Université Denis Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques
L3 – ***Logique et théorie des ensembles***

Feuille d'exercices n° 1

Récurrence et bon ordre

Exercice 1 (arithmétique de Peano). On se place dans l'arithmétique de Peano, avec pour primitives la constante 0, et la fonction successeur s. On a pour axiomes :

(i) $\forall x \in \mathbb{N}, \quad s(x) \neq 0\,;$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad \big(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y\big)\,;$

(iii) Pour toute propriété P :

$$\big(P[0] \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{N}, \quad (P[y] \Rightarrow P[s(y)])\big) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}, \quad P[x].$$

L'addition et la multiplication sont définies par les équations suivantes (prises comme axiomes) :

(iv) $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x + 0 = x\,;$

(v) $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x + s(y) = s(x + y)\,;$

(vi) $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \cdot 0 = 0\,;$

(vii) $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \cdot s(y) = x \cdot y + x\,;$

Montrer les propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication (associativité, distributivité et commutativité) par récurrence, en procédant dans l'ordre indiqué :

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z\,;$
2. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad 0 + x = x\,;$
3. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad s(x) + y = s(x + y)\,;$
4. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x + y = y + x\,;$
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,;$
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\,;$
7. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad 0 \cdot x = 0\,;$
8. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad s(x) \cdot y = x \cdot y + y\,;$
9. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \cdot y = y \cdot x.$

Exercice 2 (récurrence et bon ordre en arithmétique, 1). Soient a et b deux entiers naturels. Soit $r(a, b)$ le reste de la division de a par b. Rappeler pourquoi a et b d'une part, $r(a, b)$ et b d'autre part ont même ensemble de diviseurs communs. Utiliser ceci pour rédiger une démonstration du théorème de Bezout (étant donnés deux entiers naturels a et b non tous les deux nuls, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $pgcd(a, b) = au + bv$) de deux façons différentes :

1. en utilisant directement la propriété de bon ordre sur $\mathbb{N}$ (un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément) ;
2. en utilisant une récurrence.

Exercice 3 (récurrence et bon ordre en arithmétique, 2). Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Vérifier que si $n^2 = 2p^2$, alors $n > p$, $2p > n$, et $2(n - p)^2 = (2p - n)^2$. En déduire que pour tous entiers naturels n et p, $n^2 \neq 2p^2$

1. en utilisant directement la propriété de bon ordre sur $\mathbb{N}$ (ou la variante par descente infinie) ;
2. en utilisant une récurrence.

Exercice 4 (récurrence et bon ordre en algèbre linéaire). Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, et soit $(E_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On considère l'application linéaire Φ définie ainsi :

$$\Phi : \begin{cases} E_0 \times \cdots \times E_n \to E \\ (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_0 + \ldots + x_n \,. \end{cases}$$

On note

$$\sum_{i=0}^{n} E_i = \operatorname{Im} \Phi \,,$$

et on dit que la famille $(E_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ est en somme directe si Φ est injective (c'est-à-dire, lorsque $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$).

1. Rappeler pourquoi deux sous-espaces vectoriels A et B sont en somme directe si et seulement si $A \cap B = \{0\}$. Qu'en est-il pour trois sous-espaces vectoriels A, B, C ?
2. Montrer par récurrence que la famille $(E_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ est en somme directe si et seulement si

$$\forall i = 0, \dots, n-1, \quad \Big(\sum_{j=0}^{i} E_j\Big) \cap E_{i+1} = \{0\}.$$

   On énoncera précisément la propriété à démontrer par récurrence.
3. Donner une variante de la démonstration précédente en utilisant la propriété de bon ordre.

Exercice 5 (exemple de récurrence : groupe engendré). On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est *engendré* par une partie A de G si H est le plus petit sous-groupe de G contenant A.

1. Expliquer pourquoi une telle définition est valide. Expliciter la définition de sous-groupe engendré en terme d'inclusion.
2. Montrer que si H est engendré par A, H est l'ensemble des composés d'éléments de A et de leurs inverses :

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{a_1^{i_1} \cdots , a_n^{i_n} \ : \ a_1, \dots, a_n \in A \text{ et } i_1, \dots, i_n \in \{-1, 1\}\big\}$$

   où le cas $n = 0$ correspond par convention à $\{e\}$, le singleton élément neutre de G.

On suppose maintenant que G est engendré par deux éléments s et s' d'ordre 2, et on pose $r = ss'$.

3. Montrer que

$$G = \big\{r^i \ : \ i \in \mathbb{Z}\big\} \cup \big\{r^i s \ : \ i \in \mathbb{Z}\big\}$$

   (a) par récurrence en utilisant la question 2 ;
   (b) en utilisant directement la définition de groupe engendré (montrer d'abord que $sr = r^{-1}s$ et $sr^{-1} = rs$, puis que $sr^k = r^{-k}s$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$).
4. Vérifier que : $\quad r^{-1}(r^n s)r = r^{n-1}s', \quad r^{-1}(r^n s)r = r^{n-2}s.$
5. On suppose que $s \neq e$, $s' \neq e$. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $r^n s \neq e$.

Exercice 6 (fonctions harmoniques sur des groupes libres). Soit G un groupe, qu'on suppose engendré par une partie finie S de cardinal n. On dit qu'une fonction $h : G \to \mathbb{C}$ est *harmonique* si elle vérifie la propriété de moyenne suivante :

$$\forall x \in G, \quad h(x) = \frac{1}{n} \sum_{g\in S} h(xg).$$

1. Déterminer toutes les fonctions harmoniques, et parmi elles, celles qui sont bornées pour $G = \mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$.
2. Soit G le groupe libre à deux générateurs a et b, et soit $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ (on rappelle que tout élément de G admet une écriture unique de la forme $x_1 \cdots x_n$ avec $x_i \in S$ et $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$, et que deux telles écritures distinctes désignent deux éléments distincts de G). Montrer qu'il existe une fonction harmonique bornée et non constante sur G.