Feuille d'exercices n°2

Ensembles ordonnés

Définitions :

— l'ordre $(B, \leq_B)$ *prolonge* l'ordre $(A, \leq_A)$ si $A \subset B$ et le graphe de $\leq_A$ est inclus dans le graphe de $\leq_B$;

— un *isomorphisme* entre deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ est une bijection ϕ de A dans B vérifiant :

$$\forall x,\ y \in A (x \leq_A y \Leftrightarrow \phi(x) \leq_B \phi(y) ;$$

— un *plongement* d'un ensemble ordonné $(A, \leq_A)$ dans un ensemble ordonné $(B, \leq_B)$ est une fonction ψ de A dans B vérifiant :

$$\forall x,\ y \in A (x \leq_A y \Leftrightarrow \psi(x) \leq_B \psi(y) ,$$

une telle fonction est nécessairement injective et définit un isomorphisme entre $(A, \leq_A)$ et $(\psi(A), \leq_B)$.

Remarquez que si $(B, \leq_B)$ prolonge $(A, \leq_A)$, la fonction identité de A dans B définit un plongement de A dans B.

Exercice 1. Dans un ensemble ordonné $(A, \leq)$, on dit que y est *successeur* de x, noté $x \prec y$, quand

$$x < y \text{ et } \forall z \in A \big(x \leq z \leq y \Rightarrow (z = x \text{ ou } z = y)\big) .$$

1. Soit R une relation sur E, et R^* la relation sur E définie par $x\ R^*\ y$ si et seulement si $x = y$ ou il existe une suite finie $x_0, \ldots, x_n$, avec $x = x_0\ R^*\ \ldots\ R^*\ x_n = y$ (pour $0 \leq i \leq n-1$, $x_i\ R\ x_{i+1}$, $x_0 = x$, $x_n = y$).Vérifier rapidement que $\mathbb{R}^*$ est réflexive, transitive, et que c'est la plus petite relation (au sens de l'inclusion sur les graphes) réflexive et transitive qui contient R. On la nomme *clôture réflexive et transitive de R*.
2. Montrer que si $(A, \leq)$ est fini, alors la relation $\leq$ est la clôture réflexive et transitive de sa relation « successeur ».

Exercice 2 (Diagramme de Hasse). Pour représenter un ordre fini, il suffit de représenter le graphe de la relation successeur associée d'après la question précédente. On représente habituellement ces graphes de façon que si $x < y$, y soit placé au dessus de x. Un tel graphe est appelé « diagramme de Hasse ». Décrire à l'aide d'un tel graphe tous les ordres (à isomorphisme près) à 1, 2 et 3 éléments. En déduire tous les ordres à 4 éléments qui possède un plus petit élément.

Exercice 3. Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné. Montrer que l'ordre $\leq$ est total si et seulement la relation $\not\leq$ (n'est pas inférieur ou égal) est une relation d'ordre strict.

Exercice 4. Soient $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ deux ensembles ordonnés.

1. Montrer que si $(A, \leq)$ est totalement ordonné, toute injection (bijection) croissante de $(A, \leq)$ dans $(B, \leq)$ est un plongement (resp. isomorphisme) d'ordre.
2. Montrer que l'on peut trouver $(B, \leq_B)$ tel que la propriété ci-dessus est fausse dès que $(A, \leq)$ n'est pas totalement ordonné.
3. Exhiber deux ordres totaux $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ tels que A se plonge dans B, B se plonge dans A, mais A et B ne sont pas isomorphes.

Exercice 5 (Somme linéaire). Soient deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ supposés disjoints, il existe plusieurs façons de définir un ordre sur $A \cup B$ la réunion disjointe de A et B. La plus simple est de prendre la réunion des deux relations d'ordre qui est encore un ordre. Une autre façon est la *somme linéaire (ou ordinale)* $(A, \leq_A) \oplus (B, \leq_B)$ qui est l'ensemble ordonné $(A \cup B, \leq_{A\cup B})$, qui prolonge les deux ordres sur A et sur B et place tous les élements de B après ceux de A

$$x \leq_{A\cup B} y \text{ ssi } (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in A \wedge x \leq_A y) \text{ ou } (x \in B \text{ et } y \in B \wedge x \leq_B y)$$

(quand A et B ne sont pas disjoints on peut toujours définir la somme disjointe en posant $A \uplus B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ et l'ordonner en adaptant la définition ci-dessus).

1. Montrer que si A et B sont totalement ordonnés leur somme linéaire l'est également.
2. Montrer que si A et B sont bien ordonnés leur somme linéaire l'est également.

Exercice 6. Soient $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$, $(A_3, \leq_3)$ et $(A_4, \leq_4)$ des ordres.

1. Montrer que si $(A_1, \leq_1)$ est isomorphe à $(A_3, \leq_3)$ et $(A_2, \leq_2)$ est isomorphe à $(A_4, \leq_4)$ alors $(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2)$ est isomorphe à $(A_3, \leq_3) \oplus (A_4, \leq_4)$.
2. Donner un exemple de deux ordres totaux $(A_1, \leq_1)$ et $(A_2, \leq_2)$ tels que
   a. $(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2)$ et $(A_2, \leq_2)$ sont isomorphes.
   b. $(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2)$ et $(A_1, \leq_1)$ sont isomorphes.
   c. $(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2)$ et $(A_2, \leq_2) \oplus (A_1, \leq_1)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 7 (Produit lexicographique). Il existe de même plusieurs façons de définir un ordre sur le produit cartésien de deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$. La plus simple est de définir $(a, b) \leq_{A\times B} (c, d)$ par $a \leq_A c$ et $b \leq_B d$, mais on s'intéresse ici à l'*ordre lexicographique* sur le produit $(A, \leq_A) \circ (B, \leq_B)$, qui est l'ordre $(A \times B, \leq_{A\times B})$ défini par

$$(x, y) \leq_{A\times B} (x', y') \text{ ssi } x <_A x' \text{ ou } x = x' \wedge y \leq_B y'$$

1. Montrer que si A et B sont totalement ordonnés l'ordre lexicographique sur le produit l'est également.
2. Montrer que si A et B sont bien ordonnés l'ordre lexicographique sur le produit l'est également.

Exercice 8. Soient $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$, $(A_3, \leq_3)$ et $(A_4, \leq_4)$ des ordres.

1. Montrer que si $(A_1, \leq_1)$ est isomorphe à $(A_3, \leq_3)$ et $(A_2, \leq_2)$ est isomorphe à $(A_4, \leq_4)$ alors $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ est isomorphe à $(A_3, \leq_3) \circ (A_4, \leq_4)$.
2. Donner un exemple de deux ordres totaux $(A_1, \leq_1)$ et $(A_2, \leq_2)$ tels que
   a. $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ et $(A_2, \leq_2)$ sont isomorphes.
   b. $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ et $(A_1, \leq_1)$ sont isomorphes.
   c. $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ et $(A_2, \leq_2) \circ (A_1, \leq_1)$ ne sont pas isomorphes.
3. Supposons que $(A_1, \leq_1)$ est un ordre total fini de cardinalité n. Montrer que le produit lexicographique $(A_1, \leq_1) \circ (A_2, \leq_2)$ est ordre isomorphe à $\overbrace{(A_2, \leq_2) \oplus \cdots \oplus (A_2, \leq_2)}^{(n)}$.

Exercice 9. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, ordonnés par restriction de l'ordre usuel, lesquels sont des bons ordres ?

1. $\{-\frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\}$;
2. $\{\frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\}$;
3. $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\}$;
4. $\{0\} \cup \{-\frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\}$;
5. $\{1 - \frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2 - \frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\}$;
6. $\{1\} \cup \{1 - \frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1 + \frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\}$;
7. $\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{p - \frac{1}{n} \mathbin{/} n \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que ceux qui sont des bons ordres se construisent par somme et produit à partir des bons ordres $(\mathbb{N}, \leq)$ et $\{1\}$ (c'est-à-dire qu'ils sont isomorphes à des ensembles ainsi construits).