MT 306 — 03-04

Logique — 2 mars 2004

Feuille d'exercices n°2

Déduction

On rappelle la convention d'écriture $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ pour $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.

Exercice 1. Dériver à partir des règles de la déduction naturelle et de l'égalité, la symétrie et la transitivité de l'égalité : $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$ et $\forall x \forall y \forall z (x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z)$.

Exercice 2. Soit $<$ un symbole de prédicat binaire, et T la théorie de la transitivité : $T := \{\forall x \forall y \forall z (x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)$. On définit $\leq$ par $x \leq y \equiv_d x < y \vee x = y$. Montrer que la transitivité de $\leq$ est dérivable dans T en déduction naturelle :

$$\vdash_T \forall x \forall y \forall z (x \leq y \Rightarrow y \leq z \Rightarrow x \leq z) \ .$$

(rédiger d'abord une preuve en langue "usuelle").

Exercice 3. Montrer que pour tous énoncés A, B et C les deux énoncés suivants sont dérivables en déduction naturelle.

1. $A \Rightarrow B \Rightarrow A$.
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

(On peut montrer que ces deux axiomes plus la loi de Peirce énoncée ci-dessous, et la règle du modus ponens permettent d'axiomatiser la déduction pour le calcul propositionnel avec pour seul connecteur "$\Rightarrow$").

Exercice 4 (Loi de Peirce). Soient A et B sont deux énoncés quelconques.

1. Montrer que le séquent $\neg A \vdash A \Rightarrow B$ est dérivable en déduction naturelle.
2. Montrer que la loi de Peirce est dérivable (utilisez le raisonnement par l'absurde) :

$$\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \ .$$

Exercice 5. Montrer que la règle de coupure : « Si $\Gamma \vdash A$ et si $\Gamma', A \vdash C$ alors $\Gamma, \Gamma' \vdash C$ » est dérivable en déduction naturelle (utilisez les règles de la déduction du polycopié). Cette règle est réalisée en PhoX par les commandes `prove A.` et `use A.` . Un cas particulier de cette règle est la transitivité de la relation de déduction : « si $A \vdash B$ et $B \vdash C$ alors $A \vdash C$ ».

Exercice 6. Soit la règle : «Si $\Gamma \vdash A \vee C$ et si $\Gamma', C \vdash B$ alors $\Gamma, \Gamma', \neg A \vdash B$». Montrer que cette règle est dérivable dans le système vu en cours (cf. poly). Vous ne pouvez utiliser *que les règles de la déduction énumérées dans le polycopié.*

Exercice 7. La règle du tiers exclu : «Si $\Gamma, \neg A \vdash C$ et si $\Gamma', A \vdash C$ alors $\Gamma, \Gamma' \vdash C$», est souvent utile dans les preuves. Nous allons montrer que cette règle est dérivable dans le système vu en cours (cf. poly). Pour les questions suivantes vous ne pouvez utiliser que les règles de la déduction énumérées dans le polycopié.

1. Montrer que si l'on peut dériver $\vdash A \vee \neg A$, alors la règle du tiers exclu est dérivable.
2. Montrer que la relation $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ est dérivable.
3. Montrer que la relation $\neg(A \vee \neg A) \vdash A$ est dérivable.
4. En déduire que $\vdash A \vee \neg A$ est dérivable.

La règle du tiers exclu est réalisée en PhoX par la commande `elim excluded_middle.`.

Exercice 8. Le langage contient un symbole de constante noté $\sqrt{2}$ une opération binaire, l'exponentiation notée x^y, et un prédicat unaire R pour (rationnel). La théorie T contient deux axiomes $\neg R(\sqrt{2})$, et $R\left((\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}\right)$.

Montrer que l'on peut dériver en déduction naturelle

$$\vdash_T \exists x \exists y (R(x^y) \wedge \neg R(x) \wedge \neg R(y))$$

(on peut utiliser la règle du tiers exclu démontrée à l'exercice précédent).

Exercice 9. On suppose que la relation binaire R est transitive est symétrique sur un ensemble A. Le raisonnement suivant est faux.

Montrons que R est réflexive, soit x un élément quelconque de A, on prend y dans A tel que xRy alors par symétrie yRx donc par transitivité xRx.

Expliquez pourquoi : donner un exemple de relation transitive, symétrique, et non réflexive ; préciser en quoi le raisonnement est faux (on peut essayer de l'analyser avec les règles de la déduction).

Exercice 10. Dans la suite A, B et C désignent des formules quelconques. Pour montrer $E \equiv F$, il faut montrer $E \vdash F$ et $F \vdash E$.

1. Montrer la commutativité et l'associativité du $\wedge$:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A \ ; \quad A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$

2. Montrer que si on peut dériver $A \equiv B$, alors on peut dériver $\neg A \equiv \neg B$.
3. Dériver $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ puis montrer l'une des lois de de Morgan :

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

On peut refaire cet exercice pour la disjonction, montrer la distributivité du $\vee$ sur le $\wedge$ et du $\wedge$ sur le $\vee$. La deuxième loi de de Morgan est plus difficile à démontrer (utiliser la règle du tiers exclu).