Feuille d'exercices : Corrigé n°6

Fonctions récursives partielles (3)

Exercice 13 (Fonctions de choix). La 3-ième question de cette partie est indépendante des deux autres. On peut se servir de la première pour la seconde.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive partielle f telle que :

$$W_i \neq \emptyset \Rightarrow f(i) \downarrow \text{ et } f(i) \in W_i \ . \qquad (*)$$

Solution :

$$f(i) = \pi^2(\mu z.T^1(i, \pi_2^1(z), \pi_2^2(z))) \ .$$

2. La fonction f définie ci-dessus peut être vue comme une fonction récursive partielle de choix sur les récursivement énumérables, mais dépend a priori de l'indice de l'ensemble récursivement énumérable et non seulement de l'ensemble. Nous allons montrer qu'il ne peut en être autrement, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonction récursive partielle f vérifiant :

$$[W_i = W_j \text{ et } W_i \neq \emptyset] \Rightarrow \qquad (**)$$
$$[f(i) \downarrow \text{ et } f(j) \downarrow \text{ et } f(i) = f(j) \text{ et } f(i) \in W_i] \ .$$

a. Définir deux fonctions partielles récursives g et h à deux arguments, telle que pour tout entier i :

$$\begin{array}{l} g(i,0) \downarrow \text{ et } h(i,1) \downarrow \\ g(i,1) \downarrow \text{ ssi } W_i \neq \emptyset \\ h(i,0) \downarrow \text{ ssi } W_i \neq \emptyset \\ g(i,j) \uparrow \text{ et } h(i,j) \uparrow \text{ pour } j \geqslant 2 \end{array}$$

Solution : On définit par cas g et h :

$$\begin{array}{ll} g(i,0) = 0 & h(i,0) = \mu z.T^1(i, \pi_2^1(z), \pi_2^2(z)) \\ g(i,1) = \mu z.T^1(i, \pi_2^1(z), \pi_2^2(z)) & h(i,1) = 0 \\ g(i,j) = \mu z.(0 = 1) \text{ pour } j \geqslant 2 & h(i,j) = \mu z.(0 = 1) \text{ pour } j \geqslant 2 \end{array}$$

b. Montrer qu'il existe deux fonctions récursives α et β telles que :

$$\begin{array}{l} W_i = \emptyset \Rightarrow W_{\alpha(i)} = \{0\} \\ W_i \neq \emptyset \Rightarrow W_{\alpha(i)} = \{0,1\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} W_i = \emptyset \Rightarrow W_{\beta(i)} = \{1\} \\ W_i \neq \emptyset \Rightarrow W_{\beta(i)} = \{0,1\} \end{array}$$

Solution : Par le théorème s-m-n, a étant un indice de g, b de h, on pose $\alpha(i) = s_1^1(a,i)$, $\beta(i) = s_1^1(b,i)$, $W_{\alpha(i)}$ est alors le domaine de définition de $\lambda j.g(i,j)$, $W_{\beta(i)}$ celui de $\lambda j.h(i,j)$, ce qui donne le résultat voulu.

c. Montrer que $W_{\alpha(i)} = W_{\beta(i)}$ est indécidable.

Solution : $W_{\alpha(i)} = W_{\beta(i)}$ ssi $W_i \neq \emptyset$, ce qui est indécidable en appliquant le théorème de Rice.

d. En déduire qu'il n'existe pas de fonction récursive partielle f vérifiant $(**)$.

Solution : Soit f une fonction partielle vérifiant $(**)$. Comme $W_{\alpha(i)} \neq \emptyset$ et $W_{\beta(i)} \neq \emptyset$, les deux fonctions $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ sont totales (définition de f). Comme $f(x)$ ne dépend que de W_x, si $W_{\alpha(i)} = W_{\beta(i)}$, alors $f \circ \alpha(i) = f \circ \beta(i)$. Comme $W_{\alpha(i)} \neq W_{\beta(i)} \Rightarrow W_{\alpha(i)} \cap W_{\beta(i)} = \emptyset$, et que $f(x) \in W_x$, la réciproque est vraie :

$$f \circ \alpha(i) = f \circ \beta(i) \text{ ssi } W_{\alpha(i)} = W_{\beta(i)} \ .$$

Si f était récursive partielle, cette égalité serait décidable ce que contredit le résultat de la question précédente.

3. On veut maintenant montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive totale de choix, i. e. de fonction récursive totale f vérifiant $(*)$.

a. Construire une fonction d récursive partielle à deux arguments définie si et seulement si ses deux arguments sont égaux.

Solution : On définit d par minimisation (le test d'égalité est récursif) :

$$d(i,j) = \mu z.(i = j)$$

b. Soit f une fonction récursive totale. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale γ telle que $W_{\gamma(i)} = \{f(i)+1\}$.

Solution : On pose $v(i,j) = d(f(i)+1, j)$, soit c un indice de v, on pose $\gamma(i) = s_1^1(c,i)$. On a bien que $W_{\gamma(i)}$ est le domaine de définition de $\lambda j.d(f(i)+1, j)$, ce qui donne le résultat voulu.

c. En appliquant le théorème du point fixe à γ, montrer que f récursive totale ne peut vérifier $(*)$.

Solution : Soit e un point fixe de γ. On a donc $W_e = W_{\gamma(e)} = \{f(e)+1\}$. Mais si f vérifie $(*)$, $f(e) \in W_e$, et comme W_e est un singleton, $f(e) = f(e)+1$, contradiction. On a bien qu'une fonction vérifiant $(*)$ ne peut être récursive totale.