Feuille d'exercices – corrigé n°5 et 6

Hiérarchie arithmétique, théorème de Gödel

Feuille 5

Exercice 8. On définit pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_j = \{i \in \mathbb{N} \mid W_i \supset W_j\}$. Montrer que pour tout j, A_j est Π_2, puis classer A_j dans la hiérarchie suivant que W_j est vide, fini ou infini (dans les deux derniers cas on montrera que A_j est complet pour une certaine classe de la hiérarchie arithmétique).

Solution - $A_j = \{i \in \mathbb{N} \mid \forall x(\psi(j,x)\downarrow \Rightarrow \psi(i,x)\downarrow)\}$. $\psi(i,x)\downarrow$ est Σ_1, $\psi(j,x)\downarrow$ est Si_1 en position négative, donc $(\psi(j,x)\downarrow \Rightarrow \psi(i,x)\downarrow)$ est Π_2, et $\forall x(\psi(j,x)\downarrow \Rightarrow \psi(i,x)\downarrow)$ est donc Π_2.
Supposons $W_j = \emptyset$ (j est un indice de la fonction nulle part définie). alors $A_j = \mathbb{N}$, et donc A_j est Σ_0 (et ne peut être Π_2-complet).
Supposons que $W_j \neq \emptyset$. Alors K se réduit à A_j. En effet On pose $\psi(i,x) = \varphi(i,i)$. Soit a un indice de ψ, $\psi(i,x) = \varphi^2(a,i,x) = \varphi^1(s^1_1(a,i),x)$. On pose $\alpha(i) = s^1_1(a,i)$. Par construction de ψ, $W_{\alpha(i)} = \mathbb{N}$ si $i \in K$, $W_{\alpha(i)} = \emptyset$ sinon, donc, comme $W_j \neq \emptyset$, $W_{\alpha(i)} \supset W_j$ ssi $i \in K$. On a bien $i \in K$ ssi $\alpha(i) \in A_j$, i.e. K se réduit à A_j. Supposons que W_j est fini non vide, et montrons A_j est Σ_1, donc d'après ce qui précède Σ_1-complet. Posons $W_j = \{a_1,\ldots,a_n\}$. On a $A_j = \{i \in \mathbb{N} \mid \bigwedge_{k=1}^{n}(\psi(i,a_k)\downarrow)\}$, or une conjonction de formules Σ_1 est Σ_1, donc A_j est Σ_1. Comme K est Σ_1-complet et se réduit à A_j, A_j est Σ_1-complet. Supposons que W_j est infini. On pose $\sigma(i,x) = \sum_{k=0}^{x}\varphi(i,k)$. Soit b un indice de σ, $\sigma(i,x) = \varphi^2(b,i,x) = \varphi^1(s^1_1(b,i),x)$. On pose $\beta(i) = s^1_1(b,i)$. Le domaine de définition de $\lambda x\sigma(i,x)$ est égal à $\mathbb{N}$ si φ_i est totale, fini sinon. On a donc $W_{\beta(i)} \supset W_j$ si φ_i est totale, et si de plus W_j est infini, alors $W_{\beta(i)} \not\supset W_j$ si φ_i n'est pas totale. On a donc bien, dans le cas où W_j est infini, $i \in C$ ssi $\beta(i) \in A_j$, i.e. C se réduit à A_j. Comme A_j est Π_2 et C Π_2-complet, si W_j est infini, A_j est Π_2-complet.

Feuille 6

Exercice 2 (Représentation des fonctions calculables). Soit f une fonction totale calculable. On suppose que G_f, le graphe de la fonction *totale* $f : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ est représenté dans R par la formule $\exists z\, A[x_1,\ldots,x_p,y,z]$ où A est Σ_0, on écrira dans la suite $A[\overline{x},y,z]$.

Solution - Cet exercice permet de montrer qu'une fonction est représentée dans une théorie qui étend R par une formule Σ_1 avec un seul quantificateur existentiel non borné en tête. Si on se contente d'une formule Σ, on a une démonstration plus simple.
La première question permet d'assurer qu'un seul quantificateur suffira. À la seocnde on ajoute une version bornée de l'unicité de l'image (dans le cas d'arguments standards) qui va permettre de passer de la représentabilité du graphe à celle de la fonction.
Posons $A'[\overline{x},y,z] \equiv_d \exists t \leqslant z(A[\overline{x},y,t] \wedge y \leqslant z)$.

1. Montrer que A' est une formule Σ_0 qui représente G_f (**a** et **b**) :
   - **a.** si $m \neq f(\overline{n})$ alors $\vdash_R \neg\exists z\, A'[\underline{\overline{n}},\underline{m},z]$;
   - **b.** si $m = f(\overline{n})$ alors $\vdash_R \exists z\, A'[\underline{\overline{n}},\underline{m},z]$
   - **c.** et vérifie de plus $\forall \overline{x},y,z\,(A'[\overline{x},y,z] \rightarrow y \leqslant z)$.

   Solution - L'indication qui avait été donnée est inutile.
   - **a.** Supposons $f(\overline{n}) \neq m$; la formule A vérifie $\vdash_R \neg\exists z\, A[\underline{\overline{n}},\underline{m},z]$, donc a fortiori A' ;
   - **b.** supposons $f(\overline{n}) = m$; la formule A' est Σ_1, et vraie, car la formule A est Σ_1, vraie, il suffit de prendre pour z le plus grand des témoins y et t pour $A_O[\overline{n},y,t]$;
   - **c.** immédiat.

2. Montrer que la formule $H[\overline{x},y] := \exists z H_0[\overline{x},y,z]$ avec :

$$H_0[\overline{x},y,z] := A'[\overline{x},y,z] \wedge \forall z' \leqslant z\, \forall y' \leqslant z'(A'[\overline{x},y',z'] \rightarrow y' = y)$$

   est Σ_1 et représente la fonction f dans R au sens suivant :

$$\vdash_R \forall y \Big(H[\underline{\overline{n}},y] \leftrightarrow y = \underline{f(\overline{n})}\Big) \qquad (*)$$

   Indication. On pourra montrer successivement pour tout p-uplet d'entiers $\overline{n}$:

a. $\vdash_R H[\overline{n}, \underline{f(n)}]$;

b. Il existe un entier d tel que $\vdash_R H_0[\overline{n}, \underline{f(n)}, \underline{d}]$;

c. $\vdash_R \forall y(H[\overline{n}, y] \to y = \underline{f(\overline{n})})$ (on utilisera le **b**, $\vdash_R \forall z(z \leqslant \underline{d} \vee \underline{d} \leqslant z)$ et la question **1**).

Solution -

a. Comme A' définit le graphe de la fonction totale f dans $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{N} \models H[\overline{n}, \underline{f(n)}]$, formule Σ_1 donc $\vdash_R H[\overline{n}, \underline{f(n)}]$;

b. comme $\mathbb{N} \models H[\overline{n}, \underline{f(n)}]$, on a un entier d tel que $\mathbb{N} \models H_0[\overline{n}, f(n), d]$, donc, H_0 étant Σ_0, $\vdash_R H_0[\overline{n}, \underline{f(n)}, \underline{d}]$.

On a donc $\vdash_R \forall y(y = \underline{f(n)} \to H[\overline{n}, y]$.
Pour la réciproque il faut montrer dans R que pour y et z quelconques :

$$\vdash_R H_0[\overline{n}, y, z] \to y = \underline{f(\overline{n})}\ .$$

On raisonne dans R, on suppose $H[\overline{n}, y, z]$, On a par ailleurs $\vdash_R H_0[\overline{n}, \underline{f(n)}, \underline{d}]$, donc $\vdash_R A'[\overline{n}, \underline{f(n)}, \underline{d}]$, donc $\vdash_R \underline{f(n)} \leqslant \underline{d}$, et on peut déduire du dernier axiome de R que $\vdash_R z \leqslant \underline{d} \vee \underline{d} \leqslant z$, on raisonne par cas :

$z \leqslant \overline{d}$, la variable z désigne donc un entier standard (axiome de R, de $H_0[\overline{n}, y, z]$ on déduit $y \leqslant z \leqslant \underline{d}$ qui est aussi standard, donc $z \leqslant \underline{d}, H_0[\overline{n}, y, z] \vdash_R y = \underline{f(n)}$

$\underline{d} \leqslant z$, on a $\underline{f(n)} \leqslant \underline{d}$ et $\underline{d} \leqslant z$, donc on peut déduire de la deuxième partie de la formule H_0 (l'unicité restreinte) : $z \leqslant \underline{d}, H_0[\overline{n}, y, z] \vdash_R A'[\overline{n}, \underline{f(n)}, \underline{d}] \to y = \underline{f(n)}$, et comme $\vdash_R A'[\overline{n}, \underline{f(n)}, \underline{d}]$, on a le résultat.

Exercice 6. On désigne par PA l'arithmétique de Peano. On rappelle qu'il existe une formule close Π_1, soit $\forall x A(x)$ où A est Σ_0, qui est vraie dans $\mathbb{N}$ et non démontrable dans PA. On rappelle également que toutes les formules Σ_1 vraies dans $\mathbb{N}$ sont démontrables dans PA.

1. Montrer que pour tout entier n, $A(\underline{n})$ est démontrable dans PA (où $\underline{n}$ désigne le terme correspondant à n).

Solution - $A(\underline{n})$ est une formule vraie dans $\mathbb{N}$ (car $\forall x A(x)$ est vraie dans $\mathbb{N}$) Σ_0 donc démontrable dans PA.

2. Montrer que $\exists x \forall y \big(A(x) \to A(y)\big)$ est démontrable en calcul des prédicats.

Solution - Soit pour tout y $A(y)$, et n'importe quel x convient, soit il existe un y_0 tel que $\neg A(y_0)$, et c'est ce dernier que l'on choisit pour x.

3. En déduire qu'il existe une formule close Σ_2 de la forme $\exists x B(x)$ qui est démontrable dans PA, mais telle que $B(\underline{n})$ ne soit démontrable dans PA pour aucun entier n.

Solution - Posons $B(x) = \forall y(A(x) \to A(y))$, qui est donc Π_1. D'après ce qui précède, $\exists B(x)$, qui est Σ_2 est démontrable dans PA. Soit n quelconque. On a $B(\underline{n}) = \forall y(A(\underline{n}) \to A(y))$. Comme $A(\underline{n})$ est démontrable (question 1), $B(\underline{n})$ équivaut dans PA à $\forall y A(y)$, et n'est donc pas démontrable dans PA.