MT 3062 — 02-03
Logique — 6 mai 2003

# Examen partiel du 30 avril 2003

(durée: 3 heures)

**Exercice 1 (déduction).** On se propose d'étudier la règle suivante qui est une version du raisonnement par contraposée : «Si $\Gamma, \neg A \vdash B$ alors $\Gamma, \neg B \vdash A$».

**1.** Montrer, en utilisant les règles de la déduction vue en cours (cf. polycopié), que cette règle de déduction est dérivable : dériver $\Gamma, \neg B \vdash A$ à partir de $\Gamma, \neg A \vdash B$. N'utilisez que les règles du polycopié.

**2.** Montrer directement (sans utiliser la question précédente ni le lemme d'adéquation) que cette règle est sémantiquement valide en calcul propositionnel, c'est à dire que si $\Gamma, \neg A \mid\!\sim B$ alors $\Gamma, \neg B \mid\!\sim A$ .
On rappelle que $\Delta \mid\!\sim C$ signifie que pour toute valuation $v$

$$(\text{ pour toute formule } B \text{ de } \Delta\ v(B) = 1) \Rightarrow v(C) = 1\ .$$

**Exercice 2 (calcul propositionnel).** Dans cet exercice on se restreint au calcul propositionnel sur un ensemble d'atomes $\mathcal{P}$. On rappelle qu'un littéral est soit un atome soit une négation d'atome.

**1.** Montrer que toute formule qui est une disjonction de littéraux comportant au moins un atome non nié, est équivalente à une formule qui n'utilise que les trois connecteurs $\wedge, \vee, \rightarrow$ (ni négation, ni absurde).

**2.** Soit $v_1$ la valuation constante égale à 1 sur tous les atomes de $\mathcal{P}$. Montrer que si $v_1(F) = 1$ et si $F$ est sous forme normale conjonctive : $F = \bigwedge_{i=1}^n F_i$ avec $n \geqslant 1$ où les formules $F_i$ sont des disjonctions de littéraux, alors chacune des disjonctions $F_i$ comporte au moins un atome non nié.

**3.** Montrer que si $v_1(F) = 1$, $F$ est équivalente à une formule écrite avec pour seuls connecteurs $\wedge, \vee, \rightarrow$ (ni négation ni absurde).

**Exercice 3 (Calcul des prédicats).** Le langage $L$ a pour signature $(+)$ (symbole de fonction binaire, notation usuelle infixe). Dans ce langage on définit :

$$x \leqslant y \equiv_d \exists a\ x + a = y\ .$$

On s'intéresse aux trois structures suivantes, où l'addition est interprétée de façon usuelle (loi produit pour $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) :

$$(\mathbb{N}, +) \quad (\mathbb{Q}^+, +) \quad (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, +)\ .$$

**1.** Montrer (rapidement) que la relation $\leqslant$ définit un ordre large dans chacune de ces trois structures. Est-ce le cas pour une $L$-structure en général ?

**2.** Montrer pour tous les couples de structures parmi ces trois, qu'il existe une formule du premier ordre du langage $L$ qui permet de les distinguer (vraie dans l'une et fausse dans l'autre).

**Exercice 4 (Calcul des prédicats).** Le langage de signature $\mathcal{L} = (<, 0, s, +)$ contient un symbole de prédicat binaire $<$, un symbole de constante $0$, un symbole de fonction unaire $s$ et un symbole de fonction binaire $+$. On utilise $u \leqslant v$ comme une abréviation pour $u < v \vee u = v$.

La théorie $T$ contient les axiomes d'ordre strict total :

**transitivité**
$\forall x \forall y \forall z (x < y \to y < z \to x < z)$ ;

**anti-réflexivité** $\forall x\ \neg x < x$ ;

**totalité** $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$ ;

les axiomes qui définissent le successeur à partir de l'ordre :

**successeur1** $\forall x \forall y (x < y \to (s\,x \leqslant y))$ ;

**successeur2** $\forall x\ x < s\,x$.

et les axiomes pour l'addition :

**associativité** $\forall x \forall y \forall z\ (x + y) + z = x + (y + z)$ ;

**commutativité** $\forall x \forall y\ x + y = y + x$ ;

**neutre** $\forall x\ x + 0 = x$ ;

**compatibilité** $\forall x \forall y \forall z (x < y \to x + z < y + z)$.

Il est clair que $\mathbb{N}$ muni de l'ordre, du successeur et de l'addition usuels est un modèle de cette théorie (inutile de le vérifier).

1. Montrer que $\vdash_T \forall x\ \ s\,x \leqslant x + s\,0$.
2. On définit sur $\mathbb{N}^2$ la relation $\prec$ par :

$$(a, b) \prec (c, d) \text{ ssi } \begin{cases} a + b < c + d \\ \text{ ou} \\ a + b = c + d \text{ et } a < c \end{cases}$$

   Montrer que la relation ainsi définie est une relation d'ordre strict compatible avec l'addition usuelle (loi produit) sur $\mathbb{N}^2$. On note également $+$ l'addition sur $\mathbb{N}^2$.
3. Montrer que pour tous entiers $a$, $n$, et $n'$ on a :

$$(a, 0) \prec (n, n') \text{ ssi } a < n + n' \quad \text{et} \quad (0, a) \preccurlyeq (n, n') \text{ ssi } a \leqslant n + n'$$

4. Définir une fonction $\sigma$ telle que la structure $\mathcal{M} = (\mathbb{N}^2, \prec, (0, 0), \sigma, +)$ soit un modèle de la théorie $T$ (on définira $\sigma(a, a')$ en distinguant les cas $a' = 0$ et $a' \neq 0$). Précisez $\sigma(0, 0)$.
5. Montrer que $\nvdash_T \neg \forall x\ x + s\,0 = s\,x$, et que $\nvdash_T \forall x\ x + s\,0 = s\,x$.