Problème n°1

Exercice 1 (déduction – examen juin 2003). Le langage contient un symbole de constante "a" est un symbole de prédicat binaire "$\in$".

1. Montrez que $\neg\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x)$ est une formule universellement valide (on demande une preuve rédigée de façon "usuelle", et pas une preuve entièrement formalisée, ce qui est le sujet de la deuxième question).

2. On se propose maintenant de donner une preuve formelle en déduction naturelle sans raisonnement par l'absurde de l'énoncé précédent. Les seules règles autorisées sont donc celles du polycopié, sauf celle de raisonnement par l'absurde.

  a. Donnez une preuve en déduction naturelle sans raisonnement par l'absurde de chacun des deux énoncés (où A une formule quelconque) :

$$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A \qquad (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg A$$

  b. Montrez que $\neg\forall x(x \in a \Leftrightarrow \neg x \in x)$ est prouvable en déduction naturelle sans raisonnement par l'absurde ($A \Leftrightarrow B$ est considéré comme une abréviation de $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$).

Exercice 2 (déduction – examen septembre 2003). Le langage contient deux symboles de prédicat unaire "A" et "B".

1. Montrez que

$$\forall x\forall y(A\,x \Rightarrow B\,y) \Rightarrow (\neg\forall y\; B\,y \Rightarrow \forall x\neg A\,x)$$

est une formule universellement valide (on demande une preuve rédigée de façon "usuelle", et pas une preuve entièrement formalisée, ce qui est le sujet de la deuxième question).

2. Donnez une preuve formelle en déduction naturelle de l'énoncé précédent.

Exercice 3 (Calcul des prédicats – partiel 2003). Le langage L a pour signature $(+)$ (symbole de fonction binaire, notation usuelle infixe). Dans ce langage on définit :

$$x \leq y \equiv_d \exists a\; x + a = y\ .$$

On s'intéresse aux trois structures suivantes, où l'addition est interprétée de façon usuelle (loi produit pour $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) :

$$(\mathbb{N}, +) \quad (\mathbb{Q}^+, +) \quad (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, +)\ .$$

1. Montrer (rapidement) que la relation $\leq$ définit un ordre large dans chacune de ces trois structures. Est-ce le cas pour une L-structure en général ?

2. Montrer pour tous les couples de structures parmi ces trois, qu'il existe une formule du premier ordre du langage L qui permet de les distinguer (vraie dans l'une et fausse dans l'autre).