Examen du 8 juin 2004 : Corrigé

(durée: 3 heures)

Exercice 1. **i.** $\forall x\ \neg x < x$;

ii. $\forall x \forall y \forall z (x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)$;

iii. $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$;

iv. $\forall x\ x < s\,x$;

v. $\forall x \forall z (x < z \Rightarrow s\,x \leqslant z)$;

vi. $\forall x \exists y\ x = s\,y$.

1. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni de l'ordre et du successeur usuel : $a \mapsto a+1$ est un modèle de T. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels muni de l'ordre usuel est totalement ordonné, on ne peut définir de fonction successeur, par exemple si on interprète s par : $a \mapsto a+1$, on n'obtient évidemment pas un modèle de T.

2.

$$\forall x \forall y (x < y \Rightarrow s\,x < s\,y)$$

Soient x et y tels que $x < y$. D'après **v** $s\,x \leqslant y$, d'après **iv** et par transitivité $s\,x < s\,y$.

3.

$$\forall x \exists x' (x' < x \wedge \forall z (z < x \Rightarrow z \leqslant x')) \qquad (vi')$$

Soit x quelconque. D'après **vi**, il existe x' tel que $s\,x' = x$. On a bien d'après **iv**, $x' < s\,x' = x$. Soit z quelconque tel que $z < x$. Par totalité on a $x' < z$ ou $z \leqslant x'$. On ne peut avoir $x' < z$, car sinon par **v** on aurait $x = s\,x' \leqslant z$, et par transitivité $z < z$ ce qui contredit **i**. Donc $z \leqslant x'$.

4. Soit T_0 la théorie dans le langage $\mathcal{L}$ qui contient les axiomes **i** à **v** de T, soit T' la théorie T_0 plus la propriété (vi') de la question précédente, soit T'' la théorie T_0 plus l'axiome $\forall x \exists y\ y < x$.

a. La structure $(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}})$ où $<^{\mathbb{N}}$ et $s^{\mathbb{N}}$ sont l'ordre et le successeur usuels vérifie les axiomes d'ordre total, les propriétés **iv** et **v**, donc T_0 mais pas la propriété **vi**, puisque 0 n'est pas un successeur. Les théories T et T_0 ne sont donc pas équivalentes.

b. On a vu (question **3**) que la théorie T a pour conséquence la théorie T'. Réciproquement supposons (vi'), soit x quelconque et x' tel que

$$x' < x \ (1) \quad \text{et} \quad \forall z (z < x \Rightarrow z \leqslant x') \ (2)$$

On a alors $s\,x' \leqslant x$ (car $x' < x$ (1) et **v**). Supposons $s\,x' < x$, on a alors d'après (2), $s\,x' \leqslant x'$ ce qui contredit l'axiome **iv** (et l'antisymétrie). On a donc bien $s\,x' = x$. La théorie T' a pour conséquence la théorie T.

c. On considère la structure $\mathcal{M} = (M, <^{\mathcal{M}}, s^{\mathcal{M}})$ d'ensemble de base $M = \{0\} \times \mathbb{Z} \cup \{1\} \times \mathbb{N}$. On définit

$$(a,b) <^{\mathcal{M}} (c,d) \equiv_d \begin{cases} a < c \\ \text{ou} \\ a = c \text{ et } b < d \end{cases} \qquad s^{\mathcal{M}}(a,b) = (a, b+1)$$

Cette structure définit un ordre total (ordre lexicographique). La fonction s définit bien un successeur pour l'ordre : $(a,b) < (a,b+1)$, et si $(a,b) < (c,d)$, alors soit $a < c$ et donc $(a,b+1) < (c,d)$, soit $a = c$ et $b < d$ et donc $(a,b+1) \leqslant (c,d)$. On a bien $\forall x \exists y\ y < x$: pour $(0,b)$, on a $(0,b-1) < (0,b)$, pour $(1,b)$ on a $(0,0) < (1,b)$. C'est donc un modèle de T''. Mais $(0,0)$ n'est pas un successeur donc ce n'est pas un modèle de T. Les théories T et T'' ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 (déduction). **1.**

$$\vdash_T \forall x \forall y \forall z (x \leqslant y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)$$

Par trois introductions du $\forall$ et deux de l'implication, il suffit de montrer

$$x \leqslant y, y < z \vdash_T x < z$$

par élimination de la disjonction à partir de l'axiome de la déduction $x \leqslant y \vdash x \leqslant y$, il suffit de montrer

$$x < y, y < z \vdash_T x < z \quad \text{et} \quad x = y, y < z \vdash_T x < z$$

Par transitivité (axiome **ii**, trois éliminations du $\forall$ et deux de l'implications sur les axiomes de la déduction $x < y \vdash x < y$ et $y < z \vdash y < z$, on a bien

$$x < y, y < z \vdash_T x < z\ .$$

Par règle de l'égalité de $x = y \vdash x = y$ et $y < z \vdash y < z$ on déduit

$$x = y, y < z \vdash x < z\ .$$

2. Pour montrer

$$\vdash_T \forall x \forall y (x < y \Rightarrow s\,x < s\,y)$$

par deux introductions de $\forall$ et une introduction de $\Rightarrow$, il suffit de montrer

$$x < y \vdash_T s\,x < s\,y \qquad (*)$$

On a d'après l'axiome **v** par deux éliminations de $\forall$

$$\vdash_T x < y \Rightarrow s\,x \leqslant y$$

or $x < y \vdash x < y$ (axiome de la déduction) donc :

$$x < y \vdash_T s\,x \leqslant y \qquad (1)$$

D'après l'axiome **iv** et une élimination de $\forall$:

$$\vdash_T y < s\,y \qquad (2)$$

D'après le résultat de la question précédente et par trois élimination de $\forall$ on a :

$$\vdash_T s\,x \leqslant y \Rightarrow y < s\,y \Rightarrow s\,x < s\,y$$

d'où par deux éliminations de $\Rightarrow$ avec (1) et (2) on a $(*)$.

Exercice 3 (élimination des quantificateurs).

1. **a.** $\forall x \forall y (s\,x \leqslant s\,y \Rightarrow x \leqslant y)$;
Soient x et y quelconques tels que $s\,x \leqslant s\,y$. On a d'après **iv** $x < s\,y$. Par totalité $x \leqslant y$ ou $y < x$. Si $y < x$, d'après **v** $s\,y \leqslant x$, ce qui contredit $x < s\,y$ (anti-symétrie). Donc $x \leqslant y$.

b. $\forall x \forall y (s\,x = s\,y \Rightarrow x = y)$.
Soient x et y quelconques tels que $s\,x = s\,y$. On a alors $s\,x \leqslant s\,y$ et $s\,y \leqslant s\,x$. D'après la question précédente $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, et par anti-symétrie $x = y$.

c. $\forall x \forall y (s\,x < s\,y \Rightarrow x < y)$;

Soient x et y quelconques tels que $s\,x < s\,y$. D'après **1.a**, $s\,x \leqslant s\,y$. On a $s\,x \neq s\,y$, or si $x = y$, $s\,x = s\,y$. Donc $x \neq y$ donc $x < y$.

2. les termes sont de la forme $s^p\,x$, les formules atomiques de la forme $s^p\,x = s^q\,y$ où $p, q \in \mathbb{N}$ et x et y sont deux variables du langage qui peuvent être identiques.

3. Commençons par les égalités. On a $x = y \Leftrightarrow s\,x = s\,y$ (règles de l'égalité pour le sens direct, question **1.b** pour la réciproque). On a donc si $n \geqslant m$, $s^n\,x = s^m\,y \Leftrightarrow s^{n-m}\,x = y$ (récurrence immédiate sur m). De même si $m \geqslant n$, $s^n\,x = s^m\,y \Leftrightarrow x = s^{m-n}\,y$, et donc $s^n\,x = s^m\,y \Leftrightarrow s^{m-n}\,y = x$.

On a une situation analogue pour les inégalités : d'après les résultats de la question **2** de l'exercice 1 et d'après **1.c**, $x < y \Leftrightarrow s\,x < s\,y$. Donc si $n \geqslant m$, $s^n\,x < s^m\,y \Leftrightarrow s^{n-m}\,x < y$ (récurrence immédiate sur m) et si $m \geqslant n$, $s^n\,x < s^m\,y \Leftrightarrow x < s^{m-n}\,y$ (récurrence immédiate sur n).

On a bien montré que toute formule atomique est de l'une des trois formes suivantes :

$$\begin{array}{lll} s^p\,x = y & (p \in \mathbb{N}) & \\ s^p\,x < y & (p \in \mathbb{N}) & x,\ y \text{ non nécessairement distinctes} \\ x < s^p\,y & (p \in \mathbb{N}) & \end{array}$$

4. Une égalité utilisant une seule variable est équivalente à une formule de la forme $s^p\,x = x$, formule démontrable si $p = 0$, de négation démontrable si $p > 0$ car alors $\vdash_T x < s^p\,x$ (récurrence immédiate sur $p \in \mathbb{N}^*$) et par irreflexivité $\vdash_T \neg x = s^p\,x$.

Une inégalité utilisant une seule variable est de la forme $s^p\,x < x$ ou $x < s^p\,x$.

Dans le premier cas on peut démontrer $\vdash_T x \leqslant s^p\,x$ pour $p \in \mathbb{N}$, donc (anti-symétrie, irréflexivité) $\vdash_T \neg s^p\,x < x$.

Dans le second cas, si $p = 0$ on a $\vdash_T \neg x < x$ (irreflexivité), et si $p > 0$, comme on l'a déjà vu, $\vdash_T x < s^p\,x$.

5. D'après la question précédente $\alpha \equiv_T \perp$ ou $\alpha \equiv_T \top$. Dans le premier cas $(\alpha \wedge A) \equiv_T \perp$ donc $\exists x(\alpha \wedge A) \equiv_T \perp$. Dans le second cas $(\alpha \wedge A) \equiv_T A$ donc $\exists x(\alpha \wedge A) \equiv_T \exists x\ A$.

6. On a $\exists x(s^p\,y = x \wedge A) \equiv \exists x(s^p\,y = x \wedge A[(s^p\,y/x]) \equiv A[(s^p\,y/x]$ ($A[(s^p\,y/x]$ ne contient pas x).

7. D'après les propriétés montrées à l'exercice 1, question **2**, et celles montrées en **1.b** et **1.c**, on a :

$$\vdash_T \forall z \forall z' (s\,z = s\,z' \Leftrightarrow z = z')\ mboxet\ \vdash_T \forall z \forall z' (s\,z < s\,z' \Leftrightarrow z < z')$$

d'où l'on déduit par récurrence sur p :

$$s^m\,v = s^m\,w \equiv_T s^{m+p}\,v = s^{m+p}\,w\ mboxet\ s^m\,v < s^m\,w \equiv_T s^{m+p}\,v < s^{m+p}\,w\ .$$

On en déduit que l'opération qui passe de A à A^p remplace chaque occurrence de formule atomique de A (sans quantificateurs) par une formule atomique équivalente. On a donc $A \equiv_T A^p$.

On a donc (propriétés de l'égalité), $\exists x(s^p\,x = y \wedge A) \equiv_T \exists x(s^p\,x = y \wedge A^p[y/s^p\,x]) \equiv A^p[y/s^p\,x]$ ($A^p[(s^p\,y/x]$ ne contient pas x).

8. L'ordre est total sans plus grand élément (axiome **iv**) donc $\vdash_T \exists x \bigwedge_{i=1}^n s^{p_i}\,x_i < x$, et sans plus petit élément (question **3** de l'exercice 1) donc $\vdash_T \exists x \bigwedge_{i=1}^n x < s^{p_i}\,x_i$.

9. Soit x tel que $\bigwedge_{j=1}^m x < s^{p_j}\,y_j$ et $\bigwedge_{i=1}^n s^{p_i}\,x_i < x$. On a donc d'après l'axiome **v** $\bigwedge_{i=1}^n s^{p_i+1}\,x_i \leqslant x$ et donc par transitivité $\bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^m s^{p_i+1}\,x_i < s^{p_j}\,y_j$.

Réciproquement, supposons un modèle de T, et un environnement réalisant

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{m} s^{p_i+1}\,x_i < s^{p_j}\,y_j\ .$$

L'ordre étant total il existe un plus grand élément parmi les $s^{p_i}\,x_i$, soit $s^{p_{i_0}}\,x_{i_0}$, et un plus petit élément parmi les $s^{p_j}\,y_j$, soit $s^{p_{j_0}}\,y_{j_0}$. On a par hypothèse $s^{p_{i_0}+1}\,x_{i_0} < s^{p_{j_0}}\,y_{j_0}$. On a donc $s^{p_{i_0}}\,x_{i_0} < s^{p_{i_0}+1}\,x_{i_0} < s^{p_{j_0}}\,y_{j_0}$. Par choix de i_0 et j_0, on a bien trouvé x, soit $s^{p_{i_0}+1}\,x_{i_0}$, (x n'est pas l'un des x_i, ni l'un des y_j) tel que $\bigwedge_{j=1}^{m} x < s^{p_j}\,y_j$ et $\bigwedge_{i=1}^{n} s^{p_i}\,x_i < x$.

10. Montrons par récurrence sur l que pour toute conjonction C de formules atomiques de longueur inférieurer ou égale à l, $\exists x\ C$ équivaut à une formule sans quantificateurs. Par convention la seule conjonction de longueur 0 est $\top$ ("neutre" pour la conjonction).

$l = 0$ **:** On a $\exists x \top \equiv \top$.

$l \mapsto l+1$ On suppose le résultat pour toute conjonction de longueur inférieure ou égale à l. On sait qu'il existe une conjonction de formules atomiques de la forme décrite en **3**, équivalente à C et de même longueur que C d'après le résultat de la question **3**, appelons-la C_0.

Si C_0 contient une formule atomique qui ne contient pas x, soit α, $\exists x\ C_0 \equiv \exists x(\alpha \wedge C') \equiv \alpha \wedge \exists x\ C'$, où C' est une conjonction de formules atomiques de longueur l. Le résultat suit par hypothèse de récurrence sur C'.

Si C_0 contient une formule atomique qui ne contient que x comme variable libre, alors d'après la question **5**, soit $\exists x\ C \equiv_T \bot$, soit il existe une formule C' de longueur l telle que $\exists x\ C \equiv_T \exists x\ C'$, et on conclut par hypothèse de récurrence.

Si C_0 contient une égalité $s^p\,y = x$, on a vu à la question **6** que $\exists x\ C_0$ équivaut à une formule sans quantificateurs.

Si C_0 contient une égalité $s^p\,x = y$, on a vu à la question **7** que $\exists x\ C_0$ équivaut à une formule sans quantificateurs.

Si aucun des cas précédents n'est réalisé, on peut supposer que C_0 ne contient que des inégalités où x apparait d'un seul côté dans chaque inégalité. On distingue suivant que x apparait toujours à droite, toujours à gauche ou des deux côtés. Dans les deux premiers cas, on a montré à la question **8** que $\exists x\ C_0 \equiv \top$. Dans le troisème cas on a montré à la question **9** que $\exists x\ C_0$ équivaut à une formule sans quantificateurs.

11. On pose $C \equiv \bigvee_{i=1}^{n} C_i$ où chaque C_i est une conjonction de formules atomiques. On sait que $\exists$ et $\vee$ "commutent" :

$$\exists x \bigvee_{i=1}^{n} C_i \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \exists x\ C_i$$

et on conclut d'après la question précédente appliquée à chacune des $\exists x\ C_i$ que $\exists x\ C$ équivaut à une formule sans quantificateurs.

12. On rappelle que toute formule est équivalente à une formule sous forme prénexe. On montre par récurrence sur le nombre k de quantificateurs d'une forme prénexe de F que F équivaut dans T a une formule sans quantificateurs.

$k = 0$ **:** F est sans quantificateurs.

$k \mapsto k+1$ **:** Soit $F \equiv \exists x F'$, soit $F \equiv \forall x F'$.

Dans le premier cas on applique l'hypothèse de récurrence à F'. On obtient une formule C sans quantificateur, et d'après la question précédente F équivaut à une formule sans quantificateurs.

Dans le second cas $F \equiv \neg\exists x \neg F'$. On applique l'hypothèse de récurrence à $\neg F'$, et on conclut comme au premier cas.