Feuille d'exercices n°3

Cardinalité infinie

Dans cette feuille d'exercices on appelle
- *ensemble dénombrable* un ensemble en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
- *ensemble infini* un ensemble dont un sous-ensemble est dénombrable.

Deux ensembles A et B qui sont en bjection sont dit *équipotents*, on note $A \sim B$. On dit aussi que *A et B ont même cardinal.*

Exercice 1. Trouver à chaque fois une fonction bijective :

1. de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$; de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ x \geq a\}$ pour un entier a donné ;
2. de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ \text{x est pair}\}$; de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ \text{x est impair}\}$; de $\mathbb{N}^*$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ \text{x est impair}\}$; de $\mathbb{Z}^{-*}$ dans $\mathbb{N}^*$; de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ (se servir de ce qui précède) ;
3. de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ puis de de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$; de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$;
4. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ (on peut par exemple se servir d'une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$) ;
5. de $\mathbb{R}^*$ dans $]0, +\infty[$ (se servir de questions précédentes), puis de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$, puis de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1[$.

Exercice 2.
1. Rappeler pourquoi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$, ont même cardinal.
2. Montrer que si E est infini est A est une partie dénombrable de E telle que $E \setminus A$ est infini, alors E a même cardinal que $E \setminus A$ (indication : utiliser une partie dénombrable de $E \setminus A$).
3. Montrer que l'ensemble de parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
4. En déduire que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ est de même cardinal que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
5. En se servant de la numérotation binaire, établir une bijection entre [0,1[est l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$.
6. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal.

Exercice 3. Utiliser le théorème de Cantor-Bernstein pour montrer que les ensembles suivants ont la puissance du continu, c'est-à-dire qu'ils ont même cardinal que $\mathbb{R}$.

1. Les ensembles $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. *Indication :* utiliser l'équipotence $\mathbb{R} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Indication :* utiliser l'équipotence $\mathbb{R} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
3. L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. L'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Qu'en est-il de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 4. On nomme C l'ensemble des fonctions croissantes (au sens large) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$f \in C \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in \mathbb{N} f(x) \leq f(x+1) \, .$$

1. Montrer que l'ensemble C est infini. On rappelle qu'un ensemble est infini si et seulement si il contient un sous-ensemble dénombrable, c'est à dire un sous-ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C indexée par n. Soit g la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$g(n) = 1 + (f_0(0) + \cdots + f_n(n)) \quad \left(\text{ ou encore } g(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} f_i(i) \right) .$$

2. Montrer que $g \in C$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g \neq f_n$.
4. En déduire qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur C.

Exercice 5. Soit C l'ensemble des fonctions croissantes (au sens large) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Etablir une bijection entre C et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et en déduire que C a la puissance du continu (donc n'est pas dénombrable, par une autre méthode qu'à l'exercice précédent).