Feuille d'exercices n°4

Axiome de remplacement, ordinaux

Exercice 1 (Ordre sur les entiers). On appelle $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers de von Neumann (le plus petit ensemble auquel 0 appartient et qui est clos par $n \mapsto n^+ = n \cup \{n\}$). On rappele que la définition donne directement la propriété de récurrence, et que $\forall n \in \mathbb{N}(n = 0 \vee \exists k \in \mathbb{N}\ n = k^+)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   - **a.** $\forall m(m \in n \Rightarrow m \in \omega)$;
   - **b.** $\forall m(m \in n \Rightarrow m \subseteq n)$;
   - **c.** $n \notin n$;
   - **d.** $0 \in n^+$.

   En déduire que $\in$ est un ordre strict sur $\mathbb{N}$ et, en particulier, que les trois cas $n \in m$, $m = n$ et $m \in n$ sont exclusifs.
2. Montrer par récurrence sur n que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $m \subseteq n \Leftrightarrow (m \in n \vee m = n)$.
   c'est-à-dire que l'ordre large associé à l'ordre strict $\in$ est l'inclusion large $\subseteq$.
3. Montrer par récurrence que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $n \in m \vee m = n \vee m \in n$.
   c'est-à-dire que l'appartenance défini un ordre strict total sur $\mathbb{N}$.
4. Montrer que la fonction successeur $n \mapsto n^+$ est injective sur $\mathbb{N}$.
5. Montrer que l'appartenance définit un bon ordre strict sur $\mathbb{N}$ de plus petit élément 0 et tel que n^+ est le plus petit des majorants stricts de n.

Exercice 2 (Propriétés de l'addition et de la multiplication sur les entiers). Montrer que, pour tous entiers $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$:

1. $m + (n + p) = (m + n) + p$
2. $n + 1 = n^+$
3. $1 + n = n + 1$
4. $m + n = n + m$
5. $n \neq 0 \Rightarrow m < m + n$
6. $m < n \Rightarrow \exists! p \neq 0\ m + p = n$
7. $\forall p(m < n \Leftrightarrow m + p < n + p)$
8. $m + n = 0 \Leftrightarrow (m = 0 \wedge n = 0)$
9. $1.n = n$
10. $m.(n + p) = m.n + m.p$
11. $(m.n).p = m.(n.p)$
12. $m.n = n.m$
13. $m.n = 0 \Leftrightarrow (m = 0 \vee n = 0)$
14. $\forall p \neq 0(m < n \Leftrightarrow m.p < n.p)$
15. $\forall p(m = n \Leftrightarrow m.p = n.p)$

Exercice 3. Montrer que pour tout ensemble a, il existe un ensemble b dont les éléments sont les $a, \mathcal{P}(a), \mathcal{P}(\mathcal{P}(a)), ...$

Exercice 4 (clôture transitive). Un ensemble t est dit *transitif* quand chacun des éléments de t est aussi un sous-ensemble de t : $\forall x \in t\ x \subseteq t$ (c'est-à-dire $\forall x \in t\ \forall y \in x\ y \in t$)

1. Montrer qu'un ensemble t est transitif si et seulement si $\cup t \subseteq t$.
2. Montrer qu'un ensemble transitif t vérifie $\forall x(x \subseteq t \Rightarrow \cup x \subseteq t)$.
3. Soit a un ensemble. On pose $\pi(a) = \cup a$. Expliquer comment définir $\pi^n(a)$ pour $n \in \omega$, et justifier qu'il existe un ensemble b dont les éléments sont les $\pi^n(a)$ pour $n \in \omega$ (a fixé).
4. Montrer que $\cup b$ est transitif et que c'est le plus petit ensemble transitif contenant a, c'est-à-dire que si $a \subseteq t$ et si t est transitif alors $\cup b \subseteq t$. L'ensemble $\cup b$ est appelé la *clôture transitive de a*.

Exercice 5 (Modèles de la théorie de Zermelo). En utilisant les résultats des deux exercices précédents, on définit pour un ensemble a donné t_a sa clôture transitive et $M_a = \cup_{n\in\omega}\mathcal{P}^n(t_a)$.

1. Montrer que si t est transitif, pour tout entier n, $\mathcal{P}^n(t)$ est transitif, et $\mathcal{P}^n(t) \subseteq \mathcal{P}^{n+1}(t)$.
2. Montrer que pour tout ensemble a, M_a est l'unique ensemble tel que :
   - **i.** $a \in M_a$;
   - **ii.** M_a est transitif ;
   - **iii.** M_a est clos par ensemble des parties : si $x \in M_a$, $\mathcal{P}(x) \in M_a$;

  iv. M_a est clos par union : si $x \in M_a$, alors $\cup x \in M_a$;
  v. Si a est un ensemble transitif, M_a est inclu dans tout ensemble M', transitif clos par ensemble de parties, et tel que $a \in M'$.

3. Montrer que M_a est clos par paire : $\forall x, y \in m_a\ \{x, y\} \in M_a$.

4. Montrer que M_a muni de la relation d'appartenance restreinte à M_a ($\in_{M_a} = \{(x, y) \in M_a \times M_a \ / \ x \in y\}$ est un modèle des axiomes de la théorie de Zermelo, excepté (éventuellement) l'axiome de l'infini.
Ce résultat est un théorème de la théorie ZF : en admettant le fait assez intuitif qu'il est possible de représenter dans ZF les formules du langage de la théorie des ensembles, puis de définir la relation de satisfaction, en suivant les définitions du cours de théorie des modèles (pour des détails voir Krivine, *Théorie des ensembles*, chap. 5), la démonstration se fait alors dans ZF.

5. On prend $a = \emptyset$. Montrer que $M_\emptyset = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}^n(\emptyset)$ (cf. exercice 3). On note habituellement $M_\emptyset = V_\omega$. Montrer dans ZF que V_ω muni de l'appartenance restreinte à V_ω n'est pas modèle de l'axiome de l'infini (on peut d'abord montrer que pour tout $n \in \omega$, $n \notin \mathcal{P}^n(\emptyset)$).
Remarque : on peut aussi montrer que $(V_\omega, \in_{V_\omega})$ est modèle du schéma d'axiomes de remplacement, essentiellement car tout élément de V_ω est un ensemble fini, et que l'image par une application d'un ensemble fini est fini.

6. On prend $a = \omega$.
  a. Montrer que $M_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}^n(\omega)$. Puis montrer dans ZF que M_ω, muni de l'appartenance restreinte à M_ω est un modèle de la théorie de Zermelo. On rappelle que l'union est croissante (question 1) et, pour $x \in M_\omega$, on note $r(x)$ le plus entier n tel que $x \in \mathcal{P}^n(\omega)$.
  b. Montrer que dans ce modèle, il n'existe pas d'ensemble contenant $\emptyset$ et clos par $x \mapsto \{x\}$ (on pourra poser $s(x) = \{x\}$, et montrer que pour tout $n \in \omega$, $r(s^n(\{\emptyset\}) = n)$.
  Ceci montre que l'axiome de l'infini de l'article de Zermelo de 1908 n'est pas vérifié dans ce modèle, et n'est donc pas conséquence de la théorie Z (théorie de Zermelo avec axiome de l'infini à la von Neumann). Il est conséquence de ZF (par remplacement).
  c. Montrer que dans ce modèle il n'existe aucun ensemble a contenant $\emptyset$ et clos par ensemble des parties (on pourra montrer que pour tout $n \in \omega$, $r\left(\mathcal{P}^{n+2}(\{\emptyset\})\right) = n$).
  Par conséquent il n'est pas possible de montrer que V_ω est un ensemble dans la théorie de Zermelo.

Exercice 6 (ordinaux, définition). Par définition, α est un ordinal si et seulement si α est un ensemble transitif strictement bien ordonné par la relation d'appartenance.

1. Montrer que tout élément d'un ordinal est un ordinal.
2. Montrer que $\emptyset$ est un ordinal et que pour tout ordinal $\alpha \neq \emptyset$, $\emptyset \in \alpha$.
3. Montrer que $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ n'est pas un ordinal.
4. Montrer que si α est un ordinal, alors $\cup\alpha$ et $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ sont des ordinaux.
5. Montrer que ce n'est pas en général le cas pour $\mathcal{P}(\alpha)$.
6. Montrer que si α est un ordinal alors $\alpha = \cup\alpha$ ou $\alpha = (\cup\alpha)^+$.

Exercice 7 (ensemble d'ordinaux). Soit A un ensemble non vide d'ordinaux.

1. Montrer que si A est transitif alors A est un ordinal.
2. Montrer que $\cap A$ et $\cup A$ sont deux ordinaux. Que peut-on dire au sujet de l'appartenance à A de ces deux ordinaux ?

Exercice 8 (trichotomie ordinale).

1. Soit α un ordinal. Montrer qu'il y a équivalence entre :

  a. $\beta \subseteq \alpha$ et β est un ordinal ; **b.** β est un segment initial de α ; **c.** $\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$.

2. En déduire la propriété de trichotomie ordinale : si α et β sont deux ordinaux alors ou bien $\alpha \in \beta$, ou bien $\alpha = \beta$, ou bien $\beta \in \alpha$ (les 3 cas sont exclusifs).