Feuille d'exercices n°3

Ordres et bons ordres

Exercice 1 (Relation bien fondée).
Un élément m de A est minimal au sens strict pour la relation R sur l'ensemble A signifie que :

$$\forall x \in A \neg x \, R \, m \ .$$

Une relation R est *bien fondée* sur un ensemble X quand toute partie non vide de X possède un élément minimal au sens strict pour R. On dit aussi que (X, R) est bien fondé.

1. Montrer que (X, R) est bien fondé si et seulement s'il vérifie le principe d'induction :

$$\forall B \subseteq X \\ \Big(\forall x \in X \,\big(\forall y \in X (y \, R \, x \Rightarrow y \in B) \Rightarrow x \in B\big) \Rightarrow X = B\Big)$$

2. Montrer qu'un ensemble strictement ordonné $(X, <)$ est bien ordonné si et seulement s'il est totalement ordonné et bien fondé.

En particulier, dans le cas où $(X, <)$ est totalement ordonné, $(X, <)$ est un bon ordre ssi $(X, <)$ satisfait le principe d'induction.

Exercice 2 (Somme d'ordres). Soit I un ensemble strictement ordonné par $<_I$, Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles strictement ordonnés, l'ordre sur A_i est noté $<_{A_i}$. L'union disjointe de la famille $(A_i)_{i \in I}$ est par définition

$$\biguplus_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i \times \{i\} \ .$$

On l'ordonne de la façon suivante (ordre antilexicographique, c'est-à-dire l'ordre lexicographique en partant de la fin) :

$$(a, i) < (b, j) \text{ ssi } \begin{cases} i <_I j \\ \textit{ou} \\ i = j \text{ et } a <_{A_i} b \end{cases}$$

1. Montrer que la relation définie ci-dessus est bien une relation d'ordre strict sur l'union disjointe des A_i, et que de plus, si $(I, <_I)$ et les $(A_i, <_{A_i})$ sont strictement bien ordonnés, cette relation est un bon ordre strict.
2. Dans le cas où $I = \{0, 1\}$ on obtient la somme des deux ordres $(A_0, <_{A_0})$ et $(A_1, <_{A_1})$, dans le cas où la suite $(A_i, <_{A_i})$ est constante égale à $(A, <_A)$ on obtient le produit des ordres $(A, <_A)$ et $(I, <_I)$. Montrer que ni la somme ni le produit ne sont commutatifs à isomorphismes près, mais qu'ils sont tous deux associatifs à isomorphisme près.
3. Vérifier que la somme et le produit de deux entiers m et n, en tant qu'ensembles ordonnés, est isomorphe respectivement à $m + n$ et $m.n$.
4. Trouver des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ isomorphes (pour l'ordre) à la somme et au produit antilexicographique de ω et ω.

Exercice 3. Un *segment initial* d'un ensemble totalement ordonné $(E, <)$ est un sous-ensemble I de E tel que :

$$\forall x \in I \ \forall y \in E \ (y < x \Rightarrow y \in I)$$

Un *segment initial propre* de $(E, <)$ est un segment initial distinct de E.

1. Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné isomorphe à un de ses segments initiaux propres.
2. Trouver un exemple de deux ensembles totalement ordonnés non isomorphes mais tels que chacun est isomorphe à un segment initial propre de l'autre.

Exercice 4 (Ensembles transitifs).

1. Est-il vrai que si un ensemble a est transitif alors la restriction de $\in$ à cet ensemble est transitive ? Et la réciproque ?
2. Montrer que si a est un ensemble transitif alors $a^+ = a \cup \{a\}$, $\bigcup a$ et $\mathcal{P}(a)$ sont transitifs.
3. Montrer que pour tout ensemble a il y a équivalence entre :
   - **a.** a est transitif ;
   - **b.** $a \subseteq \mathcal{P}(a)$;
   - **c.** $\cup a \subseteq a$;
   - **d.** $\forall b \, (b \subseteq a \Rightarrow \cup b \subseteq a)$;
   - **e.** $\mathcal{P}(a)$ est transitif ;
   - **f.** $\cup(a^+) = a$, où $a^+ = a \cup \{a\}$.

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout segment initial I d'un ensemble bien ordonné $(E, <)$:

$$I \neq E \Rightarrow \exists x \in E \ I = \{y \in E \ / \ y < x\} \ .$$

2. Soit $(E, <)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $\mathcal{I}_E$ l'ensemble des segments initiaux de $(E, <)$. Montrer que $(E, <)$ est bien ordonné si et seulement si $(\mathcal{I}_E, \subsetneq)$ est bien ordonné. Comparer ces deux ensembles ordonnés.
3. Montrer qu'un ensemble bien ordonné $(E, <)$ n'est jamais isomorphe à un de ses segments initiaux propres.