Examen partiel du 29 octobre 2020

(durée: 2 heures)

On peut admettre les réponses à certaines questions pour traiter les questions ou exercices suivants. *Les parties calculabilité et complexité sont à rendre sur des feuilles indépendantes.*

Calculabilité

On note φ^n une famille de fonctions universelles pour les fonctions partielles calculables, $\varphi = \varphi^1$, et W_i est le domaine de définition de φ_i. On rappelle les notations et le théorème de forme normale de Kleene : pour $n \geq 1$ les T^n ($T = T^1$) sont des prédicats récursifs primitifs, et $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction récursive primitive tels que :

$$\varphi^n(i, x_1, \ldots, x_n) = U(\mu s.T^n[i, x_1, \ldots, x_n, s]) .$$

Exercice 1. On suppose données trois fonctions récursives primitives $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\pi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, qui permettent de coder les couples, c'est-à-dire qu'elles vérifient :

$$\pi_1(\alpha(x, y)) = x \ ; \ \pi_2(\alpha(x, y)) = y .$$

On les note comme celles du cours, mais ce ne sont pas forcément les fonctions vues en cours. En particulier α est supposée injective, mais pas forcément bijective (vous n'avez pas besoin des fonctions α et π_i données en cours pour cet exercice).

On note $\mathscr{P}_2$ l'ensemble des fonctions recursive primitive définies à partir des fonctions de base usuelles et de ces trois fonctions par composition et récurrence primitive utilisant un seul paramètre. Plus précisément $\mathscr{P}_2$ est le plus petit sous-ensemble de $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^p}$ vérifiant :

- **i.** $\lambda x.0, \mathrm{s} \in \mathscr{P}_2$ ($\mathrm{s}\,x = x + 1$), $p_i^k \in \mathscr{P}_2$ ($1 \leq i \leq k$) ($p_k^i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$), $\alpha, \pi_1, \pi_2 \in \mathscr{P}_2$;
- **ii.** si $h : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$, et $g_1, \ldots, g_p : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h, g_1, \ldots, g_p \in \mathscr{P}_2$, alors $f \in \mathscr{P}_2$ où $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ est définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_p(x_1, \ldots, x_n))$.
- **iii.** si $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $g, h \in \mathscr{P}_2$, alors $f \in \mathscr{P}_2$, où $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est définie par :

$$f(a, 0) = g(a) \ ; \ \ f(a, x+1) = h(a, x, f(a, x)) .$$

On note $\mathscr{I}_2$ le plus petit sous-ensemble de $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^p}$ vérifiant les clauses **i**, **ii** ($\mathscr{I}_2$ à la place de $\mathscr{P}_2$) et **iii'** (définition par itération avec un seul paramètre) :

- **iii'** si $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g, h \in \mathscr{I}_2$, alors $f \in \mathscr{I}_2$ où $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est définie par :

$$f(a, 0) = g(a) \ ; \ \ f(a, x+1) = h(a, f(a, x)) .$$

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble de toutes les fonctions récursives primitives.

1. Montrer que $\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}$.
2. Montrer que $\mathscr{I}_2 = \mathscr{P}_2$, et donc $\mathscr{I}_2$ est l'ensemble de toutes les fonctions récursives primitives (*indication : on peut associer à $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ la fonction $\tilde{f} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\tilde{f}(a, x) = \alpha(x, f(a, x))$*).

Exercice 2 (Fonctions de choix). Les trois questions de cet exercice sont indépendantes, mais il vaut mieux faire la première avant la seconde. La troisième peut être abordée directement.

1. Montrer qu'il existe une fonction partielle calculable f telle que :

$$W_i \neq \emptyset \Rightarrow f(i) \downarrow \text{ et } f(i) \in W_i . \qquad (*)$$

2. La fonction f définie ci-dessus peut être vue comme une fonction partielle calculable de choix sur les semi-décidables, mais dépend a priori de l'indice de l'ensemble semi-décidable et non seulement de l'ensemble. Nous allons montrer qu'il ne peut pas en être autrement, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonction partielle calculable f vérifiant :

$$[W_i = W_j \text{ et } W_i \neq \emptyset] \Rightarrow [f(i)\downarrow \text{ et } f(j)\downarrow \text{ et } f(i) = f(j) \text{ et } f(i) \in W_i]\,. \qquad (**)$$

a. Définir deux fonctions partielles calculables g et h à deux arguments, telle que pour tout entier i :

$$\begin{array}{l} g(i,0)\downarrow \text{ et } h(i,1)\downarrow \\ g(i,1)\downarrow \text{ ssi } W_i \neq \emptyset \\ h(i,0)\downarrow \text{ ssi } W_i \neq \emptyset \\ g(i,j)\uparrow \text{ et } h(i,j)\uparrow \text{ pour } j \geq 2 \end{array}$$

b. Montrer qu'il existe deux fonctions totales calculables α et β telles que :

$$\begin{array}{ll} W_i = \emptyset \Rightarrow W_{\alpha(i)} = \{0\} & W_i = \emptyset \Rightarrow W_{\beta(i)} = \{1\} \\ W_i \neq \emptyset \Rightarrow W_{\alpha(i)} = \{0,1\} & W_i \neq \emptyset \Rightarrow W_{\beta(i)} = \{0,1\} \end{array}$$

c. Montrer que $W_{\alpha(i)} = W_{\beta(i)}$ est indécidable.

d. En déduire qu'il n'existe pas de fonction partielle calculable f vérifiant $(**)$.

3. On veut maintenant montrer qu'il n'existe pas de fonction totale calculable de choix, i.e. de fonction totale calculable f vérifiant $(*)$.

a. Construire une fonction d partielle calculable à deux arguments telle que $d(x,y)\downarrow$ ssi $x = y$.

b. Soit f une fonction totale calculable. Montrer qu'il existe une fonction totale calculable γ telle que $W_{\gamma(i)} = \{f(i)+1\}$.

c. Montrer que f totale calculable ne peut pas vérifier $(*)$ (utiliser le théorème du point fixe).

Complexité

rendre ces exercices sur une feuille indépendante