

Feuille d'exercices n°6

Théorème de Gödel

Notations : si n désigne un entier, \underline{n} désigne le terme associé $s^n 0$. Pour une formule F , $\ulcorner F \urcorner$ désigne le code de Gödel de la formule F . On utilise un ensemble d'axiomes R^- , tous Σ_0 , dont on rappelle qu'il vérifie que toutes les formules Σ vraies sont prouvables dans R^- , et un ensemble d'axiomes R qui contient R^- et le schéma d'axiomes :

$$\forall x(x \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq x) \text{ pour chaque entier } n.$$

Une théorie T est dite Σ -cohérente si toutes les formules Σ démontrables dans T sont vraies dans \mathbb{N} . Le contenu du premier exercice a été traité en cours.

Exercice 1 (représentabilité). On rappelle qu'un ensemble $A \subset \mathbb{N}^p$ est *faiblement représentable* dans une théorie T signifie qu'il existe une formule F ayant au plus p variables libres x_1, \dots, x_p telle que :

$$(n_1, \dots, n_p) \in A \text{ ssi } \vdash_T F[\underline{n}_1/x_1, \dots, \underline{n}_p/x_p]$$

et qu'un ensemble $A \subset \mathbb{N}^p$ est *fortement représentable*, ou simplement *représentable*, dans une théorie T signifie qu'il existe une formule F ayant au plus p variables libres x_1, \dots, x_p telle que :

$$\begin{aligned} \text{si } (n_1, \dots, n_p) \in A \text{ alors } & \vdash_T F[\underline{n}_1/x_1, \dots, \underline{n}_p/x_p] \\ \text{si } (n_1, \dots, n_p) \notin A \text{ alors } & \vdash_T \neg F[\underline{n}_1/x_1, \dots, \underline{n}_p/x_p] \end{aligned}$$

1. Soit T une théorie effectivement axiomatisable Σ -cohérente qui étend R^- . Montrer que $A \subset \mathbb{N}^p$ est semi-décidable si et seulement s'il est faiblement représentable dans T , et que de plus la formule qui représente A peut être choisie Σ_1 .
2. Soit T une théorie effectivement axiomatisable cohérente qui étend R . Montrer que $A \subset \mathbb{N}^p$ est décidable si et seulement s'il est représentable dans T , et que de plus la formule qui représente A peut être choisie Σ_1 (Si A est définie par la formule Σ_1 , $\exists x F$, et A^c par la formule Σ_1 , $\exists x G$, on utilisera la formule $\exists x(F \wedge \forall y < x \neg G[y/x])$).

Exercice 2 (Représentation des fonctions calculables). Soit f une fonction totale calculable. On suppose que G_f , le graphe de la fonction *totale* $f : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ est représenté dans R par la formule $\exists z A[x_1, \dots, x_p, y, z]$ où A est Σ_0 , on écrira dans la suite $A[\bar{x}, y, z]$. Posons $A'[\bar{x}, y, z] \equiv_d \exists t \leq z (A[\bar{x}, y, t] \wedge y \leq z)$.

1. Montrer que A' est une formule Σ_0 qui représente G_f (**a et b**) :
 - a. si $m \neq f(\bar{n})$ alors $\vdash_R \neg \exists z A'[\bar{n}, m, z]$;
 - b. si $m = f(\bar{n})$ alors $\vdash_R \exists z A'[\bar{n}, m, z]$
 - c. et vérifie de plus $\forall \bar{x}, y, z (A'[\bar{x}, y, z] \rightarrow y \leq z)$.
2. Montrer que la formule $H[\bar{x}, y] := \exists z H_0[\bar{x}, y, z]$ avec :

$$H_0[\bar{x}, y, z] := A'[\bar{x}, y, z] \wedge \forall z' \leq z \forall y' \leq z' (A'[\bar{x}, y', z'] \rightarrow y' = y)$$

est Σ_1 et représente la fonction f dans R au sens suivant :

$$\vdash_R \forall y (H[\bar{n}, y] \leftrightarrow y = \underline{f(\bar{n})}) \quad (*)$$

Indication. On pourra montrer successivement pour tout p -uplet d'entiers \bar{n} :

- a. $\vdash_R H[\bar{n}, \underline{f(n)}]$;
- b. Il existe un entier d tel que $\vdash_R H_0[\bar{n}, \underline{f(n)}, d]$;
- c. $\vdash_R \forall y (H[\bar{n}, y] \rightarrow y = \underline{f(\bar{n})})$ (on utilisera le **b**, $\vdash_R \forall z (z \leq \underline{d} \vee \underline{d} \leq z)$ et la question 1).

Exercice 3 (Théorème de Gödel-Rosser, démonstration directe). Soit T une théorie récursivement axiomatisable qui étend R . La fonction r est une fonction primitive récursive r telle que $r(\ulcorner F \urcorner, n) = \ulcorner F[\underline{n}/x_1] \urcorner$.

1. Montrer que pour toute formule A à une seule variable libre x_1 , il existe une formule à une variable libre D_A , qui peut être choisie Π_1 si A est Π_1 , telle que :

$$\vdash_T D_A[\underline{n}/x_1] \leftrightarrow A[\underline{r(n, n)}/x_0]$$

(définir $D_A := \forall x_0 (S[x_0, x_1] \rightarrow A[x_0])$ et utiliser le résultat de l'exercice 2).

2. **Théorème de Gödel-Rosser.** On suppose que T est cohérente. Montrer l'existence d'une formule G telle que $\not\vdash_T G$ et $\not\vdash_T \neg G$, et $\neg G$ est Σ_1 . Indication : soit $Dem_T[x_2, x_0]$ une formule de l'arithmétique Σ_1 à deux variables qui représente dans T le prédicat décidable " x_2 est le code d'une preuve de la formule de code x_0 ", et Dem_T^\perp une formule de l'arithmétique Σ_1 à deux variables qui représente la négation du précédent (justifier leurs existences). On utilisera pour la prouvabilité un prédicat qui appliqué au code d'une formule F donne :

$$\exists x_2 (Dem_T[x_2, \ulcorner F \urcorner] \wedge \forall x_3 \leq x_2 Dem_T^\perp[x_3, \ulcorner \neg F \urcorner])$$

(« il existe un entier x_2 qui code une preuve de F et aucun x_3 plus petit que x_2 ne code une preuve de $\neg F$ »).

Exercice 4 (ω -cohérence). Une théorie T dans le langage de l'arithmétique est dite ω -cohérente s'il n'existe pas de formule à une variable libre F telle que $\vdash_T \exists x F$ et pour tout entier n , $\vdash_T \neg F[\underline{n}/x]$.

1. Montrer que si T est ω -cohérente, alors T est cohérente.
2. Montrer que si T est cohérente et étend R^- , toutes les formules Π_1 prouvables dans T sont vraies dans \mathbb{N} .
3. Montrer que si T est ω -cohérente et étend R^- , toutes les formules Π_2 (en particulier les formules Σ_1) prouvables dans T sont vraies dans \mathbb{N} , et donc que T est Σ_1 -cohérente.
4. En déduire que si T étend R^- , est effectivement axiomatisable et qu'elle est ω -cohérente, alors il existe une formule G telle que ni G , ni $\neg G$ ne sont démontrables dans T (L'énoncé original du théorème de Gödel était sous hypothèse d' ω -cohérence de la théorie).

Exercice 5 (ω -incomplétude). On suppose que T est une théorie qui a pour conséquence R^- et qui est ω -cohérente.

1. Montrer qu'il existe une théorie cohérente, qui n'est pas ω -cohérente (utiliser le premier théorème d'incomplétude).
2. Une théorie dans le langage de l'arithmétique est ω -incomplète s'il existe une formule F à une variable libre x telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \vdash_T F[\underline{n}/x] \text{ mais } \not\vdash_T \forall x F$$

Montrer que T est ω -incomplète.

3. Soit F une formule Σ_0 telle que $G = \forall x_1 F$. Montrer que pour tout énoncé E dont les variables libres sont parmi x_1, \dots, x_n , l'énoncé $E' = E \leftrightarrow F$ vérifie :

$$\mathbb{N} \models \forall x_1 \dots x_n (E \leftrightarrow E')$$

$$\text{mais } \not\vdash_T \forall x_1 \dots x_n (E \leftrightarrow E').$$

Exercice 6. On désigne par PA l'arithmétique de Peano. On rappelle qu'il existe une formule close Π_1 , soit $\forall x A(x)$ où A est Σ_0 , qui est vraie dans \mathbb{N} et non démontrable dans PA. On rappelle également que toutes les formules Σ_1 vraies dans \mathbb{N} sont démontrables dans PA.

1. Montrer que pour tout entier n , $A(\underline{n})$ est démontrable dans PA (où \underline{n} désigne le terme correspondant à n).
2. Montrer que $\exists x \forall y (A(x) \rightarrow A(y))$ est démontrable en calcul des prédicats.
3. En déduire qu'il existe une formule close Σ_2 de la forme $\exists x B(x)$ qui est démontrable dans PA, mais telle que $B(\underline{n})$ ne soit démontrable dans PA pour aucun entier n .

Exercice 7. Le but de l'exercice est de fournir une autre démonstration du théorème de Gödel-Rosser en utilisant l'existence de deux ensembles récursivement inséparables. Deux ensembles disjoints E et F sont dits *récursivement inséparables* si et seulement s'il n'existe pas d'ensemble décidable X tel que $E \subset X$ et $F \subset X^c$.

1. Soient A et B deux ensembles semi-décidables. On va montrer qu'il existe deux ensembles A' et B' tels que :

— A' et B' sont semi-décidables;

—

$$A \cup B = A' \cup B'; \quad A' \cap B' = \emptyset;$$

$$A - B \subset A'; \quad B - A \subset B'.$$

- a. Donner une solution rapide quand A et B sont tous deux décidables.

- b. Dans le cas général, soient a un indice de A , b un indice de B . Montrer le résultat voulu en posant (T prédicat de terminaison) :

$$A' = \{x \in A \mid \exists d [T(a, x, d) \wedge \forall u < d \neg T(b, x, u)]\}$$

$$B' = \{x \in B \mid \exists d [T(b, x, d) \wedge \forall u \leq d \neg T(a, x, u)]\}$$

Désormais A et B sont les deux ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in W_{\pi_2^1(x)}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in W_{\pi_2^2(x)}\}.$$

Les deux ensembles A' et B' associés à A et B sont définis comme à la question 1.

2. a. Montrer que les deux ensembles A et B sont récursivement énumérables.
 b. Soient X un ensemble décidable, i un indice de X et j un indice de son complémentaire (justifier l'existence de j). On pose $k = \alpha_2(j, i)$. Montrer que

$$k \in A \cup B \text{ et } k \notin A \cap B.$$

- c. Montrer que les deux ensembles A' et B' associés à A et B sont récursivement inséparables.
 3. Soit Th une théorie cohérente qui a pour conséquence R . Soient ψ et ψ' , deux formules du langage de l'arithmétique à 3 variables libres, ψ étant Σ_1 , ψ' étant Π_1 , qui représentent le prédicat T de Kleene (justifier leur existence).

On pose :

$$A'' = \{x \in A \mid \vdash_{Th} \exists d [\psi(\underline{a}, \underline{x}, d) \wedge \forall u < d \neg \psi'(\underline{b}, \underline{x}, u)]\}$$

$$B'' = \{x \in B \mid \vdash_{Th} \exists t [\psi(\underline{b}, \underline{x}, t) \wedge \forall u \leq t \neg \psi'(\underline{a}, \underline{x}, u)]\}$$

- a. Montrer que $A' \subset A''$.
 b. Montrer que $A'' \cap B' = \emptyset$.
 c. En déduire que toute théorie Th cohérente ayant R pour conséquence est indécidable.
 Remarque : la question 3.b est plus difficile que les autres.