Langage de la théorie des ensembles, ensembles finis

Dans cette feuille, sauf précision éventuelle, on travaille dans la théorie de Zermelo moins l'axiome de l'infini, et sans l'axiome du choix.

Exercice 1 (couples de Kuratowski).

1. Montrer en théorie des ensembles, en précisant le ou les axiomes utilisés que, pour tous, x, y, x', y' :

$$\{x, y\} = \{x', y'\} \text{ ssi } [(x = x' \wedge y = y') \vee (x = y' \wedge y = x')]$$

2. Justifier l'existence pour tous x et y de l'ensemble $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, et montrer que :

$$(x, y) = (x', y') \text{ ssi } (x = x' \wedge y = y') \ .$$

Exercice 2 (représentation des couples).

1. Vérifier que les définitions suivantes auraient pu convenir pour le couple. (0 désigne $\emptyset$ et 1 désigne $\{\emptyset\}$).

a. $(x, y)_1 = \{\{0, x\}, \{1, y\}\}$; **b.** $(x, y)_2 = \{\{x\}, \{0, y\}\}$; **c.** $(x, y)_3 = \{\{\{x\}, 0\}, \{\{y\}\}\}$.

2. Peut-on définir le triplet (x, y, z) par $(x, y, z) = \{x, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$?

Exercice 3 (produit cartésien).

1. Justifier l'existence, pour tous ensembles a et b du produit cartésien de a et b, c'est-à-dire montrer l'existence et l'unicité d'un ensemble, $a \times b$ vérifiant :
$z \in a \times b$ ssi $\exists x \exists y \ (x \in a \wedge y \in b \wedge z = (x, y))$.

2. Vérifier que $(1 \times 1) \times 1 \neq 1 \times (1 \times 1)$.

3. A-t-on en général : $(a \times a) \cup (b \times c) = (a \cup b) \times (a \cup c)$? $(a \times a) \cap (b \times c) = (a \cap b) \times (a \cap c)$?

4. A-t-on en général : $a \times b = c \times d \Rightarrow (a = c \wedge b = d)$? Trouver une condition suffisante non triviale pour que cette propriété soit vérifiée.

Exercice 4 (relations, fonctions). Une relation binaire est par définition un ensemble de couples.

1. Soit R une relation binaire. Définir (montrer l'existence et l'unicité) son ensemble de départ $dom(R)$ et son ensemble d'arrivée $rg(R)$.

2. Une relation binaire R est fonctionnelle quand $[(x, y) \in R \wedge (x, y') \in R] \Rightarrow y = y'$. Est-il possible que la composée de deux relations qui ne sont pas fonctionnelles soit fonctionnelle ?

Exercice 5 (langage de la théorie des ensembles). Montrer comment exprimer dans le langage de la théorie des ensembles (calcul des prédicats du premier ordre égalitaire de signature $\{\in\}$) les expressions suivantes :

1. sans utiliser d'abréviations : "x est un couple" ; "u est un ensemble de couples".

2. "r est une relation binaire sur a" ; "r est une relation d'équivalence sur a" ; "r est une relation d'ordre sur a" ; "r est une relation de bon ordre sur a".

3. "r est une relation d'équivalence et c est une classe d'équivalence de r".

4. "s est la restriction de r à a" où r est une application donnée dont le domaine contient a.

Exercice 6 (ensembles et classes). Dans cet exercice on appelle « classe » une partie de l'univers ensembliste définie par une formule du langage de la théorie des ensembles (avec éventuellement des paramètres). Par exemple la classe de tous les ensembles est définie par $x = x$, celle des ensembles qui ne s'appartiennent pas à eux mêmes par $x \notin x$. On dit qu'une classe définie par $\Phi[x, \vec{p}]$ à une variable libre est un ensemble quand :

$$\forall \vec{p} \exists a \forall x \, (\Phi[x, \vec{p}] \Leftrightarrow x \in a)$$

1. Rappeller pourquoi les deux classes définies ci-dessus ne sont pas des ensembles.

2. Montrer que ci-dessous on définit bien des classes (cf. exercice 5), et ces classes sont des ensembles.

a. les relations d'équivalence sur un ensemble a ;

b. les classes d'une relation d'équivalence r sur un ensemble a ;

c. la plus petite partie de a qui contient l'élément $b \in a$ et qui est stable par l'application f ;

d. les $\mathcal{P}(u)$ pour $u \in a$.

3. Montrer que l'on définit ci-dessous des classes qui ne sont pas des ensembles :
a. les $\mathcal{P}(u)$ où u décrit tous les ensembles. **b.** les singletons. **c.** les ensembles dont a est élément.

Exercice 7 (ordinaux finis). Un ensemble a est dit *transitif* quand : $\forall x \in a\ x \subseteq a$. Un *ordinal* est un ensemble transitif bien ordonné par l'appartenance (en tant qu'ordre strict). Les ordinaux seront étudiées en cours. On ne voit ici que les propriétés utiles pour les exercices suivants.

1. Montrer comment exprimer cette propriété dans le langage de la théorie des ensembles.

2. Montrer que $\emptyset$ est un ordinal.

3. Montrer que si α est un ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal. Celui-ci est appelé *successeur* de α, et noté α^+.

4. Montrer que tous les éléments d'un ordinal sont des ordinaux.

5. Montrer que pour tous ordinaux α et β, $\alpha \cup \{\alpha\} = \beta \cup \{\beta\} \Rightarrow \alpha = \beta$. En déduire que α est le successeur d'au plus un ordinal. Celui-ci est appelé (quand il existe) le *prédécesseur de* α.

6. Donner un exemple d'ordinal qui n'a pas de prédécesseur. Montrer que si un ordinal a un prédécesseur celui-ci est le plus grand parmi ses éléments.

Un *ordinal fini* est soit 0, soit un ordinal qui a un prédécesseur et dont tous les éléments sauf le plus petit ont un prédécesseur.

7. Montrer comment exprimer cette propriété dans le langage de la théorie des ensembles.

8. Montrer que $\emptyset$ est un ordinal fini, que le successeur d'un ordinal fini est un ordinal fini, et que tout élément d'un ordinal fini est un ordinal fini.

9. Soit $\Phi[x, a_1, \dots, a_n]$ une formule de la théorie des ensembles ayant au plus $x, a_1, \dots, a_n$ pour variables libres. Montrer la propriété de récurrence pour les ordinaux finis :

$$\forall a_1 \dots a_n\ \big(\Phi[\emptyset, a_1, \dots, a_n], \forall y(\Phi[y, a_1, \dots, a_n] \Rightarrow \Phi[y^+, a_1, \dots, a_n]) \Rightarrow \forall \alpha \text{ ordinal fini } \ \Phi[\alpha, a_1, \dots, a_n]\big)$$

(*Indication : pour un ordinal fini* α *donné, étudier* $\{\beta \in \alpha^+ \ / \ \Phi[\beta, a_1, \dots, a_n]\}$).

Exercice 8 (bon ordre fini). Une relation $<$ définit un *bon ordre fini* a, quand $(a, <)$ est un bon ordre strict qui vérifie de plus que tout sous-ensemble de a non vide possède un plus grand élément, ou encore c'est un bon ordre dont l'ordre réciproque est aussi un bon ordre.

1. Montrer comment exprimer la propriété : « l'ensemble $\mathcal{R}$ définit un bon ordre fini » dans le langage de la théorie des ensembles.

2. Montrer qu'un ordinal α est fini, si et seulement si $(\alpha, \ni)$ est un bon ordre. En déduire qu'un ordinal α est un ordinal fini si et seulement si $(\alpha, \in)$ est un bon ordre fini.

3. Soit $(a, \leq)$ un bon ordre strict. Si $x \in a$, on note $S_x^+(a) = \{z \in a \ / \ z \leq x\}$. Montrer que $\leq$ défini un bon ordre sur $S_x^+(a)$, et que si $(a, \leq)$ est un bon ordre fini, $(S_x^+(a), \leq)$ est un bon ordre fini.

4. Soit $(a, \leq)$ un bon ordre fini, $(a \neq \emptyset)$. Soit b l'ensemble des éléments x de a, tels que $S_x^+(a)$ est isomorphe à un ordinal fini.

a. Montrer que $b \neq \emptyset$.

b. Montrer que si $x \in b$, et si x a un successeur x' dans a, alors $x' \in b$.

c. En déduire que tout bon ordre fini est isomorphe à un ordinal fini.

Exercice 9 (ensembles finis). Voici quatre définitions possibles pour les ensembles finis.

i. a est en bijection avec un ordinal fini.

ii. il est possible de définir sur a un bon ordre fini.

iii. a appartient à tout ensemble X tel que :

$$\emptyset \in X \ ; \quad y \in X,\ x \in a \Rightarrow y \cup \{x\} \in X \ .$$

iv. tout ensemble non vide de parties de a possède un élément minimal pour l'inclusion.

1. Vérifiez que ces définitions s'expriment bien dans le langage de la théorie des ensembles.

Le but de la suite de l'exercice est de montrer qu'elles sont équivalentes.

2. Déduire de l'exercice précédent que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

3. Montrer que tout ensemble en bijection avec un ensemble vérifiant (iv) vérifie (iv).

4. Montrer que $\emptyset$ vérifie (iv) et que si x vérifie (iv), alors pour y quelconque, $x \cup \{y\}$ également.

5. Montrer que tout ordinal fini vérifie (iv), et que $(i) \Rightarrow (iv)$.

6. Montrer que $(iv) \Rightarrow (iii)$ (passer au complémentaire).

7. Pour un ensemble a donné, montrer que l'ensemble des parties de a en bijection avec un ordinal fini vérifient les conditions de (iii). En déduire que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Un ensemble est dit fini s'il vérifie l'une des définitions précédentes.

Exercice 10. En utilisant l'une des définitions précédentes montrer que :

1. tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini.

2. La réunion de deux ensembles finis est finie.

3. Une réunion finie (au sens intuitif) d'ensembles finis est finie.