

Graphes d'Interaction

Thomas Seiller (IML)

4 Mars 2010

Sommaire

1 Graphes d'Interaction

- Branchement, Exécution
- Adjonction
- Gdl "Probabiliste"

2 Des graphes aux opérateurs

3 Généralisations

- Gdl "Quantique" et vérité subjective
- Additifs
- Exponentielles

Branchement

Le branchement correspond à la coupure.

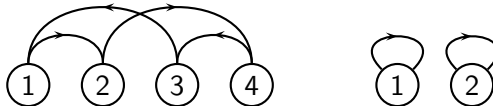
Définition

Etant donné deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (V', F)$, on définit le graphe $G \square H$ comme le graphe $G \uplus H = (V \cup V', E \uplus F)$ avec une fonction de coloriage δ telle que

$$\delta(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in E \\ 1 & \text{si } e \in F \end{cases}$$

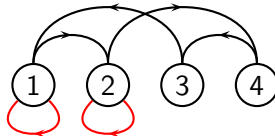
Branchement

Le branchement correspond à la coupure.



Branchement

Le branchement correspond à la coupure.

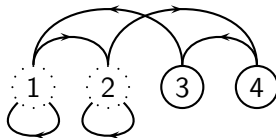


Exécution (Permutations)

On souhaite définir l'exécution comme dans le cas des permutations.

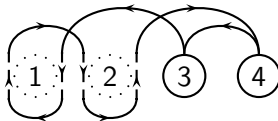
Exécution (Permutations)

On souhaite définir l'exécution comme dans le cas des permutations.



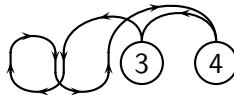
Exécution (Permutations)

On souhaite définir l'exécution comme dans le cas des permutations.



Exécution (Permutations)

On souhaite définir l'exécution comme dans le cas des permutations.

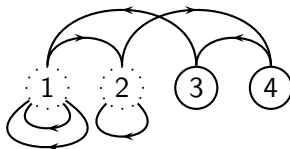


Exécution (Graphes)

A ceci près que l'on peut avoir plusieurs arêtes (de même orientation) entre deux mêmes points.

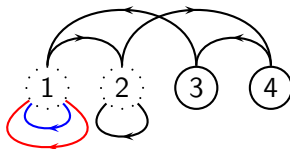
Exécution (Graphes)

A ceci près que l'on peut avoir plusieurs arêtes (de même orientation) entre deux mêmes points.



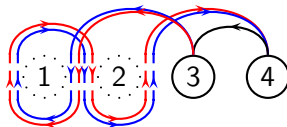
Exécution (Graphes)

A ceci près que l'on peut avoir plusieurs arêtes (de même orientation) entre deux mêmes points.



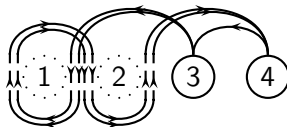
Exécution (Graphes)

A ceci près que l'on peut avoir plusieurs arêtes (de même orientation) entre deux mêmes points.



Exécution (Graphes)

A ceci près que l'on peut avoir plusieurs arêtes (de même orientation) entre deux mêmes points.



Exécution (Graphes)

A ceci près que l'on peut avoir plusieurs arêtes (de même orientation) entre deux mêmes points.

Définition

On définit le résultat $F :: G$ de l'exécution entre deux graphes $F = (V, E)$ et $G = (V', F)$ comme le graphe

$$F :: H = (V \cup V', Path^{alt}(F \square G))$$

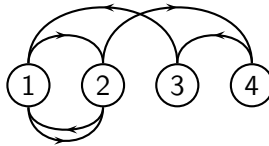
où $Path^{alt}(F \square G)$ est l'ensemble des chemins alternés dans $F \square G$.

Compter les cycles

Parfois, des cycles peuvent apparaître dans le branchement de deux graphes.

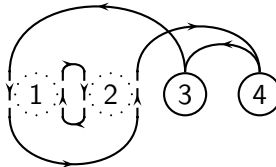
Compter les cycles

Parfois, des cycles peuvent apparaître dans le branchement de deux graphes.



Compter les cycles

Parfois, des cycles peuvent apparaître dans le branchement de deux graphes.



Compter les cycles

Etant donnés deux graphes $G_1 = (V_1, F_1)$ et $G_2 = (V_2, F_2)$ avec $V \cap V' = \emptyset$, on peut définir $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, F_1 \uplus F_2)$.

Compter les cycles

Etant donnés deux graphes $G_1 = (V_1, F_1)$ et $G_2 = (V_2, F_2)$ avec $V \cap V' = \emptyset$, on peut définir $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, F_1 \uplus F_2)$.

Proposition

Soit $F = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe. Si l'on note $\text{cycl}(F, G)$ le nombre de cycles apparaissant lors du branchement de F et G , on a :

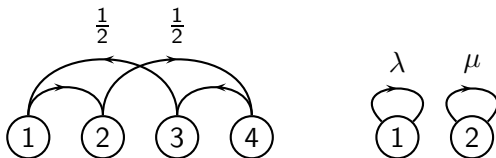
$$\text{cycl}(F, G_1 \cup G_2) = \text{cycl}(F, G_1) + \text{cycl}(F :: G_1, G_2)$$

Graphes pondérés

- 1 Lors du branchement de deux graphes F et G , on définit de manière évidente le poids des arêtes du graphe $F \square G$.
- 2 On définit le poids d'un chemin comme étant le produit des poids des arêtes le constituant.

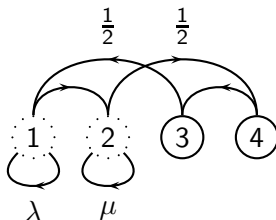
Graphes pondérés

- 1 Lors du branchement de deux graphes F et G , on définit de manière évidente le poids des arêtes du graphe $F \square G$.
- 2 On définit le poids d'un chemin comme étant le produit des poids des arêtes le constituant.



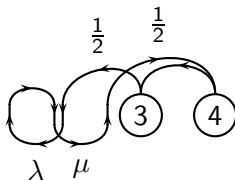
Graphes pondérés

- 1 Lors du branchement de deux graphes F et G , on définit de manière évidente le poids des arêtes du graphe $F \square G$.
- 2 On définit le poids d'un chemin comme étant le produit des poids des arêtes le constituant.



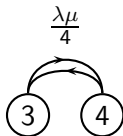
Graphes pondérés

- 1 Lors du branchement de deux graphes F et G , on définit de manière évidente le poids des arêtes du graphe $F \square G$.
- 2 On définit le poids d'un chemin comme étant le produit des poids des arêtes le constituant.



Graphes pondérés

- 1 Lors du branchement de deux graphes F et G , on définit de manière évidente le poids des arêtes du graphe $F \square G$.
- 2 On définit le poids d'un chemin comme étant le produit des poids des arêtes le constituant.



Adjonction

Définition

On définit un cycle comme une boucle qui n'est pas la concaténation de plusieurs fois la même boucle. On note $Cycl(F, G)$ l'ensemble des cycles alternés dans $F \square G$.

Définition

$$\ll F, G \gg = \sum_{\pi \in Cycl(F, G)} -\log(1 - \omega(\pi))$$

Proposition (Adjonction)

$$\ll F, G_1 \cup G_2 \gg = \ll F, G_1 \gg + \ll F :: G_1, G_2 \gg$$

Réduction des arêtes

Pour faire le lien avec les opérateurs, on a besoin de travailler avec des graphes simples.

Définition

Un graphe simple est un graphe qui possède au plus une arête d'un sommet vers un autre.

Définition

On définit l'opération $\hat{\cdot}$ qui associe à un graphe orienté pondéré G un graphe simple orienté et pondéré en remplaçant l'ensemble $E_{v,w}$ des arêtes de v à w par une seule arête dont le poids est égal à $\sum_{x \in E_{v,w}} \omega(x)$.

Réduction des arêtes

Remarque

Si G est un graphe orienté pondéré dont les poids sont ≤ 1 , alors les poids de $\hat{G}$ ne sont pas nécessairement ≤ 1 .

Théorème

$$\ll F, G \gg = \ll F, \hat{G} \gg$$

Projets

Définition

Un *projet* est un couple $\alpha = (a, A)$ composé d'une mise $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ et d'un graphe orienté pondéré A (dont les poids sont dans $[0, 1]$). L'ensemble des sommets de A est appelé le *support* de α .

Définition

Soient α et $\flat$ deux projets. On définit

$$\ll \alpha, \flat \gg = a + b + \ll A, B \gg$$

Dualité, Conduites

Définition (Dualité)

Deux projets α et β de même support sont *polaires* lorsque $\ll \alpha, \beta \gg \neq 0, \infty$.

Définition (Conduites)

Une conduite est un ensemble de projets de même support égal à son bipolaire.

Tenseur

Définition

Etant donnés deux projets $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de support disjoints, on définit $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\llbracket \mathbf{a}, \mathbf{b} \rrbracket, A \cup B)$.

Définition

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont deux conduites de supports disjoints, on définit $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}^{\perp\perp}$.

Coupure, Application

Définition (Coupure)

Soient f et g deux projets de supports respectifs $V \cup V'$ et $V' \cup V''$. On définit la coupure de f et g par

$$f \mathbin{::} g = (\llbracket f, g \rrbracket, F \mathbin{::} G)$$

Définition (Implication linéaire)

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux conduites de support disjoint, on définit

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = \{f \mid \forall a \in \mathbf{A}, f \mathbin{::} a \in \mathbf{B}\}$$

Dualité des connecteurs

Proposition

$$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^\perp)^\perp$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \llbracket f, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \rrbracket &= f + (a + b) + \llbracket F, A \cup B \rrbracket \\ &= f + a + b + \llbracket F, A \rrbracket + \llbracket F :: A, B \rrbracket \\ &= (a + f + \llbracket F, A \rrbracket) + b + \llbracket F :: A, B \rrbracket \\ &= \llbracket f :: \mathbf{a}, \mathbf{b} \rrbracket \end{aligned}$$

Sémantique dénotationnelle

Définition

On définit la catégorie $\mathcal{G}raph_{MLL}$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}bj &= \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp} \text{ de support } X_{\mathbf{A}} \subset \mathbb{N}\} \\ \mathcal{M}or[A, B] &= \{f \in \psi_0(\mathbf{A}) \multimap \psi_1(\mathbf{B})\}\end{aligned}$$

Proposition

On définit des foncteurs à partir des connecteurs $\otimes$, $\multimap$ (avec délocalisations) et de la négation (passage au polaire). Avec ces définitions, la catégorie $\mathcal{G}raph_{MLL}$ est une catégorie $*$ -autonome.

Vérité

Définition (Projet gagnant)

Un projet $\alpha = (0, A)$ est gagnant si $\hat{A}$ symétrique et vérifie $\hat{A}^3 = \hat{A}$, $Tr(\hat{A}) = 0$.

Définition (Vérité)

Une conduite **A** est vraie lorsqu'elle contient un projet gagnant

Vérité

Proposition

Les conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ ne peuvent pas être vraies simultanément.

Proposition

Si les conduites $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ sont vraies, alors la conduite $\mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$ est vraie.

Vérité

Proposition

Les conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ ne peuvent pas être vraies simultanément.

Proposition

Si les conduites $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ sont vraies, alors la conduite $\mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$ est vraie.

Vérité

Proposition

Les conduites $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\perp$ ne peuvent pas être vraies simultanément.

Proposition

Si les conduites $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ sont vraies, alors la conduite $\mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$ est vraie.

Proposition (Complétude interne faible)

Si $f \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est gagnant, alors il existe des projets gagnants $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}$ tels que $f = a \otimes b$.

Graphes d'opérateurs

Définition

Un *graphe d'opérateur* G est un graphe (orienté pondéré) simple tel que la matrice d'adjacence de G soit de norme au plus 1.

Définition

Soient G et H deux graphes d'opérateurs tels que $\widehat{G :: H}$ soit défini. Alors l'exécution (comme graphes d'opérateurs) de G et H est définie par :

$$G \hat{::} H \simeq \widehat{G :: H}$$

Des opérateurs aux matrices

On se fixe une base $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. A tout $X \subset \mathbb{N}$, on associe la projection sur $\{e_i\}_{i \in X}$, notée p_X .

Définition

Une projet d'opérateur est un projet dont le graphe est un graphe d'opérateur. On peut lui associer naturellement un triplet $\hat{a} = (p_{V_A}, a, \mathcal{M}(A))$ où $\mathcal{M}(A) \subset p_{V_A} \mathcal{B}(\mathbb{H}) p_{V_A}$ est la matrice d'adjacence de A .

Des opérateurs aux matrices

Remarque

Tous les opérateurs considérés sont des matrices finies.

$$-\log(\det(1 - a)) = \sum_k \frac{\text{Tr}(a^k)}{k}$$

Proposition

$$\langle\langle F, G \rangle\rangle = -\log(\det(1 - \mathcal{M}(F)\mathcal{M}(G)))$$

Proposition

$$\mathcal{M}(F \hat{\circ} H) = \text{Ex}(\mathcal{M}(F), \mathcal{M}(H))$$

Des poids complexes

- On a parlé de travailler sans base fixe, mais en réalité ce n'est pas ce que l'on fait. En effet, une transposition de deux vecteurs d'une base $\mathcal{B}$ dans une base $\mathcal{B}'$ s'exprime à l'aide d'une matrice ayant des coefficients négatifs.
- On peut étendre notre ensemble de poids aux nombres complexes de module inférieur à 1.

Vérité

C'est au niveau de la vérité que l'on voit apparaître une différence.
On voudrait utiliser la même définition qu'auparavant.

Définition (Projet Prometteur)

Un projet $\alpha = (0, A)$ est *prometteur* si $a = 0$, que $\hat{A}$ est symétrique avec $\hat{A}^3 = \hat{A}$ et $Tr(\hat{A}) = 0$.

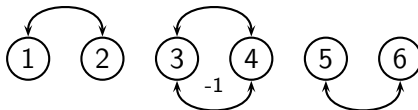
Vérité

C'est au niveau de la vérité que l'on voit apparaître une différence.
On voudrait utiliser la même définition qu'auparavant.

Définition (Projet Prometteur)

Un projet $\alpha = (0, A)$ est *prometteur* si $a = 0$, que $\hat{A}$ est symétrique avec $\hat{A}^3 = \hat{A}$ et $Tr(\hat{A}) = 0$.

Cependant, la réduction de deux projets prometteurs n'est pas toujours un projet prometteur.



Vérité

C'est au niveau de la vérité que l'on voit apparaître une différence.
On voudrait utiliser la même définition qu'auparavant.

Définition (Projet Prometteur)

Un projet $\alpha = (0, A)$ est *prometteur* si $a = 0$, que $\hat{A}$ est symétrique avec $\hat{A}^3 = \hat{A}$ et $Tr(\hat{A}) = 0$.

La solution : définir la vérité subjectivement, c'est-à-dire par rapport à une base.

Additifs

Pour étendre aux additifs, deux solutions (au moins) viennent à l'esprit.

- 1 Etendre l'ensemble des poids afin de pouvoir gérer les tranches. Par exemple, on pourrait introduire des variables booléennes comme pour les réseaux additifs.
- 2 On peut considérer des graphes *stratifiés*, i.e. des graphes avec plusieurs ensembles d'arêtes. Toutes les définitions utilisées pour les multiplicatifs fonctionnent, il suffit de les effectuer "tranches à tranches".

Exponentielles

Pour faire des exponentielles, on a besoin d'effectuer des "changements de tranches". Les généralisations précédentes ne sont pas suffisantes, mais on peut imaginer les deux solutions suivantes :

- 1 On peut considérer des matrices pour les poids.
- 2 On peut considérer des graphes donnés par deux ensembles V et I , et des arêtes orientées et pondérées de source et but dans $V \times I$. Dans ce cas, les graphes stratifiés sont un cas particulier où $s(e) \in V \times \{i\} \Rightarrow t(e) \in V \times \{i\}$ pour toute arête e . Il faut alors bien redéfinir la notion de branchement.