Feuille d'exercices n°6

Axiome du choix, cardinalité

L'axiome du choix dépendant (ACD) est l'énoncé suivant.

ACD. Pour tout ensemble E, pour toute relation binaire R sur E, telle que $\forall x \exists y\ x\ R\ y$, pour tout $a \in E$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n\ R\ u_{n+1}$.

L'axiome du choix dénombrable est l'axiome du choix dans le cas dénombrable, par exemple :

AC$_\omega$. Le produit d'une famille dénombrable d'ensembles tous non vides est non vide.

Exercice 1.

1. Montrer dans ZF que l'axiome du choix a pour conséquence ACD et AC_ω.
2. Montrer dans ZF que ACD a pour conséquence AC_ω.

Exercice 2. Soit A un ensemble. Montrer (sans axiome du choix) que les énoncés suivants sont équivalents :

1. A contient un sous-ensemble dénombrable ;
2. Pour tout ensemble au plus dénombrable B, $A \cup B$ est équipotent à A ;
3. A est en bijection avec une partie propre de A (on dit que A est *infini au sens de Dedekind*).

On montre sans AC que si l'ensemble A satisfait l'un des énoncés de la question précédente, il est infini, c'est-à-dire qu'il n'est équipotent à aucun entier, et la réciproque avec AC. En fait l'axiome du choix dénombrable AC_ω suffit : voir exercice suivant.

Exercice 3. Montrer que l'axiome du choix dénombrable AC$_\omega$ suffit pour montrer les propriétés suivantes.

1. La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
2. Pour tout ensemble a, ω est subpotent à a si et seulement si tout entier est subpotent à a.
3. ω est subpotent à tout ensemble infini (c'est-à-dire tout ensemble qui n'est en bijection avec aucun entier).

Exercice 4. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

1. l'ensemble des suites croissantes $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
2. l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
3. l'ensembles des applications continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
4. l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$;
5. l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.

On rappelle qu'étant donné un ensemble a, on définit χ_a comme la classe des ordinaux qui s'injectent dans a. On montre que χ_a est un ordinal, appelé *ordinal de Hartogs* de a ; χ_a ne s'injecte pas dans a ; c'est le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans a. C'est donc donc un ordinal initial (ou cardinal).

Exercice 5 (Lemme de Zorn). Le lemme de Zorn énonce que si un ensemble ordonné $(E, \leqslant$ $)$ est *inductif*, c'est-à-dire que tout sous-ensemble de E totalement ordonné par $\leqslant$ possède un majorant dans E, alors E possède un élément maximal. On appellera *chaîne* de $(E, \leqslant)$ un sous-ensemble de E totalement ordonné par $\leqslant$.

1. Montrer que le lemme de Zorn se déduit du principe de maximalité de Hausdorff : soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, alors l'ensemble des chaînes de $(E, \leqslant)$, ordonné par inclusion possède un élément maximal.
2. Montrer le principe de maximalité de Hausdorff en utilisant AC et par induction transfinie (soit sur la classe des ordinaux, soit sur l'ordinal de Hartogs de l'ensemble de départ).
3. Montrer que le lemme de Zorn a pour conséquence AC, et en déduire que AC, lemme de Zorn et principe de Hausdorff sont équivalents à AC dans la théorie ZF (sans AC ni AF).

Exercice 6 (Propriété de caractère fini). Un ensemble $\mathcal{S}$ de parties de E est dit de *caractère fini* quand pour toute partie A de E :

$$A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall X \subset A (X \text{ finie } \Rightarrow X \in \mathcal{S})\ .$$

Une propriété de caractère fini sur $\mathcal{P}(E)$ est une propriété telle que l'ensemble des parties de E vérifiant cette propriété est de caractère fini.

1. Montrer que l'ensembles des sous-ensembles de vecteurs indépendants d'un espace vectoriel E est de caractère fini.
2. Montrer, à l'aide du lemme de Zorn, qu'un ensemble de parties de caractère fini possède un élément maximal.
3. Montrer que la propriété « être une chaîne » est de caractère fini et déduire le lemme de Zorn de l'énoncé de la question **2**.
4. Déduire l'axiome du choix de l'énoncé de la question **2**.

Exercice 7 (HGC implique AC – Sierpinski 1945). Le but de l'exercice est de montrer que l'hypothèse généralisée du continu HGC (sous la forme donnée ci-dessous) a pour conséquence l'axiome du choix dans la théorie ZF. Pour tout l'exercice on ne suppose donc pas AC.

On note $a \sim b$ pour a est équipotent à b (il existe une bijection de a dans b), $a \preccurlyeq b$ pour a est subpotent à b (il existe une injection de a dans b).

On adopte la forme suivante de l'hypothèse généralisée du continu (qui ne présuppose pas AC, ni ne fournit directement de bon ordre sur les ensembles de partie) :

$$\forall a\ \forall x\,[a \preccurlyeq x \preccurlyeq \mathcal{P}(a) \Rightarrow (x \sim a \vee x \sim \mathcal{P}(a))] \qquad \text{HGC}$$

On note $a \oplus b = a \times \{0\} \cup b \times \{1\}$, l'union disjointe de a et b.

Question préliminaire. Rappeler pourquoi, pour tous ensembles a et b :

$$\mathcal{P}(a \oplus \{0\}) \sim \mathcal{P}(a) \oplus \mathcal{P}(a)\ ; \quad \mathcal{P}(a \oplus b) \sim \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(b)\ .$$

On note $\mathcal{P}^k(a)$, $k < \omega$, l'ensemble des parties itéré k fois de a, avec $\mathcal{P}^0(a) = a$.

1. Soit u un ensemble, en reprenant la définition de χ_u, montrer que $\chi_u \preccurlyeq \mathcal{P}^3(u)$.
2. Montrer que si un ensemble u ne peut pas être bien ordonné, aucun des ensembles $\mathcal{P}^k(u)$, $k < \omega$, ne peut être bien ordonné.

Le but des questions suivantes est d'exploiter les résultats des deux questions précédentes et HGC pour montrer qu'un ensemble u peut forcément être bien ordonné.

3. Soit a un ensemble qui contient un ensemble dénombrable ($\omega \preccurlyeq a$), montrer que pour tout entier k :
$$\mathcal{P}^k(a) \oplus \{0\} \sim \mathcal{P}^k(a)\ ; \quad k \geqslant 1 \Rightarrow \mathcal{P}^k(a) \oplus \mathcal{P}^k(a) \sim \mathcal{P}^k(a).$$
4. Montrer que s'il existe un ensemble qui ne peut pas être bien ordonné, alors il existe un ensemble u qui ne peut pas être bien ordonné, et qui de plus contient un sous-ensemble dénombrable, et vérifie $u \sim u \oplus u$ (et donc $\forall k \in \omega\ \mathcal{P}^k(u) \oplus \mathcal{P}^k(u) \sim \mathcal{P}^k(u)$).
5. Soit a un ensemble tel que $a \oplus a \sim a$, et tel qu'il existe un sous-ensemble s de $\mathcal{P}(a)$ vérifiant $a \oplus s \sim \mathcal{P}(a)$.
   - **a.** Montrer qu'il existe une bijection, soit φ, de $a \oplus s$ dans $\mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a)$.
   - **b.** Montrer qu'il existe $c \in \mathcal{P}(a)$, tel que c n'est jamais la première projection de l'image par φ d'un élément de $a \times \{0\}$.
   - **c.** En déduire que $s \sim \mathcal{P}(a)$.
6. On suppose maintenant HGC. Soit u un ensemble tel que $\forall n < \omega\ \mathcal{P}^n(u) \oplus \mathcal{P}^n(u) \sim \mathcal{P}^n(u)$. Montrer en utilisant la question précédente que pour tout ensemble y et pour tout entier n :
$$y \preccurlyeq \mathcal{P}^n(u) \Rightarrow \big(y \preccurlyeq u \vee \exists k \leqslant n\ y \sim \mathcal{P}^k(u)\big)\ .$$
7. Déduire des questions précédentes que l'hypothèse généralisée du continu HGC entraîne l'axiome du choix.