MT 3062 | 02-03
Logique | 12 juin 2003

Examen du 6 juin 2003

(durée: 3 heures)

On ne demande des preuves formalisées en déduction naturelle que dans la deuxième question du premier exercice.

Exercice 1 (déduction). Le langage contient un symbole de constante "a" est un symbole de prédicat binaire "$\in$".

1. Montrez que $\neg\forall x(x \in a \leftrightarrow \neg x \in x)$ est une formule universellement valide (on demande une preuve rédigée de façon "usuelle", et pas une preuve entièrement formalisée, ce qui est le sujet de la deuxième question).

2. On se propose maintenant de donner une preuve formelle en déduction naturelle sans raisonnement par l'absurde de l'énoncé précédent. Les seules règles autorisées sont donc celles du polycopié, sauf celle de raisonnement par l'absurde.

a. Donnez une preuve en déduction naturelle sans raisonnement par l'absurde de chacun des deux énoncés (où A une formule quelconque) :

$$(A \to \neg A) \to \neg A \qquad (\neg A \to A) \to \neg\neg A$$

b. Montrez que $\neg\forall x(x \in a \leftrightarrow \neg x \in x)$ est prouvable en déduction naturelle sans raisonnement par l'absurde ($A \leftrightarrow B$ est considéré comme une abréviation de $(A \to B) \wedge (B \to A)$).

Exercice 2 (élimination des quantificateurs). Le langage est celui du calcul des prédicats du premier ordre *sans égalité* avec pour signature $\mathcal{S} = (0, 1, P)$ où 0 et 1 sont deux symboles de constantes et P un symbole de prédicat à une place. La théorie T contient les deux seuls axiomes : $P0$ et $\neg P1$.

1. Les formules suivantes sont elles conséquences de T ? Et leurs négations (justifiez) ?

$$\forall x Px \ ; \quad \exists x\ Px \ ; \quad \forall x \forall y((Px \to Py) \to Px)$$

2. Donnez une description rapide des formules atomiques du langage, puis des formules atomiques closes du langage (on rappelle que l'égalité ne fait pas partie du langage).

3. Montrez que pour toute formule close sans quantificateurs F, F est conséquence de T ou sa négation est conséquence de T.

4. Soit A une conjonction de formule atomiques et négations de formules atomiques dont les variables libres sont parmi $x, y_1, \ldots, y_n$. Montrer que $\exists x\ A$ est équivalente à une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_n$.

5. Soit B une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $x, y_1, \ldots, y_n$. Montrer que $\exists x\ B$, puis $\forall x\ B$ sont équivalentes à des formules sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_n$.

6. Montrez que toute formule dont les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_n$ est équivalente à une formule sans quantificateurs dont les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_n$.
7. Déduisez en que la théorie T est complète dans le calcul des prédicats sans égalité (pour toute formule close sans égalité, soit elle est conséquence de T, soit sa négation est conséquence de T).

Exercice 3 (calcul des prédicats). On reprend l'exercice précédent dans le cadre du calcul des prédicats *égalitaire* : le langage est égalitaire de même signature $\mathcal{S}$, la théorie T est la même. Cet exercice peut être traité indépendemment du précédent.

1. Rappelez comment s'exprime en calcul des prédicats "il existe un unique x tel que Px", que l'on note $\exists! x\ Px$. Cette formule est-elle démontrable dans T ? Et sa négation ?
2. La théorie T est-elle complète en calcul des prédicats égalitaire ?

Exercice 4 (compacité). Le langage $\mathcal{L}$ a pour signature (R), où R est un symbole de relation binaire. La théorie T_0 est la théorie des relations d'équivalence : R est réflexive, symétrique et transitive. On rappelle que, dans un modèle $(M, \overline{R})$ de T_0, on appelle classe d'équivalence un sous-ensemble C de M dont les éléments sont tous en relation entre eux, et qui contient tous les éléments en relation avec un élément quelconque de C. Les classes d'équivalence définissent une partition de M.

1. Dans le langage du premier ordre $\mathcal{L}$:
   - **a.** explicitez T_0,
   - **b.** donnez une formule A_2 qui axiomatise les relations d'équivalence comportant au moins 2 classes d'équivalence,
   - **c.** donnez une formule A_n qui axiomatise les relations d'équivalence comportant au moins n classes d'équivalence ($n \geqslant 3$),
   - **d.** donnez une théorie qui axiomatise les relations d'équivalence comportant une infinité de classes d'équivalence.
2. Montrez que si T est une théorie contenant T_0 et telle que pour tout entier N, il existe un entier $n \geqslant N$ et un modèle de T qui comporte au moins n classes d'équivalences, alors T a un modèle comportant une infinité de classes d'équivalence (utiliser la question précédente, et le théorème de compacité).
3. En déduire que l'on ne peut axiomatiser les relations d'équivalence ayant un nombre fini de classes d'équivalence.
4. En déduire que l'on ne peut finiment axiomatiser les relations d'équivalence ayant un nombre infini de classes d'équivalence.