

Logique dans le Facteur Hyperfini Géométrie de l'Interaction et Complexité

Thomas Seiller
Institut des Hautes Études Scientifiques

Journées Nationales du GdR-IM, 29 Janvier 2014

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme	Opérateur
Donnée	Opérateur

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme	Opérateur
Donnée	Opérateur
Application	Équation Fonctionnelle

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme	Opérateur
Donnée	Opérateur
Application	Équation Fonctionnelle
Exécution	Construction d'une solution

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme $f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$
Donnée	Opérateur
Application	Équation Fonctionnelle
Exécution	Construction d'une solution

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme $f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$
Donnée $n : \text{nat}$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$
Application	Équation Fonctionnelle
Exécution	Construction d'une solution

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme $f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$
Donnée $n : \text{nat}$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$
Application $f(n)$	Équation Fonctionnelle $\begin{cases} F(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ N(x'') &= x''' \end{cases}$
Exécution	Construction d'une solution

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme $f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$
Donnée $n : \text{nat}$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$
Application $f(n)$	Équation Fonctionnelle $\begin{cases} F(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ N(x') &= x \end{cases}$
Exécution	Construction d'une solution

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme $f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$
Donnée $n : \text{nat}$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$
Application $f(n)$	Équation Fonctionnelle $\begin{cases} F(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ N(x') &= x \end{cases}$
Exécution $f(n) \rightsquigarrow m : \text{nat}$	Construction d'une solution $\text{Ex}(F, A)(y) = y' \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme $f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$
Donnée $n : \text{nat}$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$
Application $f(n)$	Équation Fonctionnelle $\begin{cases} F(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ N(x') &= x \end{cases}$
Exécution $f(n) \rightsquigarrow m : \text{nat}$	Construction d'une solution $\text{Ex}(F, A)(y) = y' \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$

C'est un programme de recherche: plusieurs constructions ont été proposées par Girard.

Géométrie de l'Interaction

C'est une modélisation des **programmes** et leur **dynamique**.

Informatique	GdI
Programme $f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$
Donnée $n : \text{nat}$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$
Application $f(n)$	Équation Fonctionnelle $\begin{cases} F(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ N(x') &= x \end{cases}$
Exécution $f(n) \rightsquigarrow m : \text{nat}$	Construction d'une solution $\text{Ex}(F, A)(y) = y' \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$

C'est un programme de recherche: plusieurs constructions ont été proposées par Girard. Mon travail a consisté à étudier la récente GdI dans le facteur hyperfini et ses apports en complexité.

Premier Axe: **Graphes d'Interaction**

Un cadre combinatoire (paramétré) qui:

- **unifie et généralise** les constructions de GdI précédemment introduites: celles-ci correspondent à des choix judicieux de paramètre;
- **éclaircit** la modélisation du calcul proposée par la GdI: ce travail met en lumière une relation entre cycles et chemins sur laquelle celle-ci se fonde;
- **simplifie** les modélisations utilisant des opérateurs: les graphes d'interaction peuvent être utilisés comme des **représentations finies** des modélisations (infinies) de programmes en GdI.

Premier Axe: Graphes d'Interaction

Informatique	GdI	Graphes d'Interaction
Programme $f : A \rightarrow B$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$	
Donnée $n : A$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$	
Application $f(n)$	Équation $\begin{cases} F(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ N(x') &= x \end{cases}$	
Exécution $f(n) \rightsquigarrow m : B$	Construction d'une solution $\text{Ex}(F, A)(y) = y' \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$	

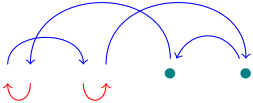
Premier Axe: Graphes d'Interaction

Informatique	GdI	Graphes d'Interaction
Programme $f : A \rightarrow B$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$	
Donnée $n : A$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$	
Application $f(n)$	Équation $\begin{cases} F(x \oplus y) = x' \oplus y' \\ N(x') = x \end{cases}$	
Exécution $f(n) \rightsquigarrow m : B$	Construction d'une solution $\text{Ex}(F, A)(y) = y' \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$	

Premier Axe: Graphes d'Interaction

Informatique	GdI	Graphes d'Interaction
Programme $f : A \rightarrow B$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$	
Donnée $n : A$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$	
Application $f(n)$	Équation $\begin{cases} F(x \oplus y) = x' \oplus y' \\ N(x') = x \end{cases}$	
Exécution $f(n) \rightsquigarrow m : B$	Construction d'une solution $\text{Ex}(F, A)(y) = y' \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$	

Premier Axe: Graphes d'Interaction

Informatique	GdI	Graphes d'Interaction
Programme $f : A \rightarrow B$	Opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$	
Donnée $n : A$	Opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$	
Application $f(n)$	Équation $\begin{cases} F(x \oplus y) = x' \oplus y' \\ N(x') = x \end{cases}$	
Exécution $f(n) \rightsquigarrow m : B$	Construction d'une solution $\text{Ex}(F, A)(y) = y' \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$	

J'ai étudié les apports de la GdI dans le facteur hyperfini concernant la **complexité**:

- **en temps**: j'ai montré comment interpréter *correctement* la **logique linéaire élémentaire**, qui caractérise les fonctions calculables en **temps élémentaire**.
- **en espace**: j'ai montré comment obtenir une **caractérisation de co-NL** par une famille d'opérateurs dans le facteur hyperfini de type II_1 .