Feuille d'exercices n°2

déduction naturelle

La relation de déduction en logique intuitionniste (déduction naturelle) est notée $\vdash_i$, sa négation $\nvdash_i$.

Exercice 1. Soient α, β variables propositionnelles. Montrer que les énoncés suivant, valides classiquement, ne sont pas démontrables en logique intuitionniste :

1. $\alpha \vee \neg\alpha$;

2. $\neg\neg\alpha \to \alpha$;

3. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$;

4. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

Exercice 2. Soient A, B et C des formules du calcul des prédicats, α, β, γ des variables propositionnelles.

1. Montrer que si $\vdash_i \neg A \to (B \vee C)$, alors $\vdash_i \neg A \to B$ ou $\vdash_i \neg A \to C$.

2. Montrer que $\neg\alpha \to (\beta \vee \gamma) \nvdash_i (\neg\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \gamma)$.

Exercice 3. Ces formules sont-elles démontrables en logique intuitionniste ? Si oui donner une démonstration en déduction naturelle, sinon justifier qu'elles ne le sont pas.

1. $\exists x \neg\neg Ax \to \neg\neg\exists x Ax$;

2. $\neg\neg\exists x Ax \to \exists x \neg\neg Ax$;

3. $\forall x \neg\neg Ax \to \neg\neg\forall x Ax$;

4. $\neg\neg\forall x Ax \to \forall x \neg\neg Ax$;

Exercice 4. Soient α et β deux variables propositionnelles.

1. Montrer que $\alpha \to \beta \nvdash_i \neg\alpha \vee \beta$. Que pensez-vous de la réciproque ?

2. Soit Γ un ensemble fini de formules *sans autre connecteur que* $\wedge, \vee, \neg$. Montrer que $\Gamma, \alpha \vdash_i \beta$ entraîne $\Gamma \vdash_i \neg\alpha \vee \beta$.

3. En déduire que le connecteur $\to$ n'est pas définissable en logique intuitionniste à partir des connecteurs $\vee, \wedge, \neg$.

Exercice 5. Décrire toutes les preuves normales en déduction naturelle intuitionniste des énoncés suivant (α est une variable propositionnelle) :

1. $\alpha \to \alpha$ (une seule preuve normale) ;

2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ (deux preuves normales) ;

3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$ (une infinité de preuves normales) ;

4. $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ (idem).

Exercice 6. La preuve d est obtenue à partir des deux preuves $d_3[\alpha \to \alpha]$ et $d_2[\alpha]$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ d_3[\alpha \to \alpha]\\ \vdots\\ ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)) \to ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ d_2[\alpha]\\ \vdots\\ (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)\end{array}}{(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)}\to_e$$

où la preuve $d_2[A]$ (A une formule) est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\![A \to A]\!]^2 \quad \dfrac{[\![A \to A]\!]^2 \quad [\![A]\!]^1}{A}}{A}}{A \to A}\,1}{(A \to A) \to (A \to A)}\,2$$

et la preuve $d_3[A]$ est

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\![A \to A]\!]^2 \quad \dfrac{[\![A \to A]\!]^2 \quad \dfrac{[\![A \to A]\!]^2 \quad [\![A]\!]^1}{A}}{A}}{A}}{A \to A}\,1}{(A \to A) \to (A \to A)}\,2$$

Normaliser cette preuve suivant la procédure vue en cours. La preuve $d_2[A]$ utilise 2 occurrences mutifiées de $A \to A$, la preuve d_3 utilise 3 occurrences mutifiées de $A \to A$. Combien la preuve obtenue utilise-t-elle d'occurrences mutifiées de la formule $\alpha \to \alpha$? donner un résultat général pour des preuves $d_n[A]$ et $d_m[A]$ utilisant respectivement n et m occurrences de $A \to A$.

Exercice 7. On définit la relation $\Gamma \mid C$ entre un ensemble fini de formules Γ et une formule C du calcul propositionnel par induction sur C (il s'agit de la barre ou slash de Kleene, variante d'Aczel), la relation de déduction en logique intuitionniste est notée dorénavant simplement $\vdash$.

i. $\Gamma \mid \alpha$ ssi $\Gamma \vdash \alpha$, α variable propositionnelle ou $\perp$;

ii. $\Gamma \mid A \wedge B$ si $\Gamma \mid A$ et $\Gamma \mid B$;

iii. $\Gamma \mid A \vee B$ si $\Gamma \mid A$ ou $\Gamma \mid B$;

iv. $\Gamma \mid A \to B$ si $\Gamma \mid A$ entraîne $\Gamma \mid B$, et $\Gamma \vdash A \to B$.

1. Montrer que $\Gamma \mid C$ entraîne $\Gamma \vdash C$ (induction sur la structure de C).

2. Montrer que $A \to \alpha \mid A \to \alpha$, pour toute formule et α une variable propositionnelle ou $\perp$.

3. Montrer que si pour toute formule A de Γ, $\Gamma \mid A$, alors $\Gamma \vdash C$ entraîne $\Gamma \mid C$ (pour l'induction sur une preuve en déduction naturelle, on peut généraliser de la façon suivante : si pour toute formule A de Γ, $\Gamma \mid A$, et si $A_1, \ldots, A_n \vdash C$, alors $\Gamma \mid A_1, \ldots, \Gamma \mid A_n$ entraîne $\Gamma \mid C$).

4. En déduire la propriété de disjonction en logique intuitionniste.

5. Montrer plus généralement que si pour tout A appartenant à Γ, $\Gamma|A$, alors $\Gamma \vdash B \vee C$ entraîne $\Gamma \vdash B$ ou $\Gamma \vdash C$, et en déduire que si α est une variable propositionnelle ou $\perp$, $A \to \alpha \vdash B \vee C$ entraîne $A \to \alpha \vdash B$ ou $A \to \alpha \vdash C$. On retrouve ainsi le résultat de l'exercice 2.

Exercice 8. On étend la relation précédente à un ensemble fini de formules *closes* Γ et une formule *close* C du calcul des prédicats sur un langage $\mathcal{L}$. Aux 4 clauses précédentes on ajoute :

v. $\Gamma \mid \forall x\, Ax$ si $\Gamma \vdash \forall x\, Ax$, et pour tout terme *clos* t du langage $\mathcal{L}$, $\Gamma \vdash At$.

vi. $\Gamma \mid \exists x\, Ax$ si pour un terme *clos* t du langage $\mathcal{L}$, $\Gamma \mid At$.

1. Montrer que $\Gamma \mid C$ entraîne $\Gamma \vdash C$ (s'appuyer sur la démonstration de l'exercice précédent).

2. Montrer que si pour toute formule A de Γ, $\Gamma \mid A$, alors $\Gamma \vdash C$ entraîne $\Gamma \mid C$. On pourra montrer que si pour toute formule A de Γ, $\Gamma \mid A$, et si $A_1, \ldots, A_n \vdash C$, alors pour toute substitution σ de termes clos aux variables libres des $A_1, \ldots, A_n$ et C, $\Gamma \mid A_1^\sigma, \ldots, \Gamma \mid A_n^\sigma$ entraîne $\Gamma \mid C^\sigma$).

3. En déduire la propriété d'existence du calcul des prédicats, et plus généralement que si Γ est un ensemble de formules closes tel que pour tout A appartenant à Γ, $\Gamma|A$, si $\exists x\, Px$ est une formule close, et si $\Gamma \vdash \exists x\, Px$, alors $\Gamma \vdash Pt$ pour un certain terme clos t.

Exercice 9. On se place maintenant dans l'arithmétique de Heyting (langage $(0, s, +, \times)$. On note $\underline{n}$ le terme $s^n 0$. La relation $\mid$ est définie de la même façon mais en prenant pour $\vdash$ la relation $\vdash_{HA}$ de déduction dans l'arithmétique de Heyting (que l'on note $\vdash$ pour cet exercice).

1. Montrer que de la même façon qu'à l'exercice précédent $\Gamma \mid C$ entraîne $\Gamma \vdash C$ (vérifier simplement que la démonstration s'adapte au changement de la relation de déduction).

2. Montrer que pour tout terme clos t du langage de l'arithmétique, il existe un unique entier n_t tel que $t = \underline{n_t}$.

3. En déduire que la définition de la relation $\mid$ n'est pas modifiée si on remplace les deux dernières clauses par les suivantes :

v. $\Gamma \mid \forall x\, Ax$ si $\Gamma \vdash \forall x\, Ax$, et pour tout entier n du langage $\mathcal{L}$, $\Gamma \vdash A\underline{n}$.

vi. $\Gamma \mid \exists x\, Ax$ si pour un entier n, $\Gamma \mid A\underline{n}$.

4. En déduire que, pour une formule Ax à une variable libre, si t est un terme clos, et n est l'unique entier tel que $\vdash t = \underline{n}$, alors $\Gamma \mid At$ ssi $\Gamma \mid A\underline{n}$.

5. Montrer que si pour toute formule A de Γ, $\Gamma \mid A$, alors $\Gamma \vdash C$ entraîne $\Gamma \mid C$ (généraliser comme à l'exercice précédent).

6. En déduire la propriété d'existence pour l'arithémtique de Heyting : pour tout ensemble fini Γ de formules closes tel que pour tout $A \in \Gamma$, $\Gamma \mid A$ (en particulier Γ est vide) et toute formule close $\exists x\, Px$,

$$\text{si } \Gamma \vdash_{HA} \exists x Px \text{ alors pour un certain entier } n,\ \Gamma \vdash_{HA} P\underline{n}$$

7. Énoncer et démontrer la propriété de disjonction pour l'arithmétique de Heyting.