Examen partiel du 18 novembre 2021

(durée: 2 heures)

On peut admettre les réponses à certaines questions pour traiter les questions ou exercices suivants. *Les parties calculabilité et complexité sont à rendre sur des feuilles indépendantes.*

On note φ^n une famille de fonctions universelles pour les fonctions partielles calculables, $\varphi = \varphi^1$, et W_i est le domaine de définition de φ_i. On rappelle les notations et le théorème de forme normale de Kleene : pour $n \geq 1$ les T^n ($T = T^1$) sont des prédicats récursifs primitifs, et $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction récursive primitive tels que :

$$\varphi^n(i, x_1, \dots, x_n) = U(\mu s. T^n[i, x_1, \dots, x_n, s]) \ .$$

Calculabilité

Exercice 1. L'ensemble des fonctions élémentaires $\mathscr{E}$ est le plus petit ensemble de fonctions à plusieurs arguments sur $\mathbb{N}$ et à valeur sur $\mathbb{N}$

- contenant les projections $p_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ($1 \leq i \leq n$), l'addition, la multiplication, et la fonction caractéristique de l'égalité $\chi_=$;
- clos par composition ;
- clos par somme et produit bornés, si $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N} \in \mathscr{E}$ alors Σf la somme bornée de f, et Πf le produit borné de f, toutes deux de $\mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ définies par

$$\Sigma f(a_1, \dots, a_p, x) = \sum_{i=0}^{x} f(a_1, \dots, a_p, i) \ ; \quad \Pi f(a_1, \dots, a_p, x) = \prod_{i=0}^{x} f(a_1, \dots, a_p, i)$$

  sont dans $\mathscr{E}$.

1. Montrer que les fonctions $\lambda x.1 \in \mathscr{E}$ (fonction constante égale à 1), $\mathrm{s} \in \mathscr{E}$ (fonction successeur), et $\lambda x.0 \in \mathscr{E}$ (fonction constante égale à 0).

   Solution - $\lambda x.1 = \lambda x.\chi_=(p_1^1(x), p_1^1(x))$, $s(x) = p_1^1(x) + \lambda x.1(x)$, $\lambda x.0 = \lambda x.\chi_=(p_1^1(x), s(x))$.

2. Montrer que $\overline{\mathrm{sg}} \in \mathscr{E}$ et $\mathrm{sg} \in \mathscr{E}$ où $\overline{\mathrm{sg}} : \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ x+1 \mapsto 0 \end{array}$ $\quad \mathrm{sg} : \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ x+1 \mapsto 1 \end{array}$

   Solution - $\overline{\mathrm{sg}}(x) = \lambda x.\chi_=(p_1^1(x), \lambda x.0(x))$, $\mathrm{sg} = \overline{\mathrm{sg}} \circ \overline{\mathrm{sg}}$,

3. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions élémentaires est clos par définition par cas : si P est un prédicat d'arité n tel que sa fonction caractéristique $\chi_P \in \mathscr{E}$, et si $g, h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $g, h \in \mathscr{E}$, alors $f \in \mathscr{E}$, où $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ est définie par

$$\text{si } \ P(x_1, \dots, x_n) \ \text{ alors } \ f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \ \text{ sinon } \ f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n)$$

   Solution -

$$f(x_1, \dots, x_p) = \chi_P(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n) + \overline{sg}\left(\chi_P(x_1, \dots, x_n)\right) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$$

4. Montrer que $\mathscr{E}$ est clos par produit borné strict, si $f \in \mathscr{E}$, $\Pi^< f \in \mathscr{E}$, où $\Pi^< f(\overline{a}, x) = \prod_{i<x} f(\overline{a}, i)$, soit

$$\Pi^< f(a_1, \dots, a_p, 0) = 1 \ ; \quad \Pi^< f(a_1, \dots, a_p, x+1) = \prod_{i=0}^{x} f(a_1, \dots, a_p, i) \ .$$

   Solution - On définit $\Pi^<$ avec $\overline{sg}$:

$$\prod_{i<x} f(\overline{a}, i) = \prod_{i \leq x} \left(\overline{\mathrm{sg}}(\chi_=(i, x)) \cdot f(\overline{a}, i) + \chi_=(i, x)\right)$$

On veut maintenant montrer la clôture par minimisation bornée sous la forme suivante : si $\chi_F \in \mathscr{E}$ (fonction caractéristique du sous-ensemble F de $\mathbb{N}^{p+1}$), alors la fonction $g : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$, où $g(a_1, \ldots, a_P, x) = \mu t \leq x \left[(a_1, \ldots, a_p, t) \in F\right]$ (le plus petit $t \leq x$ tel que $(a_1, \ldots, a_p, t) \in F$ s'il existe, 0 sinon) est dans $\mathscr{E}$.

5. Montrer le résultat dans le cas où il existe au plus un $t \leq x$ tel que $(a_1, \ldots, a_p, t) \in F$.
   Solution - S'il n'y a qu'au plus un t vérifiant $\chi_F(a_1, \ldots, a_p, x) = 1$ on a :
   $$\mu t \leq x.F(a_1, \ldots, a_p, t) = \sum_{t \leq x} t \cdot \chi_F(a_1, \ldots, a_p, t)$$
   Dans le cas général on est obligé de compliquer un peu.

6. Montrer le résultat cherché dans le cas général.
   Solution -
   $$\mu t \leq x\, F(a_1, \ldots, a_p, t) = \sum_{t \leq x} t \cdot \chi_F(a_1, \ldots, a_p, t) \cdot \prod_{i<t} \overline{\mathrm{sg}}(\chi_F(a_1, \ldots, a_p, i))$$

Exercice 2. Soit E un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que E est décidable si et seulement si E est l'image d'une fonction totale calculable strictement croissante.
   Solution - Soit E décidable, e le plus petit élément de E. Alors E est l'image de f définie par récurrence par
   $$\begin{aligned} &f(0) = e \\ &f(x+1) = \mu y.[y \in E \text{ et } y > f(x)]. \end{aligned}$$
   C'est une fonction totale car E est infini donc non borné.
   Réciproquement, soit f une fonction totale calculable strictement croisssante, alors $x \leq f(x)$ donc :
   $$y \in \mathrm{Im}\, f \text{ ssi } \exists x \leq y\ f(x) = y.$$
   qui est donc décidable (quantification bornée sur un prédicat calculable).

2. Montrer que si E est semi-décidable infini, il contient un sous-ensemble décidable infini.
   Solution - Soit g une fonction totale calculable telle que $\mathrm{Im}\, g = E$. Alors f définie par récurrence par
   $$\begin{aligned} &f(0) = g(0) \\ &f(x+1) = g(\mu y.[g(y) > f(x)] \end{aligned}$$
   est une fonction totale calculable car $\mathrm{Im}\, g = E$ est non borné, donc $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-ensemble décidable de E d'après la question précédente.

3. Pour f une fonction partielle calculable, on note I_f l'ensemble de ses indices :
   $$I_f = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = f\}\,.$$
   a. Montrer que I_f n'est pas décidable.
   Solution - l'ensemble I_f satisfait les hypothèses du théorème de Rice : extensionnel, non vide (car f a au moins un indice), et différent de $\mathbb{N}$ car il n'y a pas qu'une seule fonction partielle calculable.

   b. Montrer que son complémentaire I_f^{c} contient un ensemble semi-décidable infini (on peut distinguer suivant que f est ou non la fonction nulle part définie).
   Solution - Si f est la fonction nulle part définie, alors en posant :
   $$J = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(0) \downarrow\} = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists d\ T(i, 0, d)\}$$
   on a bien que J est semi-décidable, $J \subset I_f^{\mathrm{c}}$, et J est infini car J est extensionnel non vide, et une fonction possède une infinité d'indices.
   Si f est définie en au moins un point, soit x_0, alors :
   $$J = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists d \left(T(i, x_0, d) \wedge U(d) \neq f(x_0)\right)\}\,.$$
   vérifie $J \subset I_f^{\mathrm{c}}$, J est semi-décidable comme projeté d'un ensemble récursif primitif, le prédicat T et la fonction U étant récursifs primitifs, et il est infini car non vide et extensionnel.

4. Montrer qu'étant donné une fonction partielle calculable f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, il existe un ensemble décidable qui contient l'ensemble I_f de tous les indices de f, et dont le complémentaire est infini (*indication : utiliser les questions précédentes*).

   Solution - L'ensemble I_f^c contient un sous-ensemble J semi-décidable infini d'après la question précédente. Il possède un sous-ensemble décidable infini d'après la question **2**. Le complémentaire de cet ensemble décidable est donc décidable, il répond à la question étant donné qu'il contient tous les indices de f, et que son complémentaire est infini.

Exercice 3. Dans cet exercice on appelle point fixe d'une fonction totale calculable $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sans plus de précision, un point fixe pour l'énumération des fonctions partielles calculables à un argument, c'est-à-dire tout entier e vérifiant $\varphi_{\alpha(e)} = \varphi_e$ (où $\varphi = \varphi^1$). L'ensemble des points fixes d'une fonction totale calculable est noté F_α.

1. Soit R un sous-ensemble décidable de $\mathbb{N}$, α une fonction totale calculable et f une fonction partielle calculable toutes deux de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une fonction totale calculable β telle que

$$\begin{aligned} &\varphi_{\beta(x)} = \varphi_{\alpha(x)} \text{ si } x \in R \\ &\varphi_{\beta(x)} = f \text{ sinon} \end{aligned}$$

   Solution - Soit i un indice de la fonction partielle calculable (voir proposition 1.2.8 et exercice 14 du polycopié, la construction demande de passer par le calcul) définie par :

$$\begin{aligned} &h(x,y) = \varphi(\alpha(x),y) \text{ si } x \in R \\ &h(x,y) = f(y) \text{ sinon} \end{aligned}$$

   $\varphi^2(i,x,y) = \varphi(s_1^1(i,x),y)$ et $\beta(x) = s_1^1(i,x)$ convient.

2. On suppose que R vérifie de plus qu'il existe au moins une fonction partielle calculable, soit f, dont tous les indices sont dans R, et on définit β comme à la question **1** pour cette fonction f. Montrer que tous les points fixes de β sont dans R et sont des points fixes de α.

   Solution - Soit e un point fixe de β

$$\begin{aligned} &\varphi_e = \varphi_{\alpha(e)} \text{ si } e \in R \\ &\varphi_e = f \text{ sinon} \end{aligned}$$

   tous les indices de f étant dans R, forcément $\varphi_e = \varphi_{\alpha(e)}$.

3. Utiliser la question précédente pour montrer que, si l'ensemble F_α des points fixes de α est décidable, alors toute fonction partielle calculable possède au moins un indice qui est point fixe de α.

   Solution - On prend $R = F_\alpha^c$ qui est décidable par hypothèse. S'il existait une fonction partielle calculable f dont aucun indice ne soit dans F_α, c'est-à-dire tous les indices dans $R = F_\alpha^c$, on pourrait définir β comme ci-dessus pour cette fonction f. Les points fixes de β seraient alors dans $F_\alpha \cap F_\alpha^c = \emptyset$, Ce qui contredirait le théorème du point fixe.

4. En déduire qu'une fonction totale calculable α a forcément une infinité de points fixes.

   Solution - Si F_α n'est pas décidable, en particulier il n'est pas fini.
   Sinon, d'après la question précédente, F_α a pour éléments au moins un indice de chaque fonction partielle calculable, or il existe une infinité de fonctions partielles calculables, dont les ensembles d'indices sont disjoints. Donc F_α est infini.

5. Montrer qu'il existe au moins un ensemble décidable R, nécessairement infini, mais également de complémentaire infini, qui est ensemble des points fixes d'une certaine fonction totale calculable $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (*indication : utiliser la dernière question de l'exercice 2*).

   Solution - Soit f partielle calculable de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et R décidable contenant tous les indices de f et de complémentaire infini (exercice 2, question **4**). On définit par le théorème s-m-n une fonction γ telle que

$$\begin{aligned} &\varphi_{\gamma(x)} = \varphi_x \text{ si } x \in R \\ &\varphi_{\gamma(x)} = f \text{ sinon} \end{aligned}$$

   alors $R \subset F_\gamma$ par définition. Si $e \notin R$ est point fixe de γ, $\varphi_{\gamma(e)} = \varphi_e = f$, ce qui n'est pas possible car comme e est indice de f, $e \in R$. Donc $R = F_\gamma$.