Feuille d'exercices n°5

MT 306 calcul propositionnel (2) 03-04

Exercice 1 (déduction – partiel 2003). On se propose d'étudier la règle suivante qui est une version du raisonnement par contraposée : «Si $\Gamma, \neg A \vdash B$ alors $\Gamma, \neg B \vdash A$».

1. Montrer, en utilisant les règles de la déduction vue en cours (cf. polycopié), que cette règle de déduction est dérivable : dériver $\Gamma, \neg B \vdash A$ à partir de $\Gamma, \neg A \vdash B$. N'utilisez que les règles du polycopié.
2. Montrer directement (sans utiliser la question précédente ni le lemme d'adéquation) que cette règle est sémantiquement valide en calcul propositionnel, c'est à dire que si $\Gamma, \neg A \models B$ alors $\Gamma, \neg B \models A$.

   On rappelle que $\Delta \models C$ signifie que pour toute valuation v

   (pour toute formule B de Δ $v(B) = 1) \Rightarrow v(C) = 1$.

Exercice 2. Monrez directement (sans utiliser la propriété d'adéquation) que les règles que la règle dérivée à l'exercice 6 de la feuille 2, «Si $\Gamma \vdash A \vee C$ et si $\Gamma', C \vdash B$ alors $\Gamma, \Gamma', \neg A \vdash B$», est sémantiquement valide.

Exercice 3 (partiel 2003). Dans cet exercice on se restreint au calcul propositionnel sur un ensemble d'atomes $\mathcal{P}$. On rappelle qu'un littéral est soit un atome soit une négation d'atome.

1. Montrer que toute formule qui est une disjonction de littéraux comportant au moins un atome non nié, est équivalente à une formule qui n'utilise que les trois connecteurs $\wedge, \vee, \rightarrow$ (ni négation, ni absurde).
2. Soit v_1 la valuation constante égale à 1 sur tous les atomes de $\mathcal{P}$. Montrer que si $v_1(F) = 1$ et si F est sous forme normale conjonctive : $F = \bigwedge_{i=1}^{n} F_i$ avec $n \geq 1$ où les formules F_i sont des disjonctions de littéraux, alors chacune des disjonctions F_i comporte au moins un atome non nié.
3. Montrer que si $v_1(F) = 1$, F est équivalente à une formule écrite avec pour seuls connecteurs $\wedge, \vee, \rightarrow$ (ni négation ni absurde).

Exercice 4 (partiel 2002). On rappelle que $\perp$ désigne une constante propositionnelle toujours fausse, et $\top$ une constante propositionnelle toujours vraie. On désigne par If le connecteur ternaire «si …alors …sinon …» dont voici la table de vérité :

X	A	B	If(X, A, B)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1. On appelle littéraux, les atomes X, A, B et leurs négations. Donner un équivalent de If(X, A, B) qui est :
   - **a.** une forme normale disjonctive, puis une forme normale disjonctive n'utilisant que deux conjonctions de deux littéraux chacune ;
   - **b.** une forme normale conjonctive, puis une forme normale conjonctive n'utilisant que deux disjonctions de deux littéraux chacune ;
   - **c.** Une conjonction de deux implications entre littéraux.

   Chacun des équivalents doit être justifié.
2. Donner pour chacune des formules $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, un équivalent utilisant *une seule occurrence* de chacun des connecteurs If, $\top, \perp$ (justifier). En déduire que {If, $\top$, $\perp$} est un système complet de connecteurs.
3. Montrer que $\{\text{If}, \top\}$ n'est pas un système complet de connecteurs (on peut utiliser une valuation constante adéquate).

Exercice 5 (ensembles indépendants de formules). Un ensemble $\mathcal{A}$ de formules est dit indépendant pour la relation de conséquence logique — nous dirons seulement indépendant dans la suite de l'exercice — quand aucune formule F de $\mathcal{A}$ n'est conséquence logique de $\mathcal{A} - \{F\}$.

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ est un ensemble fini de formules, il existe un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ indépendant et équivalent à A.
2. Montrer que ce résultat peut être faux pour un ensemble infini dénombrable de formules.

Exercice 6 (compacité). Montrer qu'un ensemble de formules propositionnelles $\mathcal{A}$ est indépendant ssi tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ est indépendant.

Exercice 7 (compacité). Le langage est celui des ordres stricts $\mathcal{L} = \{<\}$. Le but de l'exercice est de montrer que tout ordre (partiel) se prolonge en un ordre total, c'est à dire qu'étant donnée une relation d'ordre strict $\prec$ sur un ensemble M, il existe une relation d'ordre strict totale $<$ sur le même ensemble M qui contient $\prec$.

1. Montrer qu'un ordre partiel fini $(M, \prec)$ se prolonge en un ordre total $(M, <)$, par récurence sur le cardinal de M.
2. Exprimer dans le langage de logique du premier ordre égalitaire de signature $\mathcal{L} = (\prec, <)$ que $<$ est une relation d'ordre strict total qui prolonge $\prec$.
3. Pour une structure $(M, \overline{\prec}, \overline{<})$ donnée, exprimer ces mêmes propriétés en calcul propositionnel avec pour seuls atomes $\{i < j \ / \ (i, j) \in M^2\}$.
4. Montrer en utilisant les questions précédentes et le théorème de compacité du calcul propositionnel que l'ordre $(M, \overline{\prec})$ se prolonge en un ordre total. Conclure.