Feuille d'exercices n°3

Structures, interprétation

Exercice 1. Dans la suite c désigne un symbole de constante, f un symbole de fonction unaire, R un symbole de relation binaire, $+$ un symbole de fonctions binaires.

1. Dénombrer toutes les L-structures d'ensemble de base $N_n = \{0, \dots, n-1\}$, quand L est la signature suivante :

a. $L = (c)$; **c.** $L = (R)$; **e.** $L = (c, f, R, +)$.
b. $L = (f)$; **d.** $L = (+)$;

2. Décrire toutes les L-structures d'ensemble de base N_2, quand L est la signature suivante :

a. $L = (c)$; **b.** $L = (f)$; **c.** $L = (f, c)$.

Préciser à chaque fois celles qui sont isomorphes.

d. Pour le langage de signature $\mathcal{L} = (R)$, décrire toutes les $\mathcal{L}$-structures d'ensemble de base N_2 telles que l'interprétation de R contiennent exactement deux couples. Décrire celles d'entre elles qui sont isomorphes.

3. Pour chacune des signatures de la question précédente, donner une description simple des termes, des termes clos, des formules atomiques, des formules atomiques closes.

Exercice 2. Une relation d'ordre strict est une relation qui est anti-réflexive (aucun élément n'est en relation avec lui même) et transitive.

1. Enoncer les axiomes d'ordre strict en logique du premier ordre pour la signature $L = (<)$.

2. Décrire toutes les L-structures d'ensemble de base N_2, un ensemble à 2 éléments, qui sont des ordres stricts (on peut présenter les résultats sous forme de graphe). Lesquelles sont isomorphes ?

3. Décrire *à isomorphisme près* toutes les L-structures d'ensembles de base N_3, un ensemble à 3 éléments, qui sont des ordres stricts (on peut présenter les résultats sous forme de graphe).

4. Énoncer en logique du premier ordre qu'un ordre strict a un plus grand élément, qu'un ordre strict a un plus petit élément, qu'un ordre strict est total. Lesquelles parmi les structures énumérées aux deux premières questions vérifient ces énoncés.

5. Vérifier que les ordres stricts avec plus grand élément et plus petit élément sur des ensembles de base à 2 ou 3 éléments sont totaux, et donner un exemple de L-structure qui est un ordre strict non total avec plus petit et plus grand élément.

Exercice 3. Dans chacune des structures suivantes, $<$ désigne l'ordre usuel :

$$(\mathbb{Q}, <) \ ; \ \ (\mathbb{Z}, <) \ ; \ \ (\mathbb{N}, <) \ ; \ \ (\mathbb{Z}^-, <) \ ; \ \ (\mathbb{Q}^+, <) \ ; \ \ (\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}, <)$$

1. Pour deux parmi ces structures trouver un énoncé du langage du premier ordre égalitaire de signature $(<)$ qui permette de les distinguer (qui soit vraie dans l'un est pas dans l'autre). Notez bien que le langage n'a pas de constantes, et que les éléments de la structure ne font pas partie du langage.

2. Montrer que $(N^*, <)$ est isomorphe à l'une des structures ci-dessus (la préciser). Même question pour $(\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}, <)$.

Exercice 4. On veut étudier les relations de dépendance entre les 5 axiomes de la théorie des groupes qui suivent énoncés dans le langage $\mathcal{L} = (*, e)$ où $*$ est un symbole de fonction binaire et e un symbole de constante.

$\forall x \forall y \forall z \ x * (y * z) = (x * y) * z$	*associativité*
$\forall x \ x * e = x$	*neutre à droite*
$\forall x \ e * x = x$	*neutre à gauche*
$\forall x \exists x' \ x * x' = e$	*inverse à droite*
$\forall x \exists x' \ x' * x = e$	*inverse à gauche*

1. Montrer que l'associativité plus les deux axiomes pour le neutre, n'ont pas pour conséquences les deux derniers axiomes : trouver une structure qui réalise les trois premiers axiomes, mais pas les deux derniers.

2. Montrer que l'associativité plus les deux axiomes pour l'inverse, n'ont pas pour conséquences les deux axiomes pour le neutre.

3. Montrer que l'axiome d'associativité est indépendant des 4 autres axiomes : trouver une structure dans laquelle tous les axiomes sont réalisés sauf l'associativité.

4. Montrer que l'associativité plus l'axiome d'élément neutre à droite, plus l'axiome d'inverse à gauche n'ont pas pour conséquence les deux derniers axiomes (on peut penser à définir une opération sur un produits cartésien).

5. Un système d'axiome est indépendant quand aucun axiome de ce système n'est conséquence des axiomes restants. Montrer que le système d'axiomes ci-dessus n'est pas indépendant mais qu'il contient exactement deux systèmes d'axiomes indépendants qui lui sont équivalents, et qui ont chacun 3 axiomes.