Feuille d'exercices n°1

Axiomes de Peano

Exercice 1. Démontrer à partir des axiomes de Peano (et des résultats déjà démontrés), que pour tous entiers naturels x et y :

1. $x + y = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$; **2.** $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

Exercice 2 (régularité de l'addition). Montrer, à partir des axiomes de Peano ou des propriétés déjà démontrées, la régularité de l'addition, à savoir que pour tous entiers naturels x, z et z' :

$$z + x = z' + x \Rightarrow z = z' \ ; \quad x + z = x + z' \Rightarrow z = z' \ .$$

On a vu que si $x \leq y$, alors $\exists z \in \mathbb{N}\ x + z = y$. Ce z est donc unique et on peut définir sur $\mathbb{N}$ une soustraction partielle : $y - x$ est défini si $x \leq y$, et vérifie alors $x + (y - x) = y$.

Exercice 3 (compatibilité de l'ordre avec les opérations usuelles). Les propriétés suivantes sont utilisées dans l'exercice 6. Justifiez les rapidement (si récurrence sur quelle variable, propriété utilisée).

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z) \ ; \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}\ (x < y \Rightarrow x + z < y + z) \ . \tag{1}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ (x \leq y \Rightarrow z \cdot x \leq z \cdot y) \ ; \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}\ (z \neq 0, x < y \Rightarrow z \cdot x < z \cdot y) \ . \tag{2}$$

Exercice 4 (division euclidienne). Soit k un entier naturel non nul. Montrer que pour tout entier naturel x, il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tel que

$$x = k \cdot q + r \text{ et } r < k \ .$$

Dans la suite on note $q(x, k)$ est le quotient et $r(x, k)$ le reste de la division euclidienne de x par $k \neq 0$, soit $q, r : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$.

Exercice 5 (somme). Le signe $\sum$, et ces propriétés sont utilisés à l'exercice 6.

1. Justifier du point de vue axiomatique la notation $\sum_{i=0}^{n} f(a, i)$, pour $f : A \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (définir une fonction).

2. Soit $k \leq n$, soit $n = k + m$. On définit alors $\sum_{i=k}^{n} f(a, i) = \sum_{i=0}^{m} f(a, i + k)$. Démontrer que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}\ \forall a \in A \quad \sum_{i=0}^{m+n+1} f(a, i) = \sum_{i=0}^{m} f(a, i) + \sum_{i=m+1}^{m+n+1} f(a, i) \ . \tag{3}$$

3. Montrer la propriété de distributivité pour le signe $\sum$:

$$\forall k, n \in \mathbb{N}\ \forall a \in A \quad k \cdot \sum_{i=0}^{n} f(a, i) = \sum_{i=0}^{n} k \cdot f(a, i) \tag{4}$$

Exercice 6 (décomposition dans une base). Dans tout l'exercice k est un entier naturel tel que $k \geq 2$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites entières (fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) nulles à partir d'un certain rang. le degré d'une suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$, noté $\deg((a_i)_{i \in \mathbb{N}})$, est le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$, s'il en existe un, 0 sinon.

1. (Préliminaire) Démontrer cette propriété du quotient :

$$\forall x, k \in \mathbb{N}\ (k \geq 2, x \neq 0 \Rightarrow q(x, k) < x) \ . \tag{5}$$

2. Soient deux suites $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, d'entiers naturels strictement inférieurs à k et nulles à partir d'un certain rang. Soient p le degré de (a_i), q celui de (b_i). Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \cdot k^i = \sum_{i=0}^{q} b_i \cdot k^i \Rightarrow (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

3. Définir une fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telle que pour tout entier naturel x

a. $\forall i \in \mathbb{N}\ f(x,k,i) < k$; **b.** $\forall i \in \mathbb{N}\ f(0,k,i) = 0$;

et pour tout entier naturel x, il existe un entier naturel p vérifiant

a. $\forall i \geq p\ f(x,k,i) = 0$; **b.** $x = \sum_{i=0}^{p} f(x,k,i) \cdot k^i$.

7. Énoncer précisément et démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier naturel x dans la base k ($k \geq 2$). Vérifier que cette démonstration se fait bien dans le cadre des axiomes de Peano.

Ordres

Un *morphisme d'ordre* entre deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ est une application $\varphi : A \to B$ vérifiant

$$\forall x, y \in A\, (x \leq_A y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_B \varphi(y))\,.$$

Un isomorphisme d'ordre est un morphisme bijectif. Dit autrement un isomorphisme d'ordre est une bijection croissante dont la réciproque est également croissante.
Dans un ensemble ordonné $(A, \leq)$, on dit que y est *successeur* de x quand

$$x < y \text{ et } \forall z \in A\, (x \leq z \leq y \Rightarrow (z = x \text{ ou } z = y))\ .$$

On note dans la suite $x \prec y$ pour y est successeur de x.

Exercice 7. Montrer que si $(A, \leq)$ est fini, alors la relation $\leq$ est la clôture transitive de la relation « successeur », c'est-à-dire qu'étant donnés x, $y \in A$, si $x \leq y$, $x = y$, où il existe une suite finie $x = x_0 \prec \cdots \prec x_n = y$ (pour $0 \leq i \leq n-1$, $x_i \prec x_{i+1}$, $x_0 = x$, $y_n = y$).

Exercice 8. Décrire à l'aide de graphe tous les ordres (à isomorphisme près) à 2, 3, et 4 éléments (ce sont des ordres finis, il suffit de représenter le graphe de la relation successeur associée à l'ordre d'après l'exercice précédent).

Exercice 9. Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné. Montrer que l'ordre $\leq$ est total si et seulement la relation $\not\leq$ est une relation d'ordre strict.

Exercice 10. Soient $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ deux ensembles ordonnés.

1. Montrer que si $(A, \leq)$ est totalement ordonné, toute bijection croissante de $(A, \leq)$ dans $(B, \leq)$ est un isomorphisme d'ordre.

2. Montrer que la propriété ci-dessus est fausse dès que $(A, \leq)$ n'est pas totalement ordonné.

Exercice 11 (somme linéaire). Soient deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ supposés disjoints, il existe plusieurs façons de définir un ordre sur $A \cup B$ la réunion disjointe de A et B, la plus simple étant de prendre la réunion des deux relations d'ordre qui est encore un ordre.

La somme linéaire (ou ordinale) $(A, \leq_A) \oplus (B, \leq_B)$ est l'ensemble ordonné $(A \cup B, \leq_{A \cup B})$, qui prolonge les deux ordres sur A et sur B et place tous les élements de B après ceux de A

$$x \leq_{A \cup B} y \text{ ssi } (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in A \wedge x \leq_A y) \text{ ou } (x \in B \text{ et } y \in B \wedge x \leq_B y)$$

(quand A et B ne sont pas disjoints on peut toujours définir lma somme disjointe en posant $A \uplus B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ et l'ordonner en adaptant la définition ci-dessus).

1. Montrer que si A et B sont totalement ordonnés leur somme linéaire également.

2. Montrer que si A et B sont bien ordonnés leur somme linéaire également.

Exercice 12 (produit). Il existe de même plusieus façon de définir un ordre sur le produit cartésien de deux enembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$. L'ordre lexicographique sur le produit $(A, \leq_A) \circ (B, \leq_B)$ est l'ordre $(A \times B, \leq_{A \times B})$ défini par

$$(x, y) \leq_{A \times B} (x', y') \text{ ssi } x <_A x' \text{ ou } x = x' \wedge y \leq_B y'$$

1. Montrer que si A et B sont totalement ordonnés l'ordre lexicographique sur le produit également.

2. Montrer que si A et B sont bien ordonnés l'ordre lexicographique sur le produit également.

Exercice 13. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, ordonnés par restriction de l'ordre usuel, lesquels sont de bons ordres ?

1. $\{-\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;

2. $\{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;

3. $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;

4. $\{0\} \cup \{-\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;

5. $\{1 - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2 - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;

6. $\{1\} \cup \{1 - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1 + \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$;

7. $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{p - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que ceux qui sont des bon ordres se construisent par somme et produit à partir des bons ordres $(\mathbb{N}, \leq)$ et $\{1\}$.

Exercice 14 (Une version faible des suites de Goodstein). La suite $(g_n(a))$ (version faible d'une suite de Goodstein) est définie par récurrence à partir de $g_O(a) = a$. On a $g_{n+1}(a) = 0$ si $g_n(a) = 0$. Sinon on décompose $g_n(a)$ en base $n + 2$, et on prend pour $g_{n+1}(a)$ le prédécesseur de l'entier de même décomposition en base $n + 3$. Une définition précise est donnée ci-dessous. Le but de l'exercice est de montrer que quel que soit l'entier a, la suite $g_n(a)$ finit par s'annuler, elle croît pourtant très rapidement pour les premières valeurs de n.

Si $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, alors x est un successeur (lemme 1.1 du cours), et on note $x - 1$ l'unique antécédent de x par s (s est injective). La fonction $h : (\mathbb{N} - \{0, 1\}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par cas :

– si $x = 0$, $h(k, 0) = 0$

– Si $x > 0$, soit $(a_i) \in \mathcal{S}$ sa décomposition dans la base k, c'est-à-dire que si p est le degré de (a_i), $x = \sum_{i=0}^{p} a_i k^i$, alors :

$$h(k, x) = h\left(k, \sum_{i=0}^{p} a_i k^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{p} a_i (k+1)^i\right) - 1 \;.$$

On définit ensuite la fonction $g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ par récurrence (on note $g_n(x)$ pour $g(n, x)$) :

$$g_0(x) = x \;; \quad g_{n+1}(x) = h(n + 2, g_n(x)) \;.$$

1. Vérifiez que h et g sont bien définies.

2. Calculer la suite $u_n = g_n(4)$ (vérifier que pour $n \geq 22$ $u_n = 0$).

3. On définit la relation notée $\prec$ sur l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers naturels :

$$(a_n) \prec (b_n) \text{ si et seulement si } \exists p \in \mathbb{N} \; (a_p < b_p \text{ et } \forall n > p \; a_n = b_n).$$

Montrer que l'on a bien défini un ordre strict, que l'ordre est partiel (non total) sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, mais que cet ordre est total sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites d'entiers naturels nulles à partir d'un certain rang.

4. Montrer que pour (a_n), $(b_n) \in \mathcal{S}$,

$$\deg((a_n)) < \deg((b_n)) \Rightarrow (a_n) \prec (b_n) \;.$$

5. Montrer que l'ordre défini à la question précédente est un bon ordre sur $\mathcal{S}$.

6. On associe à l'entier $g_k(x)$ la suite (nulle à partir d'un certain rang) $G_k(x)$ des ses coefficients dans la base $k+2$: si $g_k(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (k+2)^i$, $G_k(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$. Montrer que si $G_k(x)$ n'est pas la suite nulle, $G_{k+1}(x) < G_k(x)$.

7. En déduire que pour tout x la suite $(g_n(x))$ est nulle à partir d'un certain rang. (*Remarque : si on calcule sur un ordinateur personnel les termes consécutifs de la suite $g_n(x)$ en utilisant la définition par récurrence, le temps de calcul devient à peu près rédhibitoire dès que $x = 8$*).