Feuille d'exercices n°2

1 Axiomes de Zermelo

Premiers axiomes de Zermelo :

Axiome d'extensionalité : *Deux ensembles possédant les mêmes éléments sont égaux.*

$$\forall x\,\forall y\,\big(\forall z\,(z \in x \iff z \in y) \Rightarrow x = y\big)$$

Principe de compréhension restreinte : *Pour tout ensemble A et pour toute propriété $P[\,\cdot\,]$, il existe un ensemble B formé des éléments de A qui satisfont la propriété P :*

$$\forall A\,\exists B\,\forall x\,\big(x \in B \iff (x \in A \wedge P[x])\big)$$

Remarque : P peut contenir des paramètres ;

Axiome de la paire : *Pour tous ensemble x et y, il existe un ensemble p dont les éléments sont précisément x et y :*

$$\forall x\,\forall y\,\exists p\,\forall z\,\big(z \in p \iff (z = x \vee z = y)\big)$$

Axiome de la réunion : *Pour tout ensemble A, il existe un ensemble C dont les éléments sont les éléments des éléments de A :*

$$\forall A\,\exists C\,\forall x\,\big(x \in C \iff \exists Y\,(x \in Y \wedge Y \in A)\big)$$

Axiome de l'ensemble des parties : *Pour tout ensemble A, il existe un ensemble C dont les éléments sont les parties de A :*

$$\forall A\,\exists C\,\forall X\,(X \in C \iff X \subset A)$$

2 Utilisation du langage formel

Exercice 1. Écrire des formules utilisant uniquement les symboles primitif du langage de la théorie des ensembles (soit : symboles logiques, égalité, appartenance et parenthèses) et exprimant :

1. $X = \emptyset$; $\emptyset \in X$; $X \in \emptyset$;
2. $y \in \bigcup X$; $Y = \bigcup X$;
3. $\{x \in A \mid F(x)\} = \{y \in B | G(y)\}$;
4. X est la paire $\{u, v\}$; X est une paire, une vraie paire, un singleton ;
5. z est le couple (x, y) ; z est un couple ;
6. G est le graphe d'une fonction f telle que $f(x) = y$; G est le graphe d'une fonction f injective de A dans B.

Exercice 2. Démontrer, en utilisant les axiomes de Zermelo, l'existence des ensembles :

1. $E_0 = \left\{ \{x\} \mid x \in A \right\}$; **2.** $E_1 = \{\bigcup x \mid x \in A\}$; **3.** $E_2 = \{B \cap x \mid x \in A\}$.

Exercice 3. Soit (A_i) une famille d'ensembles, soit un ensemble de couples, dont les les premières composantes sont les *indices* et les secondes composantes, les éléments de la famille. On note I l'ensemble de tous les indices. Justifier l'existence des ensembles :

1. I ;

2. $\{A_i \mid i \in I\}$;

3. $\bigcap_{i \in I} A_i$ pour $I \neq \emptyset$;

4. $\bigcup_{i \in I} A_i$;

Exercice 4 (couples de Wiener). Montrer que la définition suivante des couples, due à Wiener (1914), satisfait bien la propriété fondamentable des couples :

$$(x, y)_w = \left\{ \{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\} \right\}$$

3 Algèbre de Boole des parties d'un ensemble

Exercice 5 (distributivité). Soit $\mathcal{A} \neq \emptyset$, et soit B un ensemble. Montrer que :

$$B \cup \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{B \cup X \mid X \in \mathcal{A}\}$$
$$C \cap \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{B \cap X \mid X \in \mathcal{A}\}.$$

Exercice 6 (dualité ou règles de de Morgan). Pour $\mathcal{A} \neq \emptyset$, montrer que :

$$B \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{B \setminus X \mid X \in \mathcal{A}\}$$
$$B \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{B \setminus X \mid X \in \mathcal{A}\}$$

Exercice 7 (Images directe et réciproque d'ensembles par une fonction). Soit $f : X \to Y$ une fonction.

1. Montrer les identités suivantes, pour tous ensembles $A, B \subset Y$:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

2. Donner une condition suffisante sur f qu'on ait, pour tous ensembles $A, B \subset X$:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

3. A-t-on $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ en général ?

4. Les égalités ensemblistes précédentes se généralisent-elles aux unions et intersections infinies ?

5. Montrer que f est surjective si et seulement si $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ est injective.