Feuille d'exercices n°5

Hiérarchie arithmétique

Réduction, ensembles Σ_n ou Π_n complets.

On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^p$ est *réductible*, ou *se réduit* à un sous-ensemble B de $\mathbb{N}$, et l'on note $A \prec B$, s'il existe une fonction totale calculable f telle que pour tout entier x, $x \in A$ ssi $f(x) \in B$ Il existe d'autre notions de réductibilité. celle ci est la m-réductibilité (*many-one reductibility*), cf. poly. .
Un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ est dit Σ_n-complet (*resp.* Π_n-complet) ssi :

i. $E \in \Sigma_n$ (*resp.* $E \in \Pi_n$) ;

ii. $\forall X \in \Sigma_n\ X \prec E$ (*resp.* $\forall X \in \Pi_n\ X \prec E$).

Exercice 1. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que E est un sous-ensemble Σ_n, resp. Π_n, de $\mathbb{N}^p$ ssi le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ $\{\alpha_p(x_1,\ldots,x_p)/(x_1,\ldots,x_p) \in E\}$ est Σ_n, resp. Π_n. En déduire que dans la définition ci-dessus de Σ_n complet, resp. Π_n-complet, on peut quantifier seulement sur X sous-ensemble Σ_n, resp. Π_n, de $\mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que si E est un sous-ensemble Σ_n de $\mathbb{N}$ et si $F \prec E$, alors F est Σ_n. En déduire le résultat analogue pour les ensembles Π_n.

Exercice 3. Montrer pour tout entier $n \geqslant 1$ l'existence d'un ensemble Σ_n complet et d'un ensemble Π_n complet.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'un ensemble E Σ_n-complet n'est pas Π_m pour $m \leqslant n$, ni Σ_m pour $m < n$ (en particulier E n'est pas décidable, et si $n \geqslant 2$ E n'est pas semi-décidable). Montrer le résultat analogue pour un ensemble Π_n-complet (qui en particulier n'est pas semi-décidable).

Exercice 5. Montrer que $K = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi(x,x) \downarrow\}$ est Σ_1-complet, et que son complémentaire K^{c} est Π_1-complet (utiliser $\lambda i \lambda x \lambda y.\varphi^1(i,x)$).

Exercice 6. Montrer que C, l'ensemble des indices de fonctions récursives totales, est Π_2-complet.

Exercice 7. Soit W_x le domaine de la fonction récursive partielle à un argument d'indice x. On étudie les ensembles :

$$I = \{x \in \mathbb{N}\ /\ W_x \text{ est infini}\} \quad F = \{x \in \mathbb{N}\ /\ W_x \text{ est fini}\}$$

Montrer que que I est Π_2-complet, et F Σ_2-complet.

Exercice 8. On définit pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_j = \{i \in \mathbb{N} \mid W_i \supset W_j\}$. Montrer que pour tout j, A_j est Π_2, puis classer A_j dans la hiérarchie suivant que W_j est vide, fini ou infini (dans les deux derniers cas on montrera que A_j est complet pour une certaine classe de la hiérarchie arithmétique).

Exercice 9. Soient p entiers distincts ($p \geqslant 1$) notés $a_1,\ldots,a_p$ et A l'ensemble des indices des fonctions qui ne sont définies en aucun des a_i.

1. Montrer que A est Π_1, et que A n'est pas décidable. En déduire que A n'est pas semi-décidable.
2. On pose $\psi(i,x) = \varphi(i,i)$.
   - **a.** Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive α telle que $\alpha(i)$ soit un indice de $\lambda x \psi(i,x)$.
   - **b.** En déduire que $\overline{K}$ se réduit à A, et que A est Π_1-complet.