M2– Cours fondamental 2 14-15
Théorie de la démonstration 24 octobre 2014

Feuille d'exercices n°3

calcul des séquents

Exercice 1. vérifier à l'aide du calcul des séquents que $\exists x \forall y(Bx \to By)$ (B prédicat à une place) est démontrable classiquement mais pas intuitionnistiquement.

Exercice 2. Montrer en logique intuitionniste que :

1. $(A \to B) \vee C \vdash A \to (B \vee C)$, mais $A \to (B \vee C) \nvdash (A \to B) \vee C$.

2. $\forall x\, Ax \vee B \vdash \forall x(Ax \vee B)$, mais $\forall x(Ax \vee B) \nvdash \forall x\, Ax \vee B$, avec x n'apparaît pas dans B.

Exercice 3. Montrer que la prouvabilité dans le système de calcul des séquents suivant, où seules les règles $\to_d$, $\neg_d$, et $\forall_d$ sont restreintes à une seule formule en prémisse (aucune pour $\neg_d$), équivaut à la prouvabilité dans le système de calcul des séquents intuitionniste avec une seule formule à droite vu en cours.

Dans cette formulation, les contextes sont des ensembles de formules, Γ, A signifie $\Gamma \cup A$, et il est possible que $A \in \Gamma$! Par exemple la dérivation $\frac{A[t/x], \forall x A \vdash C}{\forall x A \vdash C}$ est valide.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{ax.}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{g_d} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{g_g} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_{d_g} \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_{d_d}$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to_g \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to_{d_g} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to_{d_d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_g \qquad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_d$$

$$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \forall_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A[y/x]}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\ \forall_d\ (*)$$

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\ \exists_g\ (*) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\ \exists_d$$

$(*)$*Restriction* : y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, A, Δ.

Indication : montrer que si $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable dans ce système, $\Gamma \vdash \vee\Delta$ est dérivable en calcul des séquents intuitionniste.

Ce calcul des séquents peut être utilisé pour une démonstration de la complétude pour la sémantique de Kripke.

Exercice 4. On se place en calcul des prédicats sur les connecteurs et quantificateurs $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists$. La constante $\perp$ n'apparaît éventuellement qu'en conclusion d'un séquent, en déduction naturelle.

1. Compléter à tous les connecteurs la démonstration que si $\Gamma \vdash C$ est démontrable en calcul des séquents intuitionniste, alors ce même séquent est démontrable en déduction naturelle intuitionniste.

2. Même question pour la réciproque : si $\Gamma \vdash C$, resp. $\Gamma \vdash \perp$, est démontrable en déduction naturelle intuitionniste, alors, $\Gamma \vdash C$, resp. $\Gamma \vdash$ est démontrable en calcul des séquents intuitionniste.

Exercice 5. On se place en calcul des prédicats sur les connecteurs et quantificateurs $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists$. La constante $\perp$ n'apparaît éventuellement qu'en conclusion d'un séquent, en déduction naturelle.

1. Montrer que si $\Gamma \vdash C$ est dérivable en déduction naturelle classique alors, si $C \neq \perp$, $\Gamma \vdash C$ est dérivable en calcul des séquents classique, sinon $C = \perp$ et $\Gamma \vdash$ est dérivable en calcul des séquents classique.

2. Quand $\Delta = (B_1, \ldots, B_q)$, on note $\neg\Delta = (\neg B_1, \ldots, \neg B_q)$. Montrer que si $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable en calcul des séquents classique alors $\Gamma, \neg\Delta \vdash \perp$ est dérivable en déduction naturelle classique.

Exercice 6. On se place dans le fragment purement implicationnel (formules propositionnelles n'utilisant que $\to$). Proposer un procédé pour traduire une preuve normale de la déduction naturelle intuitionniste en une preuve sans coupure du calcul des séquents intuitionniste (indication : la preuve est par induction, mais pas « locale », utiliser la branche principale de la preuve en déduction naturelle). Généraliser aux formules utilisant les connecteurs $\to, \wedge, \forall$.