Feuille d'exercices n°7

cardinalité

Pour les exercices qui suivent, on suppose AC.

Exercice 1. On note $\bigoplus_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}$ la somme disjointe des A_i. Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$:

$$\mathrm{card}(\bigcup_{i\in I} A_i) \leqslant \mathrm{card}(\bigoplus_{i\in I} A_i)\ .$$

Exercice 2. Soient A et B deux ensembles tels que $\mathrm{card}\, A \leqslant \mathrm{card}\, B$, A contient au moins deux éléments, et B est infini. Montrer que $\mathrm{card}(A^B) = \mathrm{card}(2^B)$. Qu'advient-il de cette égalité si $\mathrm{card}\, A > \mathrm{card}\, B$?

Exercice 3 (Somme infinie de cardinaux). Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides telle que l'un au moins des ensembles A_i ou I lui-même est infini. Montrer que :

$$\mathrm{card}(\bigcup_{i\in I} A_i) \leqslant \sup(\{\mathrm{card}(A_i)\ /\ i \in I\} \cup \{\mathrm{card}(I)\})$$

et que l'égalité est réalisée si les A_i sont disjoints (on posera $\kappa = \sup(\{\mathrm{card}(A_i)\ /\ i \in I\} \cup \{\mathrm{card}(I)\})$; on utilisera $\kappa \times \kappa = \kappa$, qui nécessite AC, et à nouveau AC pour injecter $\cup_{i\in I} A_i$ dans $\kappa \times \kappa$).

Exercice 4. L'énoncé du lemme de König est le suivant.

Lemme de König. Soient $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles d'ensembles telles que $\mathrm{card}\, a_i < \mathrm{card}\, b_i$ pour tout $i \in I$. Alors $\sum_{i\in I} \mathrm{card}\, a_i < \prod_{i\in I} \mathrm{card}\, b_i$.

1. Obtenir le théorème de Cantor comme cas particulier du lemme de König.
2. Démontrer le lemme de König.

Exercice 5. Pour chaque ordinal α calculer le cardinal de $a = \{\beta \text{ ordinal } / \beta \sim \aleph_\alpha\}$.

Exercice 6. Pour chaque ordinal β calculer $\sum\limits_{\alpha\in\beta} \aleph_\alpha$ et $\sum\limits_{\alpha\leqslant\beta} \aleph_\alpha$.

Exercice 7. Montrer que si $\alpha > 0$ alors alors l'ensemble des points limite de $\aleph_\alpha$ a pour cardinal $\aleph_\alpha$ (on pourra se servir du résultat de l'exercice 3).

Exercice 8 (formule de Hausdorff). Le but de l'exercice est de montrer que pour tous ordinaux α et β, $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+1}$ (formule de Hausdorff).

1. Montrer la formule pour $\beta \geqslant \alpha + 1$.
2. Montrer que si $\mathrm{card}\, X < \aleph_{\alpha+1}$, et si f est une application de X dans $\aleph_{\alpha+1}$, alors $\bigcup_{x\in X} f(x) < \aleph_{\alpha+1}$ (un cardinal infini ayant une telle propriété est dit *régulier*). En déduire la formule pour $\beta < \alpha + 1$.
3. Application : en déduire que pour tout entier n, $\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}.\aleph_n$.

On rappelle qu'un ordinal β est *cofinal* à α si et seulement si il existe une application de β dans α strictement croissante, non strictement majorée. La *cofinalité* de α, $\mathrm{cof}(\alpha)$, est le plus petit ordinal cofinal à α. Un ordinal infini α tel que $\alpha = \mathrm{cof}(\alpha)$ est dit *régulier*. Tout ordinal régulier est un cardinal. Un cardinal infini qui n'est pas régulier est dit *singulier*.

Exercice 9. Soit κ un cardinal infini. Montrer les équivalences suivantes :

1. κ est régulier
2. pour tout $X \subseteq \kappa$, si $\mathrm{card}(X) < \kappa$ alors $\sup(X) < \kappa$
3. toute application d'un ordinal $\alpha < \kappa$ dans κ est bornée dans κ
4. toute application strictement croissante d'un ordinal $\alpha < \kappa$ dans κ est bornée dans κ

Exercice 10.

1. Montrer qu'un cardinal infini κ est singulier si est seulement s'il est somme d'un nombre strictement inférieur de cardinaux strictement inférieurs : $\kappa = \sum_{i\in I} \xi_i$, avec $\mathrm{card}\, I < \kappa$ et $\forall i \in I\ \xi_i < \kappa$.
2. Montrer que $\aleph_0$ et tous les cardinaux successeurs $\aleph_{\alpha+1}$ sont réguliers.
3. Donner des exemples de cardinaux singuliers. Montrer qu'il existe des cardinaux singuliers arbitrairement grands.

Exercice 11.

1. Montrer que si $\aleph_\alpha$ est un cardinal régulier tel que $\alpha \neq 0$ est un ordinal limite, alors $\alpha = \aleph_a$ (un tel cardinal est dit faiblement inaccessible, on ne peut pas montrer qu'il en existe dans ZFC).
2. Montrer (dans ZFC) l'existence de cardinaux singuliers $\aleph_\alpha$ tels que $\aleph_\alpha = \alpha$.