

examen partiel du 21 mars 2009

(durée 2 heures)

Documents autorisés : polycopié "axiomatisation de l'arithmétique".

Exercice 1 (Théorie des ensembles). Justifiez avec précision, en indiquant les axiomes utilisés.

1. Soit A un ensemble. Existe-t-il un ensemble dont les éléments sont exactement les $\mathcal{P}(X)$ tels que $X \subset A$?
2. Soit A un ensemble non vide. Existe-t-il un ensemble dont les éléments sont exactement les X qui sont inclus dans A à au plus un élément près, (c'est-à-dire que $X \setminus A$ est vide ou un singleton)?

Exercice 2 (Axiomes de Peano). Justifiez avec précision, en indiquant les axiomes ou théorèmes utilisés.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$p(0) = 0 ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad p(s(n)) = n .$$

2. Montrer qu'il existe une fonction $m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad (y \leq x \Rightarrow y + m(x, y) = x) .$$

Exercice 3 (Théorie des ensembles, entiers). Le but de l'exercice est de donner une démonstration du principe de définition par récurrence d'une fonction (celui-ci n'est donc pas admis, ni les constructions qui l'utilisent!) pour une structure $(\mathbb{N}, 0, s, \leq)$ telle que $(\mathbb{N}, 0, s)$ est un système de Peano ($0 \in \mathbb{N}$, $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, les axiomes de Peano sont satisfaits) et \leq est relation d'ordre total sur \mathbb{N} , vérifiant :

$$- \forall x \in \mathbb{N} \quad (x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0) ;$$

$$- \forall x, y \in \mathbb{N} \quad [x \leq s(y) \Leftrightarrow (x \leq y \text{ ou } x = s(y))]$$

(on a montré en cours sans utilisé le théorème de définition d'une fonction par récurrence que les entiers de von Neumann fournissaient une telle structure).

toutes les propriétés du polycopié démontrées dans le polycopié à partir de ces équations, et qui ne concernent que l'ordre, 0 et s restent valables (le principe de définition par récurrence n'a été utilisé que pour justifier l'existence d'une relation qui satisfait ces équations).

Le cadre est celui de la théorie des ensembles de Zermelo, en particulier aux questions 4 et 5 on indiquera les axiomes (ou théorèmes) de la théorie utilisés.

On suppose (pour tout l'exercice) que E est un ensemble non vide, $a \in E$, et $h \in E^E$. On note $N_n = \{x \in \mathbb{N} / x \leq n\}$. On note $Cl(n, f)$ la conjonction des deux propriétés $Cl_0(n, f)$ et $Cl_s(n, f)$:

$$Cl_0(n, f) \equiv_d f(0) = a$$

$$Cl_s(n, f) \equiv_d \forall x \in N_n \quad [x < n \Rightarrow f(s(x)) = h(f(x))].$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction f de N_n dans E , telle que $Cl(n, f)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall f, g \in E^{N_n} \quad [Cl(n, f) \text{ et } Cl(n, g) \Rightarrow f = g] .$$

3. Conclure : énoncer et justifier un principe de définition par récurrence finie pour les entiers plus petits ou égaux à n .
4. Montrer qu'il existe un ensemble contenant uniquement les graphes des fonctions f , telles que pour un certain entier n , $Cl(n, f)$.
5. En déduire l'existence d'une fonction f de \mathbb{N} dans E vérifiant :

$$f(0) = a ; \quad f(s(x)) = h(f(x))$$

(définir son graphe à l'aide de la question précédente, vérifier que c'est bien le graphe d'une fonction, et que la fonction satisfait les équations ci-dessus).

Exercice 4 (Ordres). Un ensemble ordonné (E, \leq) est un ordre BF si :

- i. (E, \leq) est totalement ordonné ;
- ii. (E, \leq) a un plus petit élément ;
- iii. Tout élément x de E qui a un majorant strict (un élément y de E tel que $x < y$) a un plus petit majorant strict, que l'on appelle un successeur.

Montrer que :

1. tout ensemble bien ordonné est BF ;
2. la réciproque est fautive (donner un contre-exemple).

Dans un article de 1897, à une époque où les bons ordres, qui avaient été introduits par Georg Cantor, étaient encore mal connus, le mathématicien italien Burali-Forti avait pris cette définition pour celle de bon ordre. L'article est par ailleurs resté comme la première publication où apparaît une construction (déjà connue cependant de Cantor et mieux comprise par celui-ci) appelée ensuite par Russell paradoxe de Burali-Forti. Ce paradoxe met en jeu les bons ordres, mais est du même genre que par exemple celui de l'ensemble de tous les ensembles.