Feuille d'exercices n°7

élimination des quantificateurs

On rappelle qu'une théorie $\mathcal{T}$ dans un langage $\mathcal{L}$ *élimine les quantificateurs* quand toute formule F du langage $\mathcal{L}$ est équivalente à une formule sans quantificateurs.

Exercice 1. On se place dans un langage égalitaire de signature quelconque $\mathcal{S}$.

1. Montrer que si F est une formule close et si F est équivalente à une formule sans quantificateurs, alors F est équivalente à une formule sans quantificateurs comportant au plus une variable libre.
2. On suppose maintenant que le langage est purement égalitaire (la signature est vide). Montrer que toute formule sans quantificateurs avec au plus une variable libre est soit universellement valide, soit de négation universellement valide.
3. Montrer que la théorie de l'égalité (théorie vide, langage de signature vide) n'élimine pas les quantificateurs.

Exercice 2. On se place dans le langage de signature vide. La notation $x \neq y$ est utilisée pour $\neg x = y$.

On considère la théorie $\mathcal{T}_\infty$ de l'égalité sur les ensembles infinis axiomatisée par $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où :

$$A_0 := \exists x_0 \exists x_1 \; x_0 \neq x_1$$
$$A_n := \exists x_0 \ldots \exists x_{n+1} \bigwedge_{0\leq i<j\leq n+1} x_i \neq x_j.$$

1. Soient $p \geq 0$, $q \geq 0$, on suppose que $\{x_1, \ldots, x_p\}$ et $\{y_1 \ldots, y_q\}$ sont deux ensembles finis de variables non nécessairement disjoints, et éventuellement vides mais pas simultanément ($p > 0$ ou $q > 0$). On suppose que x est une variable distincte des précédentes : $x \notin \{x_1, \ldots, x_p\} \cup \{y_1 \ldots, y_q\}$. Montrer que la formule :
$$\exists x(\bigwedge_{i=1}^{p} x = x_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} x \neq y_j)$$
est équivalente dans la théorie T_∞ à une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $\{x_1, \ldots, x_p\} \cup \{y_1 \ldots, y_q\}$.
2. Montrer que pour toute conjonction de formules atomiques et négations de formules atomiques F, $\exists x\ F$ est équivalente dans $\mathcal{T}_\infty$ à une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi celles de $\exists x\ F$.
3. En déduire que $\mathcal{T}_\infty$ élimine les quantificateurs, plus précisément montrer que dans $\mathcal{T}_\infty$, toute formule F est équivalente à une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi celles de F.
4. En déduire que $\mathcal{T}_\infty$ est complète.

Exercice 3 (examen 2003). Le langage est celui du calcul des prédicats du premier ordre *sans égalité* avec pour signature $\mathcal{S} = (0, 1, P)$ où 0 et 1 sont deux symboles de constantes et P un symbole de prédicat à une place. La théorie T contient les deux seuls axiomes : $P0$ et $\neg P1$.

1. Les formules suivantes sont elles conséquences de T ? Et leurs négations (justifiez) ?
$$\forall x Px \; ; \quad \exists x\ Px \; ; \quad \forall x \forall y((Px \to Py) \to Px)$$
2. Donnez une description rapide des formules atomiques du langage, puis des formules atomiques closes du langage (on rappelle que l'égalité ne fait pas partie du langage).
3. Montrez que pour toute formule close sans quantificateurs F, F est conséquence de T ou sa négation est conséquence de T.
4. Soit A une conjonction de formule atomiques et négations de formules atomiques dont les variables libres sont parmi $x, y_1, \ldots, y_n$. Montrer que $\exists x\ A$ est équivalente à une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_n$.
5. Soit B une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $x, y_1, \ldots, y_n$. Montrer que $\exists x\ B$, puis $\forall x\ B$ sont équivalentes à des formules sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_n$.
6. Montrez que toute formule dont les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_n$ est équivalente à une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_n$.
7. Déduisez en que la théorie T est complète dans le calcul des prédicats sans égalité (pour toute formule close sans égalité, soit elle est conséquence de T, soit sa négation est conséquence de T).

Exercice 4 (examen 2003). On reprend l'exercice précédent dans le cadre du calcul des prédicats *égalitaire* : le langage est égalitaire de même signature $\mathcal{S}$, la théorie T est la même. Cet exercice peut être traité indépendemment du précédent.

1. Rappelez comment s'exprime en calcul des prédicats "il existe un unique x tel que Px", que l'on note $\exists! x\ Px$. Cette formule est-elle démontrable dans T ? Et sa négation ?
2. La théorie T est-elle complète en calcul des prédicats égalitaire ?