Feuille d'exercices n°2

Relations entre les axiomes, entiers, ensembles finis

Exercice 1 (Schéma de remplacement). On trouve dans certains livres (Cori-Lascar, Krivine, ...) une version du schéma d'axiomes de remplacement un peu plus générale que celle donnée en cours : l'hypothèse de fonctionnalité est affaiblie de la façon suivante. On va dire que la formule $\Phi(x, y, \vec{p})$ est une fonctionnelle partielle en x (à $\vec{p}$ fixés) quand :

$$\forall x \forall y \forall y' (\Phi(x, y, \vec{p}) = \Phi(x, y', \vec{p}) \Rightarrow y = y') \ .$$

On modifie le schéma de remplacement en remplaçant l'hypothèse que $\Phi(x, y, \vec{p})$ est une fonctionnelle (définie sur tout l'univers), par celle que $\Phi(x, y, \vec{p})$ est une fonctionnelle partielle :

$$\forall \vec{p}[\forall x \forall y \forall y' (\Phi(x, y, \vec{p}) = \Phi(x, y', \vec{p}) \Rightarrow y = y') \Rightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in b \Leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \Phi(x, y, \vec{p})))] \quad (\mathrm{SR}')$$

1. Montrer que cette version du schéma de remplacement (SR') a pour conséquence le schéma de compréhension restreint (SCR).
2. Soit $\Phi(x, y, \vec{p})$ une formule qui est une fonctionnelle partielle en x, et a un ensemble tel que $\exists x\,(x \in a \wedge \Phi(x, y, \vec{p}))$. Montrer que l'on peut alors montrer en utilisant (SR) (le schéma de remplacement du cours) l'existence d'un ensemble b vérifiant $\forall y (y \in b \Leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \Phi(x, y, \vec{p})))$.
3. En déduire que (SR') est conséquence de (SR) et de l'axiome de l'ensemble vide $\exists x \forall y\ y \notin x$, donc de (SR) et de (SCR).

Exercice 2. Montrer que l'axiome de la paire se déduit des autres axiomes de la théorie des ensembles : utiliser l'ensemble vide (SCR), et l'axiome de l'ensemble des parties, pour construire un ensemble contenant deux éléments distincts, puis le schéma de remplacement.

Un ensemble N, muni d'une constante $0 \in N$ et d'une fonction s (successeur) de $\mathbb{N}$ dans N est appellée *structure de Peano* quand elle vérifie :

successeur non nul $\forall x \in N\ s(x) \neq 0$;

injectivité du successeur $\forall x, y \in N\ (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$;

Récurrence Pour tout ensemble d'entiers I :

$$[0 \in I \wedge \forall y \in N\,(y \in I \Rightarrow s(y) \in I)] \Rightarrow N = I \quad .$$

Exercice 3. On admet provisoirement l'existence d'une structure de Peano soit $\mathbb{N}$. Une suite se définit comme une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$. On utilise les notations usuelles. Montrer que, dans la théorie des ensembles de Zeremlo avec axiome de Fondation, il n'existe pas de suite infinie décroissante pour l'appartenance.

Exercice 4 (entiers de von Neumann). Déduire de l'axiome de l'infini qu'il existe une structure de Peano, pour laquelle le 0 est l'ensemble vide, et la fonction successeur : $x \mapsto x \cup \{x\}$.

Dans la suite, l'ensemble ainsi construit est noté $\mathbb{N}$, c'est l'ensemble des entiers de von Neumann.

Exercice 5. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (définition de von Neumann) est exactement l'ensemble des ordinaux finis (exercice 7 de la feuille 1). En déduire l'équivalence entre les définitions d'ensemble fini donnée dans la feuille 1 et la suivante : un ensemble A est fini s'il existe un entier naturel n tel que A soit en bijection avec l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$ des entiers naturels strictement plus petits que n.

Exercice 6 (définition par récurrence sur les entiers). Le principe de définition par récurrence sur $\mathbb{N}$ est le suivant : soit A un ensemble non vide, $a \in A$, une fonction $h : A \to A$, alors il existe une unique fonction $f : \mathbb{N} \to A$ vérifiant :

$$f(0) = a \ ; \qquad f(s(x)) = h(f(x)) \ . \qquad (*)$$

1. Montrer l'unicité par récurrence.

2. Montrer l'existence d'une telle fonction. On peut définir f comme l'intersection des sous-ensembles R de $\mathbb{N} \times A$ vérifiant :

$$(0, a) \in R \; ; \quad \forall x, y \; [(x, y) \in R \Rightarrow (s(x), h(y)) \in R]$$

Montrer que cette définition est correcte, que f ainsi définie est bien une fonction, et vérifie $(*)$.

Remarque : la théorie de Zermelo suffit, cela peut se montrer pour n'importe quelle structure de Peano, les deux premiers axiomes sont indispensables.

3. Montrer que toute structure de Peano est isomorphe à $\mathbb{N}$.

Vous verrez plus tard en cours des versions plus générales de la définition par récurrence, d'une part on peut étendre aux fonctionnelles (ceci utilise le schéma de remplacement), d'autre part la récurrence s'étend aux ordinaux.

Exercice 7 (ordre sur les entiers). La relation d'ordre $\leq$ peut se définir par récurrence sur les entiers, en utilisant :

- $\forall x \in \mathbb{N} \; (x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0)$;
- $\forall x, y \in \mathbb{N} \; [x \leq s(y) \Leftrightarrow (x \leq y \vee x = s(y))]$.

1. Expliquer précisément comment définir $\leq$ par récurrence sur les entiers, en utilisant le résultat de l'exercice 6.

2. Montrer que cette relation est bien une relation d'ordre large.

3. Vérifier que pour les entiers de von Neumann, la relation $\leq$ coïncide avec l'inclusion, et la relation d'ordre strict $<$ avec l'appartenance.

Exercice 8. Montrer que tout sous-ensemble des entiers est soit borné et en bijection avec $\{0, \ldots, n-1\}$ pour un certain n, soit non borné et en bijection avec $\mathbb{N}$ (on peut utiliser le résultat de l'exercice 6).

Exercice 9 (principe des tiroirs).

1. Montrer que, pour tout entier naturel n et p, s'il existe une injection de $\{0, \ldots, p-1\}$ dans $\{0, \ldots, n-1\}$, alors $p \leq n$.

2. En déduire que si A est un ensemble fini, il existe un seul entier n tel que A soit en bijection avec $\{0, \ldots, n-1\}$. Cet entier est appelé *cardinal* de A, et noté $\operatorname{card} A$.

3. Montrer que s'il existe une injection d'un ensemble fini A de cardinal p dans un ensemble fini B, de cardinal n alors $p \leq n$, ou encore (*principe des tiroirs de Dirichlet*) pour tous ensembles finis A et B, si $\operatorname{card} A > \operatorname{card} B$, il n'existe pas d'injection de A dans B.

Exercice 10. Dans cet exercice les entiers naturels sont les entiers naturels intuitifs). Soit $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble de parties finies de $\mathbb{N}$ et ϕ une bijection de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$ (il en existe, par exemple

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{N} \\ & X & \mapsto & \displaystyle\sum_{i \in X} 2^i \end{array} \quad)$$

On définit sur $\mathbb{N}$ une relation binaire $\in_\varphi$ par :

$$n \in_\varphi m \text{ ssi } n \in \varphi^{-1}(m) \; .$$

Montrer que $(\mathbb{N}, \in_\varphi)$ est un modèle des axiomes de ZF excepté l'axiome de l'infini.