Feuille d'exercices n°4

Cardinalité et raisonnement diagonal

Dans cette feuille d'exercices on appelle

— *ensemble dénombrable* un ensemble en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
— *ensemble infini* un ensemble dont un sous-ensemble est dénombrable.

Deux ensembles A et B qui sont en bijection sont dit *équipotents*, on note $A \sim B$. On dit aussi que *A et B ont même cardinal.*

Exercice 1. Trouver à chaque fois une fonction bijective :

1. de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$; de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N} \ / \ x \geq a\}$ pour un entier a donné ;
2. de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N}$ / x est pair$\}$; de $\mathbb{N}$ dans $\{x \in \mathbb{N}$ / x est impair$\}$; de $\mathbb{N}^*$ dans $\{x \in \mathbb{N}$ / x est impair$\}$; de $\mathbb{Z}^{-*}$ dans $\mathbb{N}^*$; de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ (se servir de ce qui précède) ;
3. de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ puis de de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$; de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$;
4. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ (on peut par exemple se servir d'une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$) ;
5. de $\mathbb{R}^*$ dans $]0,+\infty[$ (se servir de questions précédentes), puis de $\mathbb{R}$ dans $[0,+\infty[$, puis de $\mathbb{R}$ dans $[0,1[$.

Raisonnement diagonal

Exercice 2. Pour cet exercice vous pouvez vous inspirer du raisonnement diagonal vu en cours pour $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N} \to \{0,1\}$.

1. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Construire par diagonalisation une fonction g différente de toutes les fonctions f_i.
2. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 3. On nomme C l'ensemble des fonctions croissantes (au sens large) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$f \in C \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in \mathbb{N} \ f(x) \leq f(x+1)\,.$$

1. Montrer que l'ensemble C est infini (cf. introduction).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C indexée par n. Soit g la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$g(n) = 1 + (f_0(0) + \cdots + f_n(n)) \quad (\text{ ou encore } g(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} f_i(i))\,.$$

2. Montrer que $g \in C$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g \neq f_n$.
4. En déduire que C n'est pas dénombrable.

Exercice 4. Montrer par un raisonnement diagonal que l'ensemble des fonctions strictement croissantes n'est pas dénombrable en vous inspirant de l'exercice précédent.

Exercice 5. Cette diagonalisation est un peu plus délicate. On veut construire par diagonalisation sur une énumération $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fonctions surjectives de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une fonction g qui soit différente des f_i mais également surjective. Si on utilise une fonction diagonale comme celle de l'exercice 1, aucune raison d'obtenir une fonction surjective. L'idée est la suivante :

— quand $n = 2k$ est pair, on choisit $g(n)$ pour que $g \neq f_k$;
— quand $n = 2k+1$ est impair, on choisit $g(n)$ pour que g soit surjective, en prenant la première valeur non encore atteinte.

1. Soit une énumération $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fonctions surjectives de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Définir précisément, en vous inspirant de l'idée ci dessus, une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective et différente des f_i.
2. En déduire que l'ensemble des fonctions surjectives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Dans la suite on appelle
— *ensemble dénombrable* un ensemble en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
— *ensemble infini* un ensemble dont un sous-ensemble est dénombrable.
Deux ensembles A et B qui sont en bjection sont dit *équipotents*, on note $A \sim B$. On dit aussi que *A et B ont même cardinal*.

Exercice 6. Montrer que si E est infini et A est une partie finie ou dénombrable de E telle que $E \setminus A$ est infini, alors E est équipotent à $E \setminus A$ (indication : utiliser une partie dénombrable de $E \setminus A$).

Exercice 7. Le but de l'exercice est de démontrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \equiv \mathbb{R}$. Une autre solution, utilisant le théorème de Cantor-Bernstein, a été donnée en cours.

1. Rappeler pourquoi $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$, ont même cardinal.
2. Montrer que l'ensemble de parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
3. En déduire que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ est de même cardinal que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (cf. exercice précédent).
4. En se servant de la numérotation binaire, établir une bijection entre $[0,1[$ est l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$.
5. En déduire que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Exercice 8. Montrer que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable : $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. On peut utiliser le théorème de Cantor-Bernstein, les résultats de la feuille d'exercice précédente, et le lemme préliminaire de la section 4.1 (dénombrabilité) du polycopié.

Exercice 9. On a une solution simple pour ces exercices en utilisant que $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, les propriétés de la section 2 du polycopié (cardinalité et opérations ensemblistes) et le lemme préliminaire de la section 4.1 (dénombrabilité).

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$, puis pour tout entier $n > 0$ $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ peut être vu comme l'ensemble des suites à valeurs réelles indexées par $\mathbb{N}$).