Feuille d'exercices n°3

Fonctions partielles calculables

Théorème du point fixe – Pour tout entier $p > 0$ pour toute fonction totale calculable à une variable α, il existe un entier e tel que $\varphi^p_e = \varphi^p_{\alpha(e)}$.
Théorème de Rice – Si A est un sous-ensemble propre de $\mathbb{N}$ (distinct de $\emptyset$ et de $\mathbb{N}$) qui est un ensemble d'indices de fonctions calculables (i.e. si $i \in A$ et $\varphi^1_i = \varphi^1_j$ alors $j \in A$) alors A n'est pas décidable.

Ensembles de fonctions effectivement énumérés. Nous dirons qu'un ensemble $\mathscr{F}$ de fonctions partielles calculables à une variable est *effectivement énuméré* s'il existe une fonction partielle calculable $\psi : N^2 \to \mathbb{N}$ telle que

$$\mathscr{F} = \{\lambda y \psi(x, y) \mid x \in \mathbb{N}\} .$$

Nous dirons aussi que $\mathscr{F}$ est effectivement énuméré par ψ. Il est par exemple très facile de montrer que l'ensemble des fonctions polynômes à une variable est effectivement énuméré. En cours, on a montré que l'ensemble des fonctions partielles calculables à une variable est effectivement énuméré. On a esquissé une méthode pour montrer que l'ensemble des fonctions primitives récursives à une variable est effectivement énuméré (voir aussi Cori Lascar p. 59-60 ex. 21 et 22).

Exercice 1. En utilisant la méthode diagonale, montrer qu'aucun des ensembles de fonctions de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ suivant ne sont effectivement énumérés : l'ensemble des fonctions totales calculables, l'ensemble des fonctions totales calculables croissantes au sens large comme au sens strict, l'ensemble des fonctions totales calculables injectives / surjectives / bijectives.

Énumération des fonctions calculables

Exercice 2.

1. Montrer (directement, sans utiliser que K n'est pas décidable) qu'il existe un x tel que $\varphi_x(x)$ n'est pas définie.
2. Montrer qu'il existe une fonction partielle calculable qui ne peut pas être prolongée en une fonction totale calculable (indication : prendre $\lambda x \varphi_x(x)$).

Problème de l'arrêt.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de fonction totale calculable qui borne la longueur du calcul, plus précisément, il n'existe pas de fonction totale calculable à 2 variables τ telle que pour tout m et pour tout x, la machine à registres de code m termine pour l'entrée x si et seulement si elle termine en moins de $\tau(m, x)$ étapes.

Exercice 4. On rappelle le schéma de définition par minimisation. Soit f partielle calculable à $p+1$ arguments, alors la fonction partielle notée

$$g(x_1, \dots, x_p) = \mu y. f(x_1, \dots, x_p, y) = 0$$

est définie en $x_1, \dots, x_p$ et vaut z si et seulement si

a. $f(x_1, \dots, x_p, z) = 0$; **b.** $\forall y < z\, f(x_1, \dots, x_p, y)$ est définie ; **c.** $\forall y < z\, f(x_1, \dots, x_p, y) \neq 0$.

La condition **b** est naturelle, si l'on pense à l'algorithme induit par cette définition. Montrer qu'elle est indispensable si l'on veut que g soit partielle calculable. Indication : si l'on omet la condition **b**, on peut alors définir une fonction totale qui détermine le problème de l'arrêt.

Exercice 5. Toute fonction partielle calculable est la composée, dans l'ordre, d'une fonction primitive récursive, et d'une fonction obtenue par minimisation à partir d'une fonction primitive récursive (forme normale de Kleene).

Montrer que cette forme est, en quelque sorte « minimale », c'est à dire qu'il existe une fonction partielle calculable ψ (à une variable), qui n'est pas obtenue directement par minimisation à partir d'une fonction totale calculable (indication : poser $\psi(x) = x$ si $\varphi_x(x)$ est définie, non définie sinon).

Théorème s-m-n

Exercice 6. Soit un ensemble $\mathscr{F}$ de fonctions (partielles) calculables à une variable. Nous dirons qu'une fonction totale à une variable f énumère des indices pour $\mathscr{F}$ si $\mathscr{F} = \{\varphi_x / x \in \operatorname{Im} f\}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est effectivement énuméré ssi il existe une fonction primitive récursive qui énumère des indices pour $\mathscr{F}$.

Exercice 7. On donne dans cet exercice une démonstration "effective" de l'indécidabilité du problème de l'arrêt.

Nous dirons qu'une fonction g à deux variables détermine l'arrêt des machines à une entrée si elle vérifie, pour tous x et y :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 1 \quad \text{si } \varphi(x, y) \text{ est définie;} \\ g(x, y) &= 0 \quad \text{si } \varphi(x, y) \text{ n'est pas définie;} \end{aligned}$$

1. Démontrer l'indécidabilité du problème de l'arrêt de la façon suivante : associer à une fonction totale calculable $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, le code d'une machine dont g ne détermine pas l'arrêt
2. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive à une variable h telle que, si i est l'indice d'une fonction à 2 variables g, $h(i)$ est l'indice d'une machine à une entrée dont g ne détermine pas l'arrêt.

Exercice 8. 1. On suppose que f est totale calculable, et énumère des indices pour un ensemble $\mathscr{F}$ de fonctions totales calculables à une variable. Construire explicitement à partir de f une fonction totale calculable qui n'est pas dans $\mathscr{F}$.

2. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive e telle que, si i est l'indice d'une fonction à une variable f qui énumère des indices pour un ensemble de fonctions *totales* calculables$\mathscr{F}$, alors $e(i)$ est l'indice d'une fonction totale calculable à une variable qui n'est pas dans $\mathscr{F}$.
3. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive h à deux variables, telle que :

$$\varphi^1_{h(a,i)}(0) = a \,;\ \varphi^1_{h(a,i)}(n+1) = \varphi^1_i(n)$$

4. Montrer que, pour tout ensemble I effectivement énumérable d'indices de fonctions totales calculables à une variable, il existe un ensemble effectivement énumérable disjoint de I d'indices de fonctions totales calculables à une variable, toutes distinctes entre elles et distinctes des fonctions d'indice dans I.

Cas particuliers du théorème de Rice

Exercice 9. Montrer que les problèmes suivant sont indécidables : **a.** en réduisant le problème de l'arrêt à chacun d'entre eux, **b.** en utilisant le Théorème de Rice.

1. Déterminer suivant x, si φ^1_x est constante partout définie ou non.
2. Déterminer suivant x, y, si $y \in \operatorname{Im}\varphi^1_x$.
3. Déterminer, suivant x, y, z, si $\varphi^1_x(y) = z$.
4. Déterminer suivant x, si $\operatorname{Im}\varphi^1_x$ est infini.
5. Déterminer suivant x, si φ^1_x n'est nulle part définie.
6. Déterminer suivant x, si φ^1_x est définie en une infinité de valeurs.
7. Un entier a étant fixé, déterminer suivant x si $a \in \operatorname{Im}\varphi^1_x$.

Exercice 10. Montrer que suivant les valeurs de l'entier i, il peut être ou non décidable de déterminer suivant y si $y \in \operatorname{Im}\varphi^1_i$.

Théorèmes du point fixe

Exercice 11 (dém. du théorème de Rice). Soit A un sous-ensemble propre décidable de $\mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe une fonction f calculable vérifiant $x \in A$ ssi $f(x) \notin A$.
2. En utilisant le théorème du point fixe, en déduire qu'il existe i et j tels que $\varphi_i = \varphi_j$, $i \in A$ et $j \notin A$.
3. En déduire le théorème de Rice.

Exercice 12. Donner une exemple de fonctionnelle $\Psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que, si f est totale alors $\Psi(f)$ est totale, Ψ se "projette" sur les indices en une fonction totale calculable, et Ψ n'a pour point fixe que la fonction nulle part définie.

Exercice 13. Redémontrer le théorème du point fixe, en montrant de plus le calcul effectif d'un indice du point fixe obtenu. C'est à dire montrez que :

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction calculable h_p à une variable, telle que, si j est l'indice d'une fonction calculable *totale* α alors, $\varphi^p_{h_p(j)} = \varphi^p_{\alpha(h_p(j))}$.

Exercice 14. En utilisant le résultat de l'exercice 13, Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive it telle que, si i est l'indice d'une fonction f à une variable, $it(i)$ est l'indice de la fonction It_f vérifiant :

$$It_f(0,x) = x;\ It_f(n+1,x) = f(It_f(n,x))$$

Exercice 15. Appelons schéma de récurrence double le schéma suivant

Si g_1, g_2 et h, sont calculables, alors, la fonction f définie ci-dessous est calculable :

$$f(a_1,\dots,a_n,0,y) = g_1(a_1,\dots,a_n,y)\,;\ f(a_1,\dots,a_n,x+1,0) = g_2(a_1,\dots,a_n,x)\,;$$
$$f(a_1,\dots,a_n,x+1,y+1) = h(a_1,\dots,a_n,x,y,f(a_1,\dots,a_n,x,f(a_1,\dots,a_n,x+1,y)).$$

Montrer que l'ensemble des fonctions partielles calculables est clos sous application du schéma de récurrence double. En déduire que l'ensemble des fonctions totales calculables est clos sous application de ce schéma (ce schéma permet de définir la fonction d'Ackermann).