MT 306 03-04
Logique 30 mars 2004

Problème : Corrigé n°1

Exercice 1 (déduction – examen juin 2003). **1.** De $\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x)$ on déduit $a \in a \Leftrightarrow \neg a \in a$, si $a \in a$ on a $\neg a \in a$: contradiction, si $\neg a \in a$ on a $a \in a$: contradiction, donc $\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x)$ est contradictoire.

2. **a.** – Pour prouver $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$ il suffit de prouver (introduction de l'implication, puis de la négation) $A \Rightarrow \neg A, A \vdash \perp$.
On a $A \vdash A$ et $A \Rightarrow \neg A \vdash A \Rightarrow \neg A$ (axiomes de la déduction), donc par élimination de l'implication $A \Rightarrow \neg A, A \vdash \neg A$ et par élimination de la négation avec à nouveau $A \vdash A$: $A \Rightarrow \neg A, A \vdash \perp$.

– Pour prouver $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg A$ il suffit de prouver (introduction de l'implication, puis de la négation) $\neg A \Rightarrow A, \neg A \vdash \perp$.
On a $\neg A \vdash \neg A$ et $\neg A \Rightarrow A \vdash \neg A \Rightarrow A$ (axiomes de la déduction), donc par élimination de l'implication $\neg A \Rightarrow A, A \vdash A$ et par élimination de la négation à partir de $\neg A \vdash \neg A$: $\neg A \Rightarrow A, A \vdash \perp$.

b. Pour prouver $\vdash \neg\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x)$ il suffit de prouver (introduction de la négation)

$$\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x) \vdash \perp \ . \qquad (*)$$

De $\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x) \vdash \forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x)$ (axiome de la déduction), on déduit $\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x) \vdash a \in a \Leftrightarrow \neg a \in a$ (élimination de $\forall$), puis par les deux règles d'élimination du $\wedge$

$$\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x) \vdash a \in a \Rightarrow \neg a \in a \qquad (1)$$

$$\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x) \vdash \neg a \in a \Rightarrow a \in a \qquad (2)$$

On a montré à la question précédente ($A := a \in a$) que

$$\vdash (a \in a \Rightarrow \neg a \in a) \Rightarrow \neg a \in a$$

d'où par élimination de l'implication avec (1)

$$\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x) \vdash \neg a \in a \qquad (3)$$

On a montré à la question précédente ($A := a \in a$) que

$$\vdash (\neg a \in a \Rightarrow \in a) \Rightarrow \neg\neg a \in a$$

d'où par élimination de l'implication avec (2)

$$\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x) \vdash \neg a \in a \qquad (4)$$

Par élimination de la négation entre (3) et (4) on obtient $(*)$:

$$\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x) \vdash \perp \ .$$

Exercice 2 (déduction – examen septembre 2003). Le langage contient deux symboles de prédicat unaire "A" et "B".

1. On suppose $\forall x \forall y (A\,x \Rightarrow B\,y)$ et $\neg \forall y\ B\,y$. Par l'absurde, si au moins un x a la propriété A, alors comme $\forall x \forall y (A\,x \Rightarrow B\,y)$, tous les y ont la propriété B ce qui contredit $\neg \forall y\ B\,y$, donc $\forall x\ \neg A$.
2. Par deux introductions de $\Rightarrow$, une du $\forall$, et une de la négation il suffit de montrer :
$$\forall x \forall y (A\,x \Rightarrow B\,y), \neg \forall y\ B\,y, A\,x \vdash \bot \tag{$*$}$$
Des axiomes de la déduction $\forall x \forall y (A\,x \Rightarrow B\,y) \vdash \forall x \forall y (A\,x \Rightarrow B\,y)$ et $A\,x \vdash A\,x$ on déduit par deux éliminations du $\forall$ et une de $\rightarrow$:
$$\forall x \forall y (A\,x \Rightarrow B\,y), A\,x \vdash B\,y$$
ce pour un y arbitraire (n'apparaît pas libre dans le contexte) , donc par introduction du $\forall$ on a :
$$\forall x \forall y (A\,x \Rightarrow B\,y), A\,x \vdash \forall y\ B\,y$$
et de ceci et de l'axiome de la déduction $\neg \forall y\ B\,y \vdash \neg \forall y\ B\,y$ on déduit $(*)$ par élimination de la négation.

Exercice 3 (Calcul des prédicats – partiel 2003). Le langage L a pour signature $(+)$ (symbole de fonction binaire, notation usuelle infixe). Dans ce langage on définit :
$$x \leq y \equiv_d \exists a\ x + a = y\ .$$
On s'intéresse aux trois structures suivantes, où l'addition est interprétée de façon usuelle (loi produit pour $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) :
$$(\mathbb{N}, +) \quad (\mathbb{Q}^+, +) \quad (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, +)\ .$$

1. Chacune des trois structures $\mathcal{M}$ ayant un élément neutre pour l'addition, la réflexivité de la relation $\leq$ est vérifiée. De même l'associativité de $+$ a pour conséquence la transitivité de la relation $\leq$. Enfin supposons $x \leq y$ et $y \leq x$, on peut trouver a et b tels que $y = x + a$ et $x = y + b$, donc $y = y + (a + b)$ (associativité), donc $a + b = 0_{\mathcal{M}}$ (régularité de l'addition dans ces trois structures). Dans chacune des trois structures cela a pour conséquence que $a = b = 0_{\mathcal{M}}$, et donc que $x = y$. On a montré l'anti-symétrie de $\leq$ et donc $\leq$ définit bien un ordre large sur chacune de ces trois structures.

   On sait que cette formule ne définie pas un ordre sur $(\mathbb{Z}, +)$ (tout couple d'éléments (x, y) vérifie $\exists a\ y = x + a$, donc $\leq$ n'est pas anti-symétrique sur cette structure).
2. La formule $\forall x \exists y\ y + y = x$ est satisfaite dans $(\mathbb{Q}, +)$ mais pas dans $(\mathbb{N}, +)$ (pour les entiers impairs) ni dans $(\mathbb{N}^2, +)$ (dès que l'un des deux entiers composantes est impair). On remarque que la relation $\leq$ (définie avec $+$) ne définit pas un ordre total sur $\mathbb{N}^2$, par exemple $(0, 1)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparables. La formule $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$ est donc fausse dans $(\mathbb{N}^2, +)$ mais vraie dans $(\mathbb{N}, +)$ (et $(\mathbb{Q}, +)$). On a ainsi distingué les trois structures deux à deux.