}}$ n'est pas bi-matériel, il existe $I \in \mathcal{N}$ tel que $\text{Dir}_{\mathcal{N}} \simeq \text{Dir}_{\mathcal{N}-I}$. Dans ce cas, aucun $\mathfrak{E} \in (\mathbf{G}^\perp)^p$ commençant par $(\langle \rangle, I)$ ne peut être apparenté avec lui-même.
2. Si $\text{Dir}_{\mathcal{N}}$ est bi-matériel, alors on peut facilement montrer qu'il est clos pour la relation "être apparentés". De plus, comme $I \in \mathcal{N}$ n'est apparenté à personne, alors $\text{Dir}_{\mathcal{N}} \simeq \text{Dir}_{\mathcal{N}-I}$.

Corollaire 43.1. Soit $\mathbf{G}$ négatif. Le support $\mathcal{G}$ de $\sim_{\mathbf{G}}$ est caractérisé par l'équation

$$\llbracket \mathfrak{D}\text{ai}^- \rrbracket = \text{Dir}_{\mathcal{G}}$$

On redéfinit maintenant des additifs localisés. La seule différence est dans la définition des REP.

- a. $(\bigcap_k \mathbf{G}_k, \simeq_{\bigcap_k \mathbf{G}_k})$ est défini par $\mathfrak{D} \simeq_{\bigcap_k \mathbf{G}_k} \mathfrak{E} \leftrightarrow \forall k \mathfrak{D} \simeq_{\mathbf{G}_k} \mathfrak{E}$.
- b. L'éthique $(\bigcup_k \mathbf{G}_k, \simeq)$ est définie par : $\simeq$ est la clôture transitive de l'union des $\simeq_{\mathbf{G}_k}$, et $(\bigcup_k^* \mathbf{G}_k, \simeq_{\bigcup_k^* \mathbf{G}_k})$ est son bi-orthogonal.

On obtient les équivalents des propositions 16 p.43 et 17 p.43.

5.3.2 Multiplicatifs

Définition 58. Si $(\mathbf{G}, \simeq_{\mathbf{G}})$ et $(\mathbf{H}, \simeq_{\mathbf{H}})$ sont négatifs, on définit $\mathfrak{F} \simeq_{\mathbf{G} \ltimes \mathbf{H}} \mathfrak{G}$ par :

$$\forall \mathfrak{A}, \mathfrak{B} (\mathfrak{A} \simeq_{\mathbf{G}^\perp} \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{F})\mathfrak{A} \simeq_{\mathbf{H}} (\mathfrak{G})\mathfrak{B}$$

On définit de manière analogue les REP des autres connecteurs multiplicatifs.
On a un résultat de complétude, avec l'hypothèse que $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ soient étrangers, i.e.. $\S\mathbf{G} \cap \S\mathbf{H} = \emptyset$. Dans ce cas, on utilise les symboles $\otimes$ et $\mathcal{A}$.

Proposition 44. *Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont étrangers et positifs,*

$$\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}' \simeq_{\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}' \leftrightarrow (\mathcal{D} \simeq_{\mathbf{G}} \mathcal{D}') \wedge (\mathcal{E} \simeq_{\mathbf{H}} \mathcal{E}')$$

5.4 Vérité et complétude

5.4.1 Définition de la vérité

Définition 59. Uniformité

$\mathcal{D} \in \mathbf{G}$ est uniforme lorsque $\mathcal{D} \simeq \mathcal{D}$.

Pour comprendre l'uniformité, il faut comprendre que le théorème de la *full completeness* de la ludique dépend de deux résultats : la complétude interne, et l'uniformité.

La complétude interne signifie qu'il n'existe pas de bi-orthogonaux, c'est-à-dire que tout comportement composé naît égal à son bi-orthogonal. Comme le bi-orthogonal n'ajoute aucun objet, on a une description complète de tous les designs du comportement. Par exemple, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est défini par $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{\perp\perp}$, où $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid \mathcal{A} \in \mathbf{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{B}\}$. On sait alors que pour tout $\mathcal{D} \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, on peut décomposer $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbf{A}} \otimes \mathcal{D}_{\mathbf{B}}$, avec $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{B}} \in \mathbf{B}$.

L'uniformité, quant à elle, est nécessaire dans la preuve de *full completeness* dont la preuve peut se résumer au principe "trouver la dernière règle". Dans le cas positif, la complétude interne suffit, mais dans le cas négatif la notion d'uniformité est indispensable.

Définition 60. Obstination

$\mathcal{D} \in \mathbf{G}$ est obstiné lorsqu'il ne fait pas usage du *Daemon*.

Définition 61. Exactitude

Une règle est dite exacte lorsque :

Daemon : Pas de restrictions.

Règle Positive : Lorsque $\Lambda = \bigcup_i \Lambda_i$.

Règle Négative : Lorsque $\Lambda_I = \Lambda$ pour tout $I \in \mathcal{N}$.

Un design est exact lorsqu'il peut s'écrire sous la forme d'un dessin exact, c'est-à-dire un dessin dont toutes les règles sont exactes.

Remarque 9. Un design exact est un design ne faisant pas usage de l'affaiblissement.

Définition 62. Parcimonie

$\mathcal{D} \in \mathbf{G}$ est parcimonieux lorsque pour tout $\mathcal{E} \in \mathbf{G}^\perp$ la tranche $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{D}$ qui a été utilisée/consumée lors de la normalisation, définie par $[\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}] = \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \cup \mathcal{E}_{\mathcal{D}}$, est exacte.

Définition 63. Un design $\mathcal{D} \in (\mathbf{G}, \simeq)$ est gagnant lorsqu'il est uniforme, obstiné, et parcimonieux. Un design est perdant lorsqu'il n'est pas gagnant.

Théorème 45. Le gain est préservé par la normalisation.

Par exemple, si $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ sont gagnants dans $\vdash (\mathbf{G}, \simeq)$ et $(\mathbf{G}, \simeq) \vdash (\mathbf{H}, \simeq')$, alors $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{E} \rrbracket$ est gagnant dans $\vdash (\mathbf{H}, \simeq')$.

Proposition 46. Si $\mathcal{D}$ est gagnant, alors il reste gagnant dans tout bi-comportement supérieur³. Son incarnation est également gagnante.

Définition 64. Vérité

Un bi-comportement $\mathbf{G}$ est vrai lorsqu'il contient un design gagnant, il est faux lorsque $\mathbf{G}^\perp$ contient un design gagnant.

Corollaire 46.1. $\mathbf{G}, \mathbf{G}^\perp$ ne peuvent être tous deux gagnants — ni perdants.

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont gagnants dans $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}^\perp$, alors leur forme normale est gagnante, c'est-à-dire $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{E} \rrbracket = \mathcal{D}\mathcal{a}\mathcal{i}$ est gagnant, donc obstiné, ce qui est clairement faux.

5.4.2 Calcul des séquents de $MALL_2$

Nous présentons le calcul des séquents de $MALL_2$. C'est un calcul des séquents focalisé, avec un bénitier, dont les séquents ne contiennent que des formules positives. On remarquera l'absence du **1**⁴.

Cut

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta; P \quad \Gamma', P \vdash \Delta';}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta';} \text{Cut} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P; \quad \Gamma', P \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{Cut};$$

Atome

$$\frac{}{X \vdash; X} X \vdash; X$$

³L'ordre considéré est l'inclusion, définie de manière évidente par $\mathcal{D} \simeq_{\mathbf{G}} \mathcal{D}' \leftrightarrow \mathcal{D} \simeq_{\mathbf{G}'} \mathcal{D}'$.

⁴Voir 4.4.1 p.48.

Focalisation

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta; P}{\Gamma \vdash \Delta, P;} \text{Foc}$$

Shift

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta;}{\Gamma \vdash \Delta; \downarrow P^\perp} \vdash\downarrow \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P;}{\Gamma, \downarrow P^\perp \vdash \Delta;} \downarrow\vdash$$

Tenseur

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta; P \quad \Gamma' \vdash \Delta'; Q}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'; P \otimes Q} \vdash\otimes \quad \frac{\Gamma, P, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \otimes Q \vdash \Delta} \otimes\vdash$$

Zéro

$$\overline{\Gamma, 0 \vdash \Delta;} \text{ } 0\vdash$$

Plus

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta; P}{\Gamma \vdash \Delta; P \otimes Q} \vdash g\otimes \quad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta; \quad \Gamma, Q \vdash \Delta;}{\Gamma, P \oplus Q \vdash \Delta;} \oplus\vdash$$
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta; Q}{\Gamma \vdash \Delta; P \oplus Q} \vdash d\oplus$$

Existence

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta; P[Q/X]}{\Gamma \vdash \Delta; \exists X P} \vdash\exists \quad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta;}{\Gamma, \exists X P \vdash \Delta;} \exists\vdash$$

5.4.3 Complétude

La complétude et l'adéquation peuvent se définir de la manière suivante :

Adéquation : Soit A une formule close. Si A est prouvable, alors A est vraie.

Complétude : Soit A une formule close et Π_1 . Si A est vraie, alors A est prouvable.

Or, en ludique, une formule A sera interprétée par un bi-comportement $\mathbf{A}$, et une preuve π de A sera interprétée par un design $\pi \in \mathbf{A}$. On peut alors formuler les deux propriétés de manière suivante :

Adéquation : Si π est une preuve de A une formule close. Alors π est gagnant et $\pi \in \mathbf{A}$.

Complétude : Soit A une formule close Π_1 . Si $\mathfrak{D} \in \mathbf{A}$ est gagnant et matériel, alors $\mathfrak{D} = \pi$ pour une certaine preuve π sans coupures de A .

Ce résultat est démontré pour $MALL_2$. Nous nous contentons d'énoncer le résultat et n'en donnons pas la démonstration ici, mais il est possible de la trouver dans [Gir01].

Conclusion

Nous avons donc présenté la logique ludique, ou du moins une partie de celle-ci. Nous avons, dans la première partie, expliqué comment plusieurs résultats de logique linéaire nous permettent de définir les designs de manière presque naturelle, puis, après les quelques théorèmes importants sur la normalisation qui permettent de faire le lien entre la ludique et les sémantiques dénotationnelles, nous avons présenté la construction des connecteurs.

Cette partie sur les connecteurs n'est pas exhaustive, et nous avons choisi de parler principalement des connecteurs localisés, qui sont les connecteurs de la ludique ayant une réelle importance. En effet, les connecteurs spirituels, qui nous permettent de retrouver les connecteurs habituels de la logique linéaire (à part la constante **1**) et de démontrer des résultats de complétude, sont définis à partir des connecteurs localisés à travers des délocalisations.

Nous n'avons pas eu l'occasion de présenter la complétude du premier ordre de la ludique, mais nous renvoyons à l'article [Fle04]. De même, la question de l'interactivité est un sujet à part entière que nous n'avons pas pu développer ici, mais nous renvoyons aux travaux de C.Faggian, [Fag02a] et [Fag06] par exemple.

L'idée de départ de la ludique était de surmonter la différence entre syntaxe et sémantique, avec l'espoir de retrouver la logique linéaire. Cependant, comme nous avons pu le constater, la ludique ne nous permet pas de retrouver la logique linéaire, mais une version de celle-ci un peu modifiée. En effet, la constante **1** n'existe pas en ludique. De plus, certains résultats sont contradictoires avec la logique classique, on peut penser par exemple à la commutation du quantificateur universel avec le connecteur $\oplus$:

$$\forall d(\mathbf{G}_d \oplus \mathbf{H}_d) = (\forall d\mathbf{G}_d) \oplus (\forall d\mathbf{H}_d)$$

Nous nous trouvons donc finalement face à une nouvelle logique, dont la grande innovation est la *locativité* qui permet la définition de connecteurs localisés, des connecteurs partiels, mais permettant d'obtenir des *égalité*, et non de simples isomorphismes. La ludique offre de plus un cadre dans lequel la notion de *polarité* apparaît réellement, et n'est plus un simple typage des formules comme

nous l'avons introduit dans le premier chapitre.

Cependant, la ludique ne prends pas encore en compte les exponentiels, et $MALL_2$ possède donc un pouvoir expressif réduit, tout comme $MALL$ a un pouvoir expressif réduit par rapport à LL .

Bibliographie

- [Abr00] Abramsky, S., Jagadeesan, R. et Malacaria, P., Full abstraction for PCF, 2000, *Information and computation* **163** (2) 409-470.
- [Ama98] Amadio, R. et Curien, P.-L., Domains and lambda-calculi, 1998, *Cambridge University Press*.
- [And92] Andréoli, J.-M., Logic Programming with Focusing Proofs in Linear Logic, *The journal of Logic and Computation* **2** (3).
- [Bar84] Barendregt, H.P., The lambda-calculus, its syntax and semantics, 1984, *North Holland*.
- [Cur06] Curien, P.-L., Introduction to linear logic and ludics, I et II, 2006.
- [Fag02a] Faggian, C., On the dynamics of ludics, a study of interaction, 2002, *Thèse de doctorat*.
- [Fag02b] Faggian, C., Travelling on designs, 2002, *Lecture notes in computer science*, Springer.
- [Fag02c] Faggian, C. et Hyland, M., Designs disputes and strategies, 2002, *Lecture notes in computer science*, Springer.
- [Fag04] Faggian, C., Fleury-Donnadieu, M.-R. et Quatrini, M., An introduction to uniformity in ludics, 2004, *Linear logic in Computer Science*, Cambridge University Press.
- [Fag06] Faggian, C., Ludics and interactive observability : the geometry of tests, 2003, *Theoretical Computer Science* **350** (2) 213-233.
- [Fle04] Fleury, M.-R., Quatrini, M., First order in ludics, 2004, *Mathematical computer science* **14** (2) 189-213.
- [Gir87] Girard, J.-Y., Linear logic, 1987, *Theoretical Computer Science, London Mathematical* **50** (1) 1-102.
- [Gir90] Girard, J.-Y., Lafont, Y., et Taylor, P., Proofs and types, 1990, *Cambridge University Press*.
- [Gir91] Girard, J.-Y., A new constructive logic : classical logic, 1991, *Mathematical Structures in Computer Science*.

- [Gir95] Girard, J.-Y., Linear logic : its syntax and semantics, 1995, *Advances in linear logic*, Cambridge University Press.
- [Gir96] Girard, J.-Y., Proof-nets : the parallel syntax for proof theory, 1996, *Logic and Algebra*, New York.
- [Gir01] Girard, J.-Y., Locus Solum, 2001, *Mathematical structures in computer science* **11** (3) 301-506.
- [Gir03] Girard, J.-Y., From foundations to ludics, 2003, *Bulletin of symbolic logic* **9** (2).
- [Gir06] Girard, J.-Y., Le point aveugle, tome 1, 2006, *Hermann, Visions des sciences*.
- [Hon00] Hong, L. et Hyland, M., On full abstraction for PCF, 2000, *Information and computation* **163** (2) 285-408.
- [Kri90] Krivine, J.-L., Lambda-calcul, types et modèles, 1990, *Masson*.
- [Lau02] Laurent, O., Etude de la polarisation en logique, 2002, *Thèse de doctorat*.