Université Denis Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques
L3 – ***Logique et théorie des ensembles***

Feuille d'exercices n° 2

Ordres partiels et bons ordres

1 Somme et produit cardinaux. Exponentiation

Si X et Y sont deux ensembles ordonnés, on définit leur somme cardinale $X + Y$ comme l'ensemble des éléments de X ou de Y, qui sont considérés disjoints, et $x \quad y$ a la même signification que dans X ou Y, mais $x \quad y$ n'a jamais lieu si x et y n'appartiennent pas tous les deux à X ou à Y. Le produit cardinal XY est défini comme l'ensemble des couples $(x, y) \in X \quad Y$, et $(x, y) \quad (x', y')$ si $x \quad x'$ et $y \quad y'$.
L'exponentielle Y^X, où X et Y sont deux ensembles ordonnés, est défini comme l'ensemble des fonctions croissantes $X \to Y$, muni de la relation $f \quad g$ si $f(x) \quad g(x)$ pour tout $x \in X$.

Exercice 1 (propriété universelle des somme et produit). Illustrer diagramatiquement les deux opérations de somme et produit. Vérifier que ces deux relations font de $X + Y$ et de XY deux ensembles ordonnés. Observer que les deux projections $p : XY \to X$ et $q : XY \to Y$ sont des applications croissantes. Vérifier que, si A est un ensemble ordonné, et $f : A \to X$ et $g : A \to Y$ sont deux applications croissantes, il existe une unique application croissante $h : A \to XY$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X & XY \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & Y \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Énoncer une propriété similaire pour $X + Y$ en inversant le sens des flèches.

Exercice 2 (identités arithmétiques). Montrer les identités suivantes, où on identifie des ensembles ordonnés isomorphes :

$$\begin{aligned} X + Y &= Y + X & \qquad X + (Y + Z) &= (X + Y) + Z \\ XY &= YX & X(YZ) &= (XY)Z \\ X(Y + Z) &= XY + XZ & (X + Y)Z &= XZ + YZ \end{aligned}$$

Exercice 3 (identités arithmétiques). Vérifier que Y^X est un ensemble ordonné. Vérifier les identités suivantes :

$$X^{Y+Z} = X^Y X^Z, \qquad (XY)^Z = X^Z Y^Z, \qquad (X^Y)^Z = X^{YZ}.$$

Pour quel ensemble ordonné $\mathbf{2}$ a-t-on l'identité $X^{\mathbf{2}} = XX$, pour tout ensemble ordonné X ?

2 Somme et produit ordinaux

La somme ordinale $X \quad Y$ de deux ensembles ordonnés X et Y est définie comme la somme disjointe de X et Y, où $x \quad y$ garde sa signification si x et y sont tous deux dans X ou dans Y, et $x \quad y$ quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$. Le produit ordinal $X \quad Y$ est formé des couples $(x, y) \in X \quad Y$, et où $(x, y) \quad (x', y')$ si $x < x'$, ou si $x = x'$ et $y \quad y'$.

Exercice 4 (identités arithmétiques). Montrer que somme et produit ordinaux ne sont pas commutatifs, mais sont associatifs. Montrer que $(X \quad Y) \quad Z = (X \quad Z) \quad (Y \quad Z)$.

Année 2009-10

3 Majorants et bornes supérieures

Soit X un ensemble partiellement ordonné, et A une partie de X. On dit que A est *majorée* s'il existe $x \in X$ tel que $a \quad x$ pour tout $a \in A$. Dans ce cas on dit que x est un *majorant* A. On dit d'un élément a qu'il est le *plus grand élément* de A si $a \in A$ et si a majore A. On dit que $x \in X$ est la *borne supérieure* de A si x est le plus petit des majorants de A. On note alors $x = \sup A$.

Exercice 5 (résultats de base).

1. Montrer qu'un plus grand élément est unique s'il existe.
2. Montrer qu'une borne supérieure est unique si elle existe. Montrer que si A admet un plus grand élément, alors ce plus grand élément est aussi sa borne supérieure.
3. Montrer que, sous réserve d'existence des bornes supérieures, on a $A \quad B \Rightarrow \sup A \quad \sup B$, et que si $f : X \to Y$ est croissante, alors $f(\sup A) \quad \sup f(A)$. Si $f : X \to Y$ est une fonction quelconque, et A une partie de X, qu'entend-on par l'expression : $\sup_{x\in A} f(x)$?

Exercice 6 (inégalités de la théorie des jeux). Soit X et Y deux ensembles, et $u : X \quad Y \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, appelée *fonction de paiement*. L'interprétation de la fonction de paiement est la suivante : deux joueurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ont chacun des stratégies possibles, décrites par les ensembles de stratégies X et Y. Chacun choisit secrètement une stratégie, disons $x \in X$ et $y \in Y$. L'issue du jeu se solde par le paiement de la somme $u(x, y)$ par le joueur $\mathcal{Y}$ au joueur $\mathcal{X}$.

1. Montrer qu'on a toujours l'inégalité suivante :
$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} u(x, y) \quad \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} u(x, y). \tag{1}$$
2. Supposons de plus X et Y finis. Montrer qu'on a égalité dans (1) si et seulement si il existe un couple $(x_0, y_0) \in X \quad Y$, appelé *point selle du jeu*, tel que :
$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad u(x, y_0) \quad u(x_0, y_0) \quad u(x_0, y).$$
3. Quel est le comportement optimal de chacun des deux joueurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ si le jeu admet un point selle ?
4. Établir le tableau de la fonction de paiement du jeu *pierre-ciseaux-papier*, et montrer qu'il n'a pas de point selle.
5. Montrer que si (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux point selles du jeu, alors $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$, et que (x_0, y_1) et (x_1, y_0) sont deux points selle du jeu.

4 Treillis

Un treillis (anglais : *lattice*) est un ensemble partiellement ordonné E tel que, pour tous $x, y \in E$, l'ensemble $\{x, y\}$ admet une borne supérieure, notée $x \vee y$, et une borgne inférieure, notée $x \wedge y$. On parle de semi-treillis supérieur ou inférieur si seule la borne supérieure ou seule la borne inférieure existe. Remarquer qu'un ensemble partiellement ordonné P est un treillis si et seulement si tout sous-ensemble fini non vide a une borne supérieure et une borne inférieure.

Exercice 7 (les treillis comme structures algébriques).

1. Montrer que, dans un treillis, les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont des lois de composition internes associatives et commutatives satisfaisant de plus les axiomes, dits d'absorption, suivants : $a \vee (a \wedge b) = a$ et $a \wedge (a \vee b)$.
2. Réciproquement, montrer qu'un ensemble X muni de deux lois de composition internes $\vee$ et $\wedge$ associatives et commutatives satisfaisant les axiomes d'absorption définissent un treillis de manière canonique. Quelle interprétation peut-on donner de la symétrie entre les lois $\vee$ et $\wedge$?

Exercice 8 (treillis et semi-treillis complets ; morphismes). Un treillis est dit *complet* si tout sous-ensemble admet une borne supérieure et une borne inférieure ; de même pour les semi-treillis complets.

1. Montrer que tout semi-treillis complet est un treillis complet.
2. Considérer le treillis des ouverts d'un espace euclidien, et son injection dans l'ensemble des parties, pour montrer qu'un morphisme de semi-treillis n'est pas nécessairement un morphisme de treillis.

5 Exemple d'ordre partiel

Exercice 9 (treillis des partitions d'un ensemble). Soit X un ensemble. L'ensemble $\mathcal{R}$ des relations sur X est ordonné par inclusion. On note $\mathcal{R}_e$ l'ensemble des relations d'équivalence sur X, qui hérite de l'ordre sur $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions de X. On appelle *élément* d'une partition l'un quelconque des sous-ensembles de X la constituant. Une partition de X est dite *plus fine* qu'une partition , ce qui est noté , si tout élément de est une union d'éléments de .

1. Montrer que l'application canonique $\Phi : \mathcal{R}_e \to \mathcal{P}$ est un isomorphisme d'ordres partiels.
2. Montrer que $\mathcal{R}_e$ est un treillis complet. Est-ce un sous-treillis de $\mathcal{R}$? On pourra illustrer son raisonnement en s'intéressant au graphe d'une relation d'équivalence. En déduire que $\mathcal{P}$ est un treillis complet.
3. Expliciter les bornes supérieure et inférieure de deux partitions en décrivant leurs éléments. Quelles sont les bornes supérieure d'une suite croissante de partitions, et inférieure d'une suite décroissante de partitions ?

6 Bons ordres

Exercice 10 (exemples de bons ordres). Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, ordonnés par restriction de l'ordre usuel, lesquels sont de bons ordres ?

1. $\{ \ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$;
2. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$;
3. $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$;
4. $\{0\} \cup \{ \ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$;
5. $\{1 \ \ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{2 \ \ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$;
6. $\{1\} \cup \{1 \ \ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$;
7. $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{p \ \ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$.

Exercice 11 (opérations sur les bons ordres).

1. Montrer que la somme et le produit ordinaux de bons ordres est encore un bon ordre. Montrer comment tous les exemples de l'exercice 10 peuvent être construits par les opérations de somme et produit en partant des deux bons ordres $\mathbf{1} = \{1\}$ et $\boldsymbol{\omega} = \mathbb{N}$.
2. Soit A un bon ordre avec au moins deux éléments. Montrer que l'ensemble des mots finis sur A, ordonnés alphabétiquement, n'est pas un bon ordre.

Exercice 12 (principe d'induction transfinie). Soit I un bon ordre, et $\{P(i), i \in I\}$ une famille de propositions. On suppose que :

$$\forall i \in I, \quad \forall j \in I, \quad j < i \Rightarrow P(j) \quad \Rightarrow P(i).$$

Montrer que $P(i)$ est vraie pour tout $i \in I$.

Exercice 13 (théorèmes fondamentaux de la théorie des bons ordres). Si V est un bon ordre, on appelle *segment initial* de V toute sous-partie A de V vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in V, \quad y \qquad x \Rightarrow y \in A.$$

1. Montrer que si un bon ordre est infini, il contient un segment initial isomorphe à $\boldsymbol{\omega}$.
2. Montrer que tout segment initial de V est soit V, soit de la forme $\{x < a\}$, pour un certain $a \in V$.
3. Montrer qu'il existe au plus un isomorphisme d'ordres partiels entre deux segments initiaux J et K de deux bons ordres V et W.
4. Soit V et W deux bons ordres, et soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des isomorphismes d'un segment initial de V sur un segment initial de W. Montrer que la relation d'inclusion sur les segments initiaux de V induit une relation d'ordre sur $\mathcal{J}$, pour laquelle $\mathcal{J}$ possède un maximum.
5. Conclure que, si V et W sont deux bons ordres, l'un est isomorphe à un segment initial de l'autre.
6. En déduire que tout ensemble de bons ordres est bien ordonné, pour une certaine relation d'ordre canonique qu'on fournira, à condition d'identifier des bons ordres isomorphes.
7. Montrer que tout bon ordre W est isomorphe à l'ensemble bien ordonné des bons ordres V tels que $V < W$.