Feuille d'exercices n°4

calcul propositionnel

Exercice 1 (systèmes complets de connecteurs). On note $\barwedge$ et $\veebar$ les connecteurs définis par $A \barwedge B \equiv_d \neg(A \wedge B)$ et $A \veebar B \equiv_d \neg(A \vee B)$. Montrer que $\{\barwedge\}$ est un système complet de connecteur, ainsi que $\{\veebar\}$.

Exercice 2 (systèmes complets de connecteurs). Montrer que $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ n'est pas un système complet de connecteurs. On peut par exemple montrer que toute formule F construite sur ces seuls connecteurs vérifie $v_1(F) = 1$, où v_1 est la valuation constante égale à 1.

Exercice 3 (Formalisation en calcul propositionnel). Le *principe des tiroirs* dit que si l'on range un certain nombre (fini) d'objets dans un nombre strictement plus petit de tiroirs, au moins deux objets se retrouvent dans le même tiroir. On se propose d'exprimer ce principe dans $\mathbb{N}$. On choisit un langage L de signature $\{T\}$, un symbole de prédicat binaire. Dans un premier temps on utilise la signature $\{T, <\}$, où le symbole $<$ est un symboe de prédicat binaire ; $<$ interprété par l'ordre strict usuel sur $\mathbb{N}$. La relation $n\ T\ m$ signifie « l'objet n est rangé dans le tiroir m ».

1. Écrire une formule du premier ordre dans le langage $\{T, <\}$ qui, interprétée dans $\mathbb{N}$, exprime le principe des tiroirs pour T.

2. On travaille maintenant dans la signature $L_{\mathbb{N}}$ (le langage L étendu avec un symbole de constante pour chaque entier naturel).

- **a.** Écrire une *formule propositionnelle* qui, interprétée dans $\mathbb{N}$, exprime le principe des tiroirs dans le cas particulier de 3 objets et 2 tiroirs.
- **b.** Montrer que le principe des tiroirs pour n objets et m tiroirs avec $n > m$, s'exprime par une formule propositionnelle.
- **c.** En déduire que le principe des tiroirs s'exprime par une infinité de formules propositionnelles.

3. Démontrer le principe des tiroirs dans $\mathbb{N}$ (utilisez les propriétés connues de $\mathbb{N}$). En déduire que les formules propositionnelles de la question précédente sont des tautologies. Quelle est la taille de la table de vérité de la formule exprimant le principe des tiroirs pour n objets et m tiroirs ?

Exercice 4 (déduction). On se place en calcul propositionnel. On veut montrer que si on omet le raisonnement par l'absurde du système de règles pour la déduction donné en cours, on perd le théorème de complétude. Pour cela on introduit une sémantique à 3 valeurs $S = \{00, 01, 11\}$: ce sont les suites croissantes de 2 éléments sur $\{0, 1\}$ que l'on note ainsi pour alléger l'écriture. On utilise une relation d'ordre sur S qui est la relation d'ordre usuelle : $00 < 01 < 11$. Une valuation est donc une fonction des variables propositionnelles dans $\{00, 01, 11\}$. La valeur 11 correspond au vrai. Intuitivement on interprète le premier élément du couple comme le présent, le second comme le futur. Par exemple la valeur 00 s'interprète comme n'est pas vrai maintenant et ne le sera pas, la valeur 01 comme non encore vrai maintenant, mais sera vrai. La vérité est "monotone", ce qui est vrai au "présent" doit le rester à "l'avenir" (il n'y a pas de valeur de vérité 10). Ceci explique la table de vérité suivante pour l'implication (en particulier la ligne $v(A) = 01,\ v(B) = 00$).

A	B	$(A \rightarrow B)$
00	00	11
00	01	11
00	11	11
01	00	00
01	01	11
01	11	11
11	00	00
11	01	01
11	11	11

Une formule est valide dans cette sémantique si pour toute valuation elle prend la valeur 11. Une relation de déduction $\Gamma \vdash C$ est valide ssi pour toute valuation v les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$(\text{Pour tout } A \in \Gamma\ v(A) = 11) \Rightarrow v(C) = 11$$

et

$$(\text{Pour tout } A \in \Gamma\ v(A) \geq 01) \Rightarrow v(C) \geq 01$$

Remarquez que $\vdash C$ est valide ssi C est valide.

1. L'absurde $\perp$ a pour valeur de vérité 00. On pose $\neg A \equiv_{def} A \rightarrow \perp$. Donner la table de vérité de $\neg A$ dans la sémantique à 3 valeurs S.

2. Donner la table de vérité dans la sémantique à 3 valeurs S des formules $A \rightarrow \neg\neg A$, $\neg\neg A \rightarrow A$, $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, $(A \rightarrow B) \rightarrow A$, et $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$. Lesquelles sont des tautologies de la logique classique, et lesquelles sont valides pour la sémantique S.

3. On considère la déduction dans une théorie vide, montrer que les règles axiomes, les règles d'affaiblissement et de contraction, les règles d'introduction et d'élimination de l'implication, la règle d'élimination de $\perp$ sont valides pour la sémantique S. En déduire un théorème d'adéquation pour S.

4. En déduire que le théorème de complétude n'est pas démontrable avec uniquement les règles énumérées à la question précédente (sans la règle de raisonnement par l'absurde).

Remarques. On pourrait étendre sans difficulté le résultat ci-dessus aux connecteurs $\wedge$ et $\vee$, avec une sémantique "intuitive" (la restriction sur chacune des deux composantes est la sémantique classique).

Une sémantique à nombre fini de valeurs ne suffit pas pour caractériser la logique définie par les règles ci-dessus (qui est un fragment de la logique dite intuitionniste).