M2– Cours fondamental 2 14-15
Théorie de la démonstration 24 octobre 2014

Feuille d'exercices n°1

déduction naturelle

Voici une présentation des règles de la déduction naturelle pour la logique minimale :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\,\wedge_i \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge_{eg} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge_{ed}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\![A]\!]^n \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\,\to_i, n \qquad\qquad \frac{A \to B \quad A}{B}\,\to_e$$

$$\frac{A[y/x]}{\forall x A}\,\forall_i\ (*) \qquad\qquad \frac{\forall x A}{A[t/x]}\,\forall_e$$

$$\frac{A}{A \vee B}\,\vee_{ig} \qquad \frac{B}{A \vee B}\,\vee_{id} \qquad\qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[\![A]\!]^m \\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[\![B]\!]^n \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,\vee_e, m, n$$

$$\frac{A[t/x]}{\exists x A}\,\exists_i \qquad\qquad \frac{\exists x A \quad \begin{array}{c}[\![A[y/x]^n]\!] \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,\exists_e, n\ (*)$$

Les occurrences des hypothèses mutifiées (ou déchargées) sont indiquées par un indice, qui permet de relier celles-ci à la règle associée
(*) La règle ($\forall_i$) ne vaut que si y n'a pas d'occurrences libres dans A et les hypothèses.
(**) La règle ($\exists_e$) ne vaut que si y n'a pas d'occurrences libres dans A, C, et les hypothèses de la preuve de C autres que $A[y/x]$.

On rappelle que $\neg A$ est une abréviation de $A \vdash \bot$, les règles pour la négation sont donc les suivantes, dérivées de celle de l'implication.

$$\frac{\begin{array}{c}[\![A]\!]^n \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\,\neg_i, n \qquad \frac{\neg A \quad A}{\bot}\,\neg_e$$

Soit Γ une suite finie de formules, et C une formule.

On dit que C se déduit de Γ en *logique minimale*, on note $\Gamma \vdash_m C$, s'il existe une preuve utilisant les règles ci-dessus dont les hypothèses sont parmi Γ et la conclusion est C.

On dit que C se déduit de Γ en *logique intuitionniste*, on note $\Gamma \vdash_i C$, si la preuve utilise ces règles et la règle d'absurdité intuitionniste $\bot_e$.

On dit que C se déduit de Γ en *logique classique*, on note $\Gamma \vdash C$, si la preuve utilise ces règles et la règle d'absurdité classique $\bot_c$.

$$\frac{\bot}{A}\,\bot_e \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\![\neg A]\!]^n \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\,\bot_c, n$$

Exercice 1. Montrer en déduction naturelle (préciser quand la démonstration peut se faire en logique minimale)

i. $A \to (B \to A)$

ii. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

iii. $((A \to B) \to A) \to A$ (loi de Peirce)

iv. $\forall x A \to A[t/x]$ pour t un terme arbitraire (la substitution doit renommer les variables liées pour éviter les captures de variable)

v. $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ si x n'est pas libre dans A ;

Exercice 2. Montrer en déduction naturelle
$\vdash_m A \to A$
$\vdash_m A \to \neg\neg A$
$\vdash_m (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
$\vdash_m (A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$
$\vdash_m ((A \wedge B) \vee C) \to ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$
$\vdash_m ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee C)$
$\vdash_m \forall x(A \wedge B) \to (\forall x A \wedge \forall x B)$
$\vdash_m \exists x(A \vee B) \to (\exists x A \vee \exists x B)$

Exercice 3. Montrer (en logique classique)
$\vdash \neg\neg A \to A$ (élimination des doubles négations)
$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (contraposition)
$\vdash A \vee \neg A$ (tiers-exclu)
Quelle règle de démonstration utiles peut-on associer au tiers-exclu ?

Exercice 4. Montrer
$\vdash (A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
$\vdash \exists x A \leftrightarrow \neg\forall x \neg A$
$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
$\vdash \neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
Remarque : les deux premières déductions demandent la logique classique (préciser laquelle des deux implications), les deux dernières se font en logique minimale.

Exercice 5. Montrer que $\vdash_i \neg\neg(\neg\neg A \to A)$.

Exercice 6. Formaliser en déduction naturelle la preuve que si une relation binaire $<$ est transitive et irréflexive ($\forall x \neg x < x$), elle est antisymétrique ($\forall x, y(x < y \to \neg y < x)$).

Exercice 7. Formaliser en déduction naturelle la preuve du « parodoxe » du barbier (il n'existe pas de barbier qui rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci). On peut commencer par donner une démontsration par tiers-exclu, puis montrer qu'en fait la logique minimale suffit.

Exercice 8. Le langage contient un symbole de constante noté $\sqrt{2}$ une opération binaire, l'exponentiation notée x^y, et un prédicat unaire R pour (rationnel). Montrer que l'on peut dériver en déduction naturelle qu'il existe deux nombres x et y irrationnels tels que x^y soit rationnel (on peut utiliser le tiers exclu) :

$$\neg R(\sqrt{2}), R\left((\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}\right) \vdash \exists x \exists y (R(x^y) \wedge \neg R(x) \wedge \neg R(y))$$

C'est un exemple simple de preuve non constructive (la preuve ci-dessus n'exhibe pas les irrationnels x et y).

Exercice 9. On considère le système de preuves « à la Hilbert » avec pour schémas d'axiomes ceux de l'exercice 1, et les deux règles suivantes :

Modus ponens. Des formules A et $A \to B$ on déduit B :

$$\frac{A \to B \quad A}{B}$$

Généralisation. De A on déduit $\forall x\ A$ (x peut bien-sûr apparaître libre dans A).

$$\frac{A}{\forall x\ A}$$

1. Montrer qu'une formule propositionnelle n'utilisant que le connecteur $\to$ est démontrable en déduction naturelle minimale avec les règles d'élimination et d'introduction de l'implication si et seulement si elle est démontrable avec les axiomes **i**, **ii** et la règle de Modus Ponens.

2. Montrer qu'une formule du calcul des prédicats n'utilisant que le connecteur $\to$ et le quantificateur $\forall$ (fragment $\{\to, \forall\}$) est démontrable en déduction naturelle minimale avec les règles d'élimination et d'introduction de l'implication et du $\forall$ si et seulement si elle est démontrable avec les axiomes **i**, **ii**, **iv** et **v** et les deux règles de Modus Ponens et de généralisation.

Exercice 10. Il y a plusieurs façons d'obtenir la logique classique en ajoutant des schémas d'axiomes, montrer qu'elle peut être obtenue par :

1. La logique intuitionniste $+\ A \vee \neg A$ (tiers exclu).

2. La logique intuitionniste $+\ (\neg A \to A) \to A$ (loi de Peirce).

3. La logique minimale $+\ \neg\neg A \to A$ (élimination des doubles négations).

4. La logique minimale $+\ (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (contraposition)

Exercice 11 (complétude pour le calcul propositionnel purement implicationnel). On s'intéresse aux formules propositionnelles construites avec pour seul connecteur “ $\to$ ”, sur un ensemble dénombrable de constantes propositionnelles $\{p_i\ /\ i \in \mathbb{N}\}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces formules. Dans la suite “ formule ” désigne une formule de $\mathcal{F}$. On veut démontrer que les règles d'introduction et d'élimination de la déduction naturelle pour l'implication, auxquelles on ajoute le schéma d'axiome donné par la loi de Peirce (cf. exercice 1) forment un système complet pour les formules qui n'utilisent que “$\to$” pour connecteur. Dans la suite la suite $\Gamma \vdash_\Theta C$ signifie que C se déduit de Γ dans la théorie Θ *en utilisant uniquement ces règles*, c'est-à-dire qu'il existe une démonstration en déduction naturelle dont les hypothèses sont soient dans Γ soit dans Θ.

1. Démontrer *en utilisant uniquement ces règles* que pour toutes formules F, G et B :

$$F \vdash (F \to B) \to B \;\text{ et }\; (F \to G) \to B, F \to B \vdash B$$

Indication pour la deuxième assertion, on peut utiliser l'instance suivante de la loi de Peirce : $((B \to G) \to B) \to B$.

On suppose donnée une énumération de toutes les formules de $\mathcal{F}$, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit T une théorie (ensemble de formules closes) inclue dans $\mathcal{F}$ finie ou dénombrable, et B une formule de $\mathcal{F}$, telles que : $\nvdash_T B$. On construit une suite de théories $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur $\mathbb{N}$.

i. $T_0 = T$;

ii. Si $\vdash_{T_n} (F_n \to B) \to B$, alors $T_{n+1} = T_n \cup \{F_n\}$, sinon $T_{n+1} = T_n \cup \{F_n \to B\}$.

On pose $T^s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_n$ (en particulier $T \subset T^s$). On remarque que pour toute théorie Θ, pour toutes formules A et B,

$$\vdash_{\Theta\cup\{A\}} B \text{ si et seulement si } A \vdash_\Theta B \tag{0}$$

2. Montrer que :

a. pour toute formule C de $\mathcal{F}$, $C \in T^s$ ou $C \to B \in T^s$;

b. $\nvdash_{T^s} B$;

c. pour toute formule C de $\mathcal{F}$, si $\vdash_{T^s} C$ alors $C \in T^s$.

3. La valuation v est définie sur les constantes propositionnelles $p \in \mathcal{P}$ par :

$$\text{si } \ p \in T^s \ \text{ alors } \ v(p) = 1 \ \text{ sinon } \ v(p) = 0 \ .$$

Montrer que pour toute formule propositionnelle C :

$$\text{si } \ C \in T^s \ \text{ alors } \ v(C) = 1 \ \text{ sinon } \ v(C) = 0 \ .$$

4. En déduire le théorème de complétude annoncé (pour le calcul propositionnel purement implicationnel) : quand pour toute valuation v telle que pour toute formule A de T $v(A) = 1$ on a $v(B) = 1$, alors $\vdash_T B$. Quel théorème obtient-on pour le système à la Hilbert de l'exercice 9.

Exercice 12 (Complétue pour le calcul des prédicats avec $\to, \forall$). Le but de l'exercice et de montrer que les règles de la déduction naturelle pour $\to, \forall$ plus la loi de Peirce forment un système complet pour les formules du calcul des prédicats du fragment $\to, \forall\}$ sur un langage $\mathcal{L}$. La démonstration suit le même schéma que celle de l'exercice précédent.

On suppose donc donné un langage L de signature (symboles de constantes, de fonctions et de prédicats) au plus dénombrable. L'ensemble des variables du langage des prédicats (infini dénombrable) est $\{x_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$. Soit un ensemble dénombrable de constantes $H = \{c_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ *dites constantes de Henkin* ou encore *témoins de Henkin*, dont aucun élément n'apparait dans L.

On suppose donnée une énumération $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de toutes les formules *closes* du fragment $\{\to, \forall\}$ du calcul des prédicats sur le langage $L \cup H$ (remarque : c'est équivalent à énumérer toutes les formules du langage L). Soit T une théorie (finie ou dénombrable) dans le langage L n'utilisant que $\to$ et $\forall$ et B une formule de $\mathcal{L}$ telle que $\not\vdash_T B$. On construit une suite de théories $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du langage $L \cup H$ par récurrence sur $\mathbb{N}$.

i. $T_0 = T$

ii. Si $\vdash_{T_n} (F_n \to B) \to B$, alors $T_{n+1} = T_n \cup \{F_n\}$,
si $\not\vdash_{T_n} (F_n \to B) \to B$ et F_n n'est pas quantifiée universellement, $T_{n+1} = T_n \cup \{F_n \to B\}$,
si $\not\vdash_{T_n} (F_n \to B) \to B$ et F_n est de la forme $\forall x_i\, G$, alors $T_{n+1} = T_n \cup \{G[c_k/x_i] \to B\}$, où c_k est la première constante de Henkin qui n'apparait pas dans les formules de la théorie T_n (c'est une « nouvelle » constante).

On pose $T^s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

1. Montrer le résultat préliminaire suivant. Pour toute théorie T d'un langage L, si c est une constante qui n'apparaît pas dans L, alors pour toute variable x :

$$\Gamma \vdash_T F \quad \text{ssi} \quad \Gamma[c/x] \vdash_T F[c/x]$$

2. Montrer que :

- **a.** si $\forall x\, G$ est une formule close du langage $L \cup H$, et si $\forall x\, G \notin T^s$, alors il existe une constante de Henkin c telle que $G[c/x] \to B \in T^s$.
- **b.** pour toute formule close C du langage $L \cup H$, $C \in T^s$ ou $C \to B \in T^s$;
- **c.** $\nvdash_{T^s} B$ (*indication : montrer d'abord le résultat pour les T_n, par récurrence sur n*) ;
- **d.** T^s est saturée : pour toute formule C, si $\vdash_{T^s} C$ alors $C \in T^s$.

3. La $L \cup H$-structure $\mathcal{M}$ a pour ensemble de base l'ensemble des termes clos du langage $L \cup H$. Les symboles de constantes sont interprétés par eux-mêmes. Un symbole de fonction f d'arité n est interprété par la fonction à n arguments qui à $t_1, \ \dots, \ t_n$ associe $f\, t_1 \ \dots \ t_n$. Les formules atomiques closes F sont vraies si et seulement si elles sont dans T^s :

$$\mathcal{M} \models F \text{ ssi } F \in T^s \quad (F \text{ atomique}).$$

Montrer, par récurrence sur la hauteur de F, que pour toute formule close F du langage $L \cup H$:

$$\mathcal{M} \models F \text{ ssi } F \in T^s \ .$$

4. En déduire le théorème de complétude annoncé pour les formules du fragment $\{\to, \forall\}$: si toute $\mathcal{L}$-structure modèle de la théorie T est modèle de B, alors $\vdash_T B$ dans le système annoncé, ou dans celui de l'exercice 9.

5. Indiquer comment généraliser au fragment $\{\forall, \to\}$ calcul des prédicats égalitaire (en ajoutant les règles de l'égalité).