# Examen du 8 juin 2004

(durée: 3 heures)

On ne demande des preuves formalisées en déduction naturelle qu'à l'exercice 2.

**Exercice 1.** La théorie $T$ formalise les ordres totaux discrets sans extrémités dans le langage (égalitaire) $\mathcal{L}$ de signature $(<, s)$ où $<$ est un symbole de prédicat binaire pour l'ordre strict, $s$ un symbole de fonction unaire pour le successeur. Les axiomes sont les axiomes d'ordre strict total :

**i.** $\forall x\, \neg x < x$ ;

**ii.** $\forall x \forall y \forall z (x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)$ ;

**iii.** $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$ ;

auxquels s'ajoutent les axiomes suivant ($x \leqslant y$ est une abréviation pour $x < y \vee x = y$) :

**iv.** $\forall x\; x < s\, x$ ;

**v.** $\forall x \forall z (x < z \Rightarrow s\, x \leqslant z)$ ;

**vi.** $\forall x \exists y\; x = s\, y$.

Les propriétés communes des ordres totaux ne sont pas à redémontrer.

**1.** Donner deux exemples de $\mathcal{L}$-structures, l'une qui soit modèle de $T$, l'autre qui soit un ordre total qui n'est pas modèle de $T$.

**2.** Montrer dans la théorie $T$ que la fonction successeur est croissante :

$$\forall x \forall y (x < y \Rightarrow s\, x < s\, y)$$

**3.** Montrer dans la théorie $T$ l'existence d'un prédécesseur :

$$\forall x \exists x' (x' < x \wedge \forall z (z < x \Rightarrow z \leqslant x')) \qquad (vi')$$

**4.** Soit $T_0$ la théorie dans le langage $\mathcal{L}$ qui contient les axiomes **i** à **v** de $T$, soit $T'$ la théorie $T_0$ plus la propriété $(vi')$ de la question précédente, soit $T''$ la théorie $T_0$ plus l'axiome $\forall x \exists y\; y < x$.

**a.** Montrer que les théories $T$ et $T_0$ ne sont pas équivalentes.

**b.** Montrer que les théories $T$ et $T'$ sont équivalentes.

**c.** Montrer que les théories $T$ et $T''$ ne sont pas équivalentes.

**Exercice 2 (déduction).** La théorie $T$ est celle introduite à l'exercice 1.

**1.** Formaliser en déduction naturelle la preuve de :

$$\vdash_T \forall x \forall y \forall z (x \leqslant y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)$$

**2.** Formaliser la réponse à la question **2** de l'exercice 1.

**Exercice 3 (élimination des quantificateurs).** La théorie $T$ est celle de l'exercice 1. On pourra utiliser les résultats des questions **2** et **3** de l'exercice 1. Le but des questions qui suivent et de montrer l'élimination des quantificateurs dans la théorie $T$.

**1.** Montrer dans la théorie $T$ que :

**a.** $\forall x \forall y (s\, x \leqslant s\, y \Rightarrow x \leqslant y)$ ;

**b.** $\forall x \forall y (s\, x = s\, y \Rightarrow x = y)$.

**c.** $\forall x \forall y (s\, x < s\, y \Rightarrow x < y)$ ;

**2.** On notera $s^p\,t$ pour $\underbrace{s\dots s}_{p}\,t$ ($p \in \mathbb{N}$) avec la convention $s^0\,t = t$. Décrire rapidement les formules atomiques du langage $\mathcal{L}$.

**3.** Montrer que toute formule atomique qui utilise les variables $x$ et $y$ est équivalente dans la théorie $T$ à une formule de l'une des formes suivantes ($x$ et $y$ désignent des variables non nécessairement distinctes) :

$$\begin{array}{rl} s^p\,x = y & (p \in \mathbb{N}) \\ s^p\,x < y & (p \in \mathbb{N}) \\ x < s^p\,y & (p \in \mathbb{N}) \end{array}$$

**4.** En déduire que toute formule atomique utilisant une seule variable est soit démontrable soit de négation démontrable dans $T$.

**5.** Soit $A$ une formule, et $\alpha$ une formule atomique utilisant la seule variable $x$. Montrer que

$$\exists x(\alpha \wedge A) \equiv_T \exists x\ A \quad \text{ou} \quad \exists x(\alpha \wedge A) \equiv_T \perp$$

**6.** Soit $A$ une formule sans quantificateurs. Montrer que $\exists x(s^p\,y = x \wedge A)$ équivaut à une formule sans quantificateurs.

**7.** Soit $A$ une formule sans quantificateurs. Soit $A^p$ la formule définie en substituant dans $A$ toutes les occurrences de variables $v$ par $s^p\,v$. Cela a donc un sens de définir $A^p[y/s^p\,x]$, la formule où pour toute occurrence d'une variable donnée $x$ on remplace dans $A^p$ le terme $s^p\,x$ par $y$.
Montrer que $\exists x(s^p\,x = y \wedge A) \equiv_T A^p[y/s^p\,x]$.

**8.** Montrer que, si $x_1, \dots, x_n$ sont des variables distinctes de $x$, pour $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$, $\vdash_T \exists x \bigwedge_{i=1}^n x < s^{p_i}\,x_i$ et $\vdash_T \exists x \bigwedge_{i=1}^n s^{p_i}\,x_i < x$.

**9.** Soient des entiers non nuls $m$ et $n$, des variables $y_1, \dots, y_m$ et $x_1, \dots, x_n$ non nécessairement distinctes, et $x$ une variable distincte des $x_i$ et des $y_i$. Montrer que :

$$\exists x(\bigwedge_{i=1}^{n} s^{p_i}\,x_i < x \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} x < s^{p_j}\,y_j) \equiv_T \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{m} s^{p_i+1}\,x_i < s^{p_j}\,y_j\ .$$

**10.** Soit $C$ une conjonction de formules atomiques. Montrer par récurrence sur la longueur de $C$ que $\exists x\ C$ est équivalente dans la théorie $T$ à une formule sans quantificateurs.

**11.** On rappelle que dans la théorie des ordres totaux, toute formule est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive sans négation. Montrer que dans la théorie $T$, pour toute formule sans quantificateurs $C$, $\exists x\ C$ équivaut à une formule sans quantificateurs.

**12.** Montrer que dans la théorie $T$ toute formule $F$ est équivalente à une formule sans quantificateurs.