Feuille d'exercices n°5 (ordinaux)

Dans la suite on appelle fonctionnelle une classe fonctionnelle, c'est-à-dire une classe définie par une formule à deux variables libres $F[x, y]$ vérifiant $\forall x, y, y' \, (F[x, y] \wedge F[x, y'] \Rightarrow y = y')$. Cette fonctionnelle est définie sur A si $\forall x \in A \ \exists y \ F[x, y]$, elle est de A dans B si elle est définie sur A est vérifie de plus $\forall x \in A \ \exists y \in B \ F[x, y]$. On peut noter une fonctionnelle $y = \theta(x)(\equiv F[x, y])$, par exemple $\theta(x) \in z$ est une abréviation de $\exists y \, (F[x, y] \wedge y \in z)$.

Exercice 1. Soit θ une fonctionnelle de On dans On

1. Montrer que si θ est strictement croissante alors pour tout ordinal α on a $\alpha \leqslant \theta(\alpha)$.
2. Si λ est un ordinal limite, on dit que θ est *continue* en λ si elle vérifie $\theta(\lambda) = \sup\{\theta(\gamma) \ : \ \gamma < \lambda\}$.
   Montrer que si θ est continue alors θ est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si pour tout ordinal α, $\theta(\alpha + 1) \geq \theta(\alpha)$ (resp. $\theta(\alpha + 1) > \theta(\alpha)$). Montrer que ce résultat est faux en général si l'on ne suppose plus que θ est continue.
3. Montrer que θ est continue et croissante si et seulement si pour tout ensemble non vide A d'ordinaux
$$\theta(\sup\{\alpha \ : \ \alpha \in A\}) = \sup\{\theta(\alpha) \ : \ \alpha \in A\}.$$
4. Montrer que les fonctionnelles $\beta \mapsto \alpha + \beta$ et $\beta \mapsto \alpha \times \beta$ sont continues et croissantes (préciser si elles sont strictement croissantes).

Exercice 2 (Arithmétique des ordinaux). Pour tous ordinaux α, β, γ vérifier :

1. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
2. $\alpha \times 0 = 0 \times \alpha = 0$
3. $\alpha \times 1 = 1 \times \alpha = \alpha$
4. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ *(associativité de l'addition)*
5. $\alpha \times (\beta + \gamma) = (\alpha \times \beta) + (\alpha \times \gamma)$ *(distributivité à droite)*
6. $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$ *(assoc. de la multiplication)*

Préalablement à la question 4, on pourra montrer que si λ est un ordinal limite, $\alpha + \lambda$ est un ordinal limite.

Exercice 3 (Arithmétique des ordinaux).

1. Montrer que $1 + \omega = \omega$ et $2 \times \omega = \omega$.
2. Montrer que $+$ et $\times$ ne sont pas commutatives.
3. Montrer que $\times$ n'est pas distributive à gauche sur $+$.
4. Montrer que tout ordinal β s'écrit de manière unique $\beta = \lambda + n$ où $n \in \omega$ et λ est un ordinal limite ou nul.
5. Simplifier $\omega + (\omega + 1) + (\omega + 2) + \omega + 3$ et $\omega + ((\omega \times 2) \times \omega)$.

Exercice 4. Montrer que la somme de deux ordinaux α et β en tant qu'ensembles ordonnés est isomorphe à $\alpha + \beta$. Même question pour le produit (défini par l'ordre anti-lexicographique, cf. feuille 3).

Exercice 5. Soit ϕ une fonctionnelle de On dans On (définie par une formule) et λ un ordinal limite. On rappelle que ϕ est dite *continue* en λ quand elle vérifie $\phi(\lambda) = \sup\{\phi(\gamma) \ : \ \gamma < \lambda\}$.

1. La fonctionnelle qui à un ordinal associe son successeur est-elle continue en tout ordinal limite ?
2. Les "fonctionnelles" ϕ_1 et ϕ_2 définies par $\phi_1(\alpha) = \alpha + \omega$ et $\phi_2(\alpha) = \omega + \alpha$ sont elles continues en $\alpha = \omega$?
3. On suppose que la fonctionnelle ϕ est strictement croissante et continue en tout ordinal limite. On rappelle
$$\phi^0(\alpha) = \alpha, \quad \phi^{n+1}(\alpha) = \phi(\phi^n(\alpha)) \ .$$
   - **a.** Expliquez pourquoi $\{\phi^n(\alpha) \ : \ n \in \omega\}$ est bien un ensemble.
   - **b.** Soit $\beta = \sup\{\phi^n(\alpha) \ : \ n \in \omega\}$. Montrer que pour tout ordinal $\gamma < \beta$ on a $\phi(\gamma) < \beta$.
   - **c.** Vérifier que si $\phi(\alpha) \neq \alpha$ alors la suite $(\phi^n(\alpha))_{n \in \omega}$ est strictement croissante et β est un ordinal limite.
   - **d.** Montrer que ϕ a un point fixe : il existe un ordinal γ tel que $\phi(\gamma) = \gamma$.
   - **e.** Trouver un point fixe de la fonctionnelle ϕ_2.
   - **f.** Montrer que l'on peut définir une fonctionnelle de On dans On qui à tout ordinal α associe le α-ième ordinal limite. Montrer que cette fonctionnelle a un point fixe.

Exercice 6 (Théorème de Cantor-Bendixson). Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dit parfait quand il est fermé non vide sans points isolés. L'ensemble dérivé d'un ensemble A, noté A' est l'ensemble des ses points d'accumulation.

1. Montrer que A est fermé si et seulement si $A' \subseteq A$, et que A est parfait si et seulement $A \neq \emptyset$ et $A = A'$.
2. Donner un exemple d'ensemble dérivé qui contient une infinité dénombrable de points isolés.

Soit F un ensemble fermé. On définit par récurrence sur les ordinaux une suite F_γ :
$$F_0 = F, \quad F_{\gamma+1} = (F_\gamma)', \quad F_\gamma = \bigcap_{\eta < \gamma} F_\eta \quad (\gamma \text{ limite}) \ .$$

3. Montrer que pour tout ordinal γ, F_γ est fermé, et que la suite ordinale (F_γ) est décroissante (pour l'inclusion).
4. Montrer qu'il existe un ordinal α tel que $F_{\alpha+1} = F_\alpha$ et la suite est strictement décroissante jusqu'à F_α.
5. Montrer que $F \setminus F_\alpha = \bigcup_{\eta < \alpha} (F_\eta \setminus F_{\eta+1})$, et que cette union est disjointe.
6. Montrer que pour tout $x \in F_\eta \setminus F_{\eta+1}$, il existe un intervalle ouvert à extrémités rationnelles U_x tel que $U_x \cap F_\eta = \{x\}$.
7. On rappelle que l'ensemble des intervalles ouverts à extrémités rationnelles est dénombrable (en bijection avec ω). En déduire que $F \setminus F_\alpha$ est au plus dénombrable, et que tout fermé est la réunion disjointe d'un ensemble parfait ou vide et d'un ensemble au plus dénombrable.