Feuille d'exercices n°4

Théorème de Rice-Shapiro.

Définitions.

Le théorème de Rice-Shapiro fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble qui vérifie des conditions analogues à celles du théorème de Rice soit effectivement énumérable. Dans les deux première parties de cette feuille, on donne deux conditions suffisantes pour qu'un tel ensemble ne soit pas effectivement énumérable. Le théorème de Rice-Shapiro est démontré dans la dernière partie.

Notation. Le domaine de définition de la fonction φ_i^n est noté W_i^n, w_i quand $n = 1$.

Un ensemble d'entiers X est dit *non trivial* s'il vérifie

i. $X \neq \emptyset$;

ii. $X \neq \mathbb{N}$.

Il est dit *extensionnel pour les ensembles* s'il vérifie :

iii. pour tous i et j, si $i \in X$ et $W_i = W_j$ alors $j \in X$.

Une classe $\mathcal{C}$ de sous-ensembles effectivement énumérables de $\mathbb{N}$ est dite *complètement effectivement énumérée* si l'ensemble de tous les indices des ensembles de $\mathcal{C}$:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid \exists W \in \mathcal{C}\ W_i = W\}$$

est effectivement énumérable.

1 Stabilité par inclusion des classes complètement énumérées.

On rappelle que φ^p désigne la fonction d'énumération des fonctions partielles calculables à p arguments, W_i^p le domaine de la fonction φ_i^p, et T^p un prédicat primitif récursif de terminaison (on omettra les exposants pour $p = 1$) vérifiant :

$$\exists d\ T^p[i, x_1 \ldots, x_p, d] \ \text{ ssi } \ \varphi^p(i, x_1, \ldots, x_p) \downarrow (\ \text{ ssi } \ (x_1, \ldots, x_p) \in W_i^p) \ .$$

1. **a.** Soient deux fonctions partielles calculables définies sur $\mathbb{N}$, f de domaine A et g de domaine B. Rappeler comment l'on construit une fonction partielle calculable h de domaine $A \cup B$ (utiliser le prédicat T pour i et j indices de f et g).

   b. En reprenant la construction ci-dessus montrer qu'il existe une fonction primitive récursive u telle que
$$W_{u(i,j)} = W_i \cup W_j \ .$$

2. Soit X un sous-ensemble effectivement énumérable de $\mathbb{N}$, et f une fonction partielle calculable à un argument. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive α telle que
$$\begin{cases} \varphi_{\alpha(i)}(x) = f(x) & \text{si } i \in X \\ \varphi_{\alpha(i)}(x) \uparrow & \text{si } i \notin X \end{cases}$$

3. Soient X, E et F des sous-ensembles effectivement énumérables de $\mathbb{N}$ avec $E \subset F$. Montrer en vous servant des résultats des deux questions précédentes qu'il existe une fonction primitive récursive β vérifiant :
$$\begin{cases} W_{\beta(i)} = F & \text{si } i \in X \\ W_{\beta(i)} = E & \text{si } i \notin X \end{cases}$$

4. On suppose maintenant que X est un ensemble effectivement énumérable extensionnel pour les ensembles. En utilisant le résultat de la question précédente et le théorème du point fixe montrer que :
$$\text{si } j \in X \text{ et } W_j \subset W_k \text{ alors } k \in X \ .$$

5. En déduire que F, l'ensemble des indices des ensembles finis, R l'ensemble des indices des ensembles décidables ne sont pas effectivement énumérables.

2 Une classe complètement énumérée contient un sous-ensemble fini non vide de chacun de ses sous-ensembles.

1. Soit Y un ensemble effectivement énumérable, et $e \in \mathbb{N}$ Définir une fonction calculable α de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :
   — si $x \in Y$, $W_{\alpha(x)} \subset W_e$ et $W_{\alpha(x)}$ est fini ;
   — si $x \notin Y$, $W_{\alpha(x)} = W_e$.
   Indication : utiliser pour un indice k de Y le prédicat suivant :
   $$T[e, z, d] \wedge \forall d' \leqslant z \; \neg T[k, x, d'] \; .$$
2. On suppose maintenant que X est un ensemble extensionnel pour les ensembles, non vide, et effectivement énumérable. Montrer qu'alors, si $e \in X$:
   $$\exists j \in X(W_j \text{ est fini} \wedge W_j \subset W_e)$$
   Indication : utiliser la question précédente avec Y non décidable.
3. Application : montrer que l'ensemble des indices de fonctions totales, et l'ensemble des indices de fonctions d'ensemble de définition infini ne sont pas effectivement énumérables.

3 Théorème de Rice-Shapiro.

On démontre maintenant une sorte de réciproque des résultats des deux parties précédentes.

1. Montrer qu'il existe une énumération $(F_x)_{x \in \mathbb{N}}$ de tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ telle que $y \in F_x$ est un prédicat décidable, et si $y \in F_x$, alors $y \leqslant x$ (on ne demande pas que l'énumération soit sans répétition, bien que cela soit possible).
2. Montrer que, pour $(F_x)_{x \in \mathbb{N}}$ comme ci-dessus, il existe une fonction totale calculable β telle que :
   $$W_{\beta(x)} = F_x$$
3. **Théorème de Rice Shapiro.** Soit une énumération $(F_x)_{x \in \mathbb{N}}$ de tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ telle que $y \in F_x$ est un prédicat décidable. Montrer qu'un ensemble X extensionnel pour les ensembles et non trivial est effectivement énumérable si et seulement s'il existe un ensemble effectivement énumérable A tel que :
   $$X = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists i (i \in A \wedge F_i \subset W_x)\}$$