Feuille d'exercices n°1

Variables libres, variables liées

Rappel. Si une variable x est *liée* ou *muette* dans une expression E, alors on obtient une expression de même sens en remplaçant *toutes* les occurrences de cette variable x par une lettre n'apparaissant pas dans l'expression E. Sauf quand on s'autorise certaines libertés dans l'écriture des liaisons (occurrence indicative manquante), on obtient un assemblage qui n'a pas de sens en remplaçant *toutes* les occurrences d'une variable liée x par une constante.

Si une variable x est *libre* ou *parlante* dans une expression E, alors on obtient une expression qui a un sens (en général différent) en remplacant *toutes* les occurrences de cette variable x par n'importe quel terme (désignant une objet du domaine sur lequel x varie).[1]

Des variables liées différentes peuvent porter le même nom dans une expression. À une variable liée, nommons la x, est associée un *champs* ou une *portée* : la sous-expression où toute occurrence libre de la lette x dans la sous-expression fait référence à cette variable. Même si cela a un sens, on évite de superposer les portée de variables de même nom (on considère qu'une variable libre a pour portée toute l'expression). Quand les portées des variables de même nom sont disjointes on dit que l'expression est "polie".

Exemples. Dans l'expression $e_{x,a} =_d x + \int_0^x (t^2 + t + a)dt$, x a 2 occurrences libres, a a une occurrence libre, t a 2 occurrences liées (plus l'occurrence indicative). On a $e_{x,a} = x + \int_0^x (u^2 + u + a)du$. On peut écrire $e_{2,1} = 2 + \int_0^2 (t^2 + t + 1)dt$.

Dans l'expression $\forall x(Px \text{ et } Qx) \Leftrightarrow (\forall x Px \text{ et } \forall x Qx)$, il y a trois groupes d'occurrences de la lettre x, toutes sont liées. Les portées sont disjointes. L'expression est close au premier ordre (il dépend de P et Q qui désignent des prédicats unaires).

Dans l'expression $e_x = x + \int_0^1 (x^2 + x)dx$, il y deux groupes d'occurrences de la lettre x, l'un correspondant à une variable libre, l'autre à une variable liée. On a $e_x = x + \int_0^1 (t^2 + t)dt$. On peut écrire $e_1 = 1 + \int_0^1 (x^2 + x)dx$. On évite cependant la première écriture de e_x qui n'est pas polie (les portées des deux variables de nom x se superposent).

Exercice 1. Pour chacune des expressions, déterminer si elle désigne un objet ou un énoncé, indiquez (graphiquement) les différent groupes de lettres de variables, indiquez s'ils sont libres ou liés, donnez un nom à l'expression faisant apparaître toutes les variables libres. S'il y a lieu, transformez ces expressions en expressions "polies".

1. On se situe dans $\mathbb{R}$.
$\int_0^1 (x + y)dx$, $x \int_0^x 2dy$, $\int_0^t x^2 dx + \int_t^2 y^2 dy$, $t \int_0^t y dt$, $\int_0^1 x(\int_0^1 xy dy)dx$, $x^2 + x + \int_0^x 2x dx$, $\{y \in \mathbb{R}/y^2 - x^2 > 0\}$,
$\{x \in \mathbb{R}/ \int_0^x at dt \geq ax\}$, $: (x, y) \mapsto x$, $: (x, y) \mapsto ax^2 + by^2 + c$,
$\{a \in \mathbb{R}/$la fonction $: x \mapsto ax^2 + bx + c$ est croissante au sens large sur $\mathbb{R}^+\}$.

2. On se situe dans $\mathbb{N}$.
$\sum_{i=j}^{n} i + j, \sum_{j=i}^{n} i + j, \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} (i + j).$

3. On se situe dans $\mathbb{N}$. Substituez P dans le schéma de formules (récurrence) :

$$[P(0) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow P(y + 1))] \Rightarrow \forall x P(x)$$

par la propriété définie par $P(x) \equiv_d \exists y \ (x = 2.y \vee x = 2.y + 1)$, puis par $P(z) \equiv_d (x + y) + z = x + (y + z)$. Répondez à la question posée en tête de l'exercice pour les expressions obtenues.

Exercice 2. Reprendre les questions de l'exercice précédent pour les expressions qui suivent, puis traduisez les à l'aide des quantificateurs $\forall, \exists$.

1. L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a deux racines réelles.
2. L'entier x est de la forme $2u + 3v$.
3. Les entiers de la forme $2u + 3v$ sont pairs si v est pair.

Exercice 3. Dans la suite f désigne une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Traduire les expressions suivantes en utilisant la relation d'ordre $<$ et le langage de la logique du premier ordre égalitaire sur f et $<$ (connecteurs usuels, égalité, variables sur $\mathbb{N}$ et quantificateurs $\forall, \exists$) :

1. f prend au plus deux valeurs ;
2. f prend au moins deux valeurs distinctes ;
3. f prend une infinité de valeurs ;
4. f prend un nombre fini de valeurs ;
5. certaines valeurs atteintes par f le sont une infinité de fois ;
6. toute valeur atteinte par f ne l'est qu'un nombre fini de fois.

Lesquels des énoncés que vous avez trouvés gardent le sens souhaité si maintenant f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (les variables des énoncés parcourent $\mathbb{R}$ et non plus $\mathbb{N}$), de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$?

[1] On n'a pas vraiment donné de définition : dans ce qui qui précède on n'a pas précisé ce que l'on entendait par occurrences d'une même variable x. Il ne peut s'agir de toutes les occurrence de la lettre x, deux variables différentes peuvent avoir le même nom. Pour préciser il faudrait justement savoir ce que signifient libre est lié ! Pour définir proprement la notion de variable libre et liée on doit définir le langage utilisé et définir cette notion par induction sur la construction des expressions du langage.