Feuille d'exercices n°3

Théorie des ensembles

Exercice 1. Écrire des formules utilisant uniquement les symboles primitifs du langage de la théorie des ensembles (soit : symboles logiques, égalité, appartenance et parenthèses) et exprimant :

1. $X = \emptyset$; $\emptyset \in X$; $X \in \emptyset$;
2. $y \in \bigcup X$; $Y = \bigcup X$;
3. $\{x \in A \mid F[x]\} = \{y \in B \mid G[y]\}$;
4. X est la paire $\{u, v\}$; X est une paire, une vraie paire, un singleton ;
5. G est le graphe d'une fonction f telle que $f(x) = y$; G est le graphe d'une fonction f injective de A dans B.

Exercice 2. S'inspirer du paradoxe de Russell pour montrer que, étant donné un ensemble d'ensembles Y, il existe un ensemble x tel que $x \notin Y$. En déduire qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles (la classe de tous les ensembles est une classe propre).

Exercice 3. Déduire du paradoxe de Russell que la classe de tous les singletons n'est pas un ensemble.

Exercice 4 (couples de Wiener-Kuratowski).

1. Montrer que pour des paires $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ d'éléments non nécessairement distincts on a :

$$\forall a, b, c, d\, [\{a, b\} = \{c, d\} \Rightarrow ((a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c))]$$

2. On pose $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (couple de Wiener-Kuratowski). Montrer la propriété fondamentale des couples pour cette définition :

$$\forall a, b, c, d\, [(a, b) = (c, d) \Rightarrow (a = c \wedge b = d)]$$